L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation

Isabelle Bloch

N° d'ordre : 2174

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : Didactique des mathématiques

par

Isabelle BLOCH

-oOo-

L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université

Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation

Thèse soutenue le 19 janvier 2000

Après avis de Mme Michèle **ARTIGUE** **Rapporteurs**
M. François **CONNE**

devant la commission d'examen:

MM.

Jean **ESTERLE**	Professeur Université Bordeaux 1	**Président**
Michèle **ARTIGUE**	Professeur IUFM Champagne - Ardennes	
René **BERTHELOT**	Maître de conférences IUFM d'Aquitaine	
Guy **BROUSSEAU**	Professeur émérite	**Directeur de thèse**
Pierre **CLANCHE**	Professeur Université Bordeaux 2 V. Segalen	
François **CONNE**	Professeur Université de Genève	
André **ROUCHIER**	Professeur IUFM d'Aquitaine	**Rapporteur du jury**

REMERCIEMENTS

Kind of Blue
Miles Davis

J'entends, dit Alice, qu'un enfant ne peut s'empêcher de grandir.
***Un** enfant ne le peut sans doute pas, dit Humpty-Dumpty, mais **deux** enfants le peuvent à coup sûr. Convenablement aidée, vous eussiez pu vous arrêter à sept ans.*
Lewis Carroll, « A travers le miroir ».

Je remercie Guy Brousseau d'avoir accepté de diriger ce travail ; non seulement les discussions avec lui ont été passionnantes, mais la découverte du monde des mathématiques de l'école primaire m'a ouvert des horizons qui ne sont pas près de se refermer. Je le remercie pour m'avoir aidée à découvrir et à comprendre la théorie des situations, dont j'ai pu constater la « déraisonnable efficacité » pour étudier l'enseignement de l'analyse du secondaire à l'université.

Je tiens à remercier tout particulièrement René Berthelot, pour son amitié et sa disponibilité ; pour ses analyses rigoureuses, sa pensée incisive ; pour avoir mis à ma disposition son savoir en didactique, qui est considérable, sa bibliothèque, qui l'est aussi, et une voire deux oreilles attentives à mes questions et mes difficultés.

Je remercie Pedro Alson, qui m'a vivement encouragée à utiliser la situation « Graphiques et Chemins » issue de son ouvrage « Metodos de graficacion », et m'a aidée de ses précisions et ses conseils.

Je remercie François Conne, non seulement pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, mais aussi pour les échanges stimulants qui m'ont permis de progresser, pour son humour réconfortant et pour ses encouragements amicaux.

Je remercie Michèle Artigue d'avoir accepté de se rendre disponible pour être rapporteur de cette thèse, et tous les membres du jury, en particulier Jean Esterle qui a accepté de le présider.

Je suis très reconnaissante aux amis et collègues qui m'ont ouvert leurs classes et communiqué des travaux d'élèves, Guillaume Anachi, Marie-Noëlle Arnould, Michel Arnould et Antoine Hollard.

Merci enfin à tous les élèves de Première Scientifique du lycée Saint-John Perse à Pau, qui ont participé avec dynamisme et humour à la recherche de graphiques et chemins, et à la découverte des propriétés du flocon de von Koch.

Merci à Thomas et Thalia, qui, bien qu'étant deux, ne se sont pas arrêtés à sept ans, et ont continué de grandir malgré les absences (réelles ou virtuelles) de leur mère ; et merci, du fond du cœur, à Jean de les avoir aidés à surmonter ce que cette période pouvait avoir pour eux (et pour lui) de difficile).

L'INRP et l'IUFM d'Aquitaine m'ont accordé des heures de décharge sur mon service d'enseignante durant trois ans, et ont ainsi contribué à ce que cette thèse voit le jour ; qu'ils en soient remerciés.

Teaching calculus / analysis at the turning point between Secondary School and University. Knowledge, knowing and conditions for validation.

The study of maths curriculum in the last grades of secondary schools in France along 30 years brings to light important variations that took place since 1962 in the contents of calculus at this level. These evolutions concern the objects of calculus that are taught as well as the procedures used by students and teachers. The suggested methods affect the knowledge that students are likely to use when doing the given tasks; and we observe that since the 90ths', the tasks given to students do not valorise validation. We study the possibilities of establishing an real relationship to the knowledge in calculus, at this level of teaching, and to allow the students to build appropriate methods.

We study the question of validation in teaching analysis through the following directions:

- the mathematical theory; its organisation; the methods of proof and the formalization; how these methods can be introduced in the teaching, in a way that students can understand;
- the existence of fundamental situations concerning the concepts of function and limit, and the possibility of implement such situations in the class.

Besides, the study of the different settings of representation that are at stake to build a suitable environment for the teaching of function and limit makes new potentialities come to light, particularly in the graphic and formal settings.

The experimentation is carried through the building of situations with an a-didactical component for the teaching of function and limit, and through the observation of their implementation in a scientific class of 17 years-old students. This makes us first question the knowledge and professional knowing a teacher uses to manage a teaching situation in analysis, with an a-didactical component, and then draw a pattern to the teacher's milieu.

We also submit a test to the students and analyse the results with statistic tools so as to test the main features of the learning.

In the last chapter we study lectures at undergraduate level, and student's papers with lots of errors about calculus definitions. This leads us to question the knowledge that is compulsory at University level; we wonder how it is possible to link it with Secondary school's knowledge and habits.

As a conclusion, we shall suggest some remarks about the balance between definitive knowledge and what students must get as an experience in the teaching of a new mathematical theory; this balance affects the possibilities of validation and finally, the future prospects of teaching analysis from Secondary Schools to University.

Key words

Analysis, functions, graphical representations, limits; fundamental situations in analysis; knowing, knowledge, validation in teaching analysis; role of the teacher, pattern of the teacher's milieu, mathematical activity of teacher and students.

L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université: savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation.

Une étude de l'enseignement de l'analyse au niveau des dernières classes de l'enseignement secondaire français fait apparaître des variations importantes à chaque réforme depuis 1962, variations qui concernent aussi bien l'objet du savoir que les procédures conseillées par les programmes et les manuels. Les méthodes préconisées conditionnent les connaissances utilisables par les élèves pour effectuer les tâches prescrites, et l'équilibre connaissances / savoirs caractérise la place dévolue à la validation. Nous étudions les possibilités d'établir à ce

niveau un rapport *effectif* au savoir de l'analyse et de permettre à l'élève de construire des connaissances appropriées.
Par ailleurs l'examen des registres et des ostensifs disponibles pour construire un milieu propre à l'enseignement des notions de fonction et de limite, fait apparaître des potentialités non exploitées dans les registres graphique et formel. Ceci conduit à construire et à expérimenter dans la classe de première Scientifique, une situation pour l'enseignement de la notion de fonction : la situation « Graphiques et Chemins » , et une situation pour une première approche de la notion de limite de suite : la situation du flocon.
Les problèmes rencontrés dans la gestion des situations comportant une dimension a-didactique amènent à s'interroger sur les connaissances que le professeur met en oeuvre pour gérer une situation d'enseignement comportant une telle composante, et sur une modélisation possible du milieu du professeur.
Un questionnaire est construit pour l'étude des connaissances sur l'analyse; son traitement statistique a pour but de tester l'effectivité de l'apprentissage.
Dans l'enseignement supérieur, l'étude de transcriptions de cours et de copies d'élèves permet de s'interroger sur les connaissances nécessaires à ce niveau, et sur l'articulation avec l'enseignement secondaire.
En conclusion, nous proposons quelques pistes de réflexion sur l'équilibre connaissances / savoirs dans l'enseignement des débuts d'une théorie mathématique, et sur l'enseignement possible, au niveau du secondaire, de connaissances requises dans la suite du cursus.

Mots clés:

Analyse, fonctions, représentations graphiques, limites; ostensifs graphiques, ostensifs formels de fonctions ; théorie des situations et situation fondamentale de l'analyse; savoirs, connaissances, validation dans l'enseignement de l'analyse; rôle du professeur, modélisation du milieu du professeur, activité mathématique enseignant/enseigné.

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

Un témoin dans la ville
Barney Wilen

Trois personnes sont dans une montgolfière. Elles ont perdu le contrôle de leur vaisseau, et un vent violent les emporte, tandis que les nuages les empêchent de se repérer. Nous ne sommes pas au début de L'Ile Mystérieuse, et les passagers emportés par une effroyable tempête ne sont pas Cyrus Smith l'ingénieur, Gedeon Spilett le journaliste, Pencroft le marin, Nab et Harbert : ceci est une histoire sur les mathématiciens. Le vent se calme un moment, le ballon descend, se stabilise au dessus d'un champ où travaille un homme.

Les passagers l'interpellent :
« Où sommes-nous ? » demande le premier.
L'homme les considère attentivement et ne répond pas.
« Nous sommes perdus, pouvez-vous nous indiquer notre position ? » reprend le second.
L'homme les regarde avec une attention de plus en plus grande et ne répond toujours rien.
« Nous avons absolumment besoin de nous repérer, pouvez-vous nous dire où nous sommes ? » insiste le troisième.
L'homme dit alors : « Vous êtes dans une montgolfière. »

Sur ce, la tempête se déchaîne à nouveau, et les trois personnes sont emportées au loin. L'une d'elles déclare alors : « Ce devait être un mathématicien. » « Et qu'est-ce qui te fait croire cela ? » lui demandent les autres. « Eh bien, il a réfléchi avant de parler, ce qu'il nous a dit était parfaitement exact, et cela ne nous servait rigoureusement à rien. »

J'ai fait mes études de mathématiques à Jussieu, qui commençait juste à se diviser entre Université Paris VI et Université Paris VII, en pleine période de triomphe des formalistes et des mathématiques modernes. Les professeurs étaient pour la plupart passionnants, et les mathématiques que l'on nous enseignait en maîtrise fort belles (topologie, intégrale de Lebesgue, algèbre des groupes finis, probabilités, calcul différentiel… pour ne citer que quelques intitulés) ; de plus je crois pouvoir dire que non seulement le formalisme ne me rebutait pas, mais j'aimais cela. Jacques Roubaud a raconté, bien mieux que je ne pourrais jamais le faire pour mon propre compte, sa fascination pour cette construction si harmonieuse, et qui semblait si complète, des mathématiques contemporaines[1].

Peut-être ma mémoire est-elle défaillante ; quand je me remémore le cours (passionnant, je l'ai dit) de Marcel Berger sur le calcul différentiel et les formes différentielles, cela m'évoque l'histoire de la montgolfière : M.Berger était un professeur remarquable, il avait sûrement beaucoup réfléchi à ce qu'il exposait, c'était sans aucun doute rigoureusement exact, et cela ne nous servait, à nous ses étudiants, à RIEN. A rien, entendons-nous : à ne rien FAIRE, car de l'année je n'ai pas souvenir d'avoir résolu, ou même vu, une seule équation différentielle, pas le plus petit système différentiel, pas l'ombre d'une fonction exprimée par une équation algébrique à intégrer, pas la moindre idée de *comment* on faisait

[1] cf. « Mathématique: » J. Roubaud (1997). La fascination a été suivie de doute…

pour résoudre, *pour de vrai*, ces équations différentielles pour lesquelles on passait tant de temps à établir l'existence de solutions, leur structure[2] … Mais plus encore, même au sujet de la théorie, pas la plus petite trace d'un *problème* à résoudre.

J'ai dit que cela ne me rebutait pas : si peu qu'avec quatre condisciples j'ai entrepris un DEA avec C.Ehresmann, l'inventeur des catégories, lequel ne passait pas pour le moins obscur des chercheurs et des professeurs. Ce DEA s'intitulait « Variétés différentiables », et j'y ai appris nombre de résultats sur les catégories, les variétés, les fibrés et autres surfaces de Riemann (mais je n'ai toujours pas eu à me poser le moindre problème conduisant à une équation différentielle, même sur un fibré). C.Ehresmann était certes un professeur dont le discours n'était pas toujours à la portée de mathématiciens débutants ; c'était aussi un homme d'une grande humanité. Lui et R.Ruget, mon directeur de DEA, se sont montrés attentifs et disponibles pour nos questions, même celles qui devaient leur sembler les plus triviales. Cependant dans ma génération, nous tombions dans une période de vaches maigres pour les recrutements dans l'enseignement supérieur. Après avoir envisagé de faire une thèse, et entrevu les difficultés matérielles lorsqu'on n'a pas d'autre moyen de subsistance, j'ai passé l'agrégation et me suis dirigée vers l'enseignement secondaire ; avec regrets certes, pour l'abandon d'un domaine de recherche qui me captivait par sa complexité, mais aussi avec toute la curiosité de qui pense découvrir un continent inconnu.

C'est à l'IREM[3] de Paris VII qu'un jour Michèle Artigue est venue nous parler des systèmes différentiels et de leur résolution approchée, et que j'ai pris conscience de la distance qui pouvait exister entre apprendre les grandes théories des mathématiques qui nous étaient exposées et FAIRE des mathématiques : poser des problèmes (y compris des problèmes dans la théorie) et les résoudre. Ainsi ces systèmes différentiels pour lesquels nous avions tant bataillé afin d'établir l'existence de solutions, on ne savait pas toujours construire une stratégie de résolution approchée… En analyse ce phénomène est courant, et je n'étais pas étonnée ; mais ce fait me frappait pour la première fois, et je soupçonnais toute une partie des mathématiques, pas moins intéressante ni rigoureuse, mais différente, qui avait pour objet de problématiser la construction approchée de ces solutions qui se dérobaient ; et de problématiser, d'abord, les équations différentielles dont on parlait.

C'était, ce n'est pas un hasard, à la fin des années 70 ; on commençait à mettre en cause les « mathématiques modernes », et à chercher d'autres paradigmes d'enseignement. La didactique des mathématiques se constituait en champ de recherche autonome. Je me suis abonnée, presque dès sa première parution, à la revue Recherches en Didactique des Mathématiques, mais je n'ai pas décidé de sauter le pas : d'enseignante devenir chercheur. Pour cela il a fallu la rencontre avec René Berthelot et ensuite Guy Brousseau, et la prise de conscience de ce qui séparait la problématique de l'enseignant, même « innovant », de celle du chercheur ; il a fallu aussi le contact avec l'enseignement primaire, et l'extraordinaire richesse didactique qu'il offre, et que l'équipe de Bordeaux en particulier a rendue accessible.

Dans le domaine que j'ai choisi pour faire cette thèse, j'ai retrouvé l'analyse, qui m'avait fascinée par sa complexité ; certes c'est d'un tout autre point de vue, celui de l'enseignement, de la diffusion des connaissances de l'analyse, mais ce point de vue n'est pas moins complexe ni moins intéressant. J'espère par ce travail de thèse avoir contribué, si peu que ce soit, à analyser cette complexité et à renforcer cet intérêt. Je suis sûre quant à moi d'avoir énormément appris, et suis profondément reconnaissante à tous ceux qui m'ont fait confiance, et à tous ceux qui ont bien voulu interagir avec moi dans ce travail, et dont le

[2] Je sais, je sais, c'était une maîtrise de maths *pures*.

[3] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

contact a été si gratifiant et si enrichissant ; ils m'ont initiée aux principes de la recherche, et à sa rigueur.

Pour parler de principes, je ne peux mieux faire que de citer un savant qui, pour n'être pas avant tout mathématicien, exerça quelque peu ses talents dans le domaine des équations différentielles.

> *« Je connais la tendance de l'esprit humain à faire n'importe quoi plutôt que de penser. Certes, aucun d'entre nous n'espère réussir sans travail. Nous savons tous qu'acquérir un tant soit peu de science exige un effort intellectuel considérable, et je suis sûr que nous y sommes prêts pour avancer dans notre discipline. Mais effort intellectuel n'égale pas pensée. Et ceux qui, à grand'peine, ont acquis l'habitude de s'appliquer à leur tâche, souvent trouvent plus aisé d'apprendre une formule que de maîtriser un principe. Je m'efforcerai ici de vous montrer, et vous le vérifierez plus tard, que les principes sont fertiles en résultats, alors que les résultats seuls sont stériles. Celui qui a appris une formule est à la merci de sa mémoire, mais celui qui a maîtrisé un principe peut garder son esprit libre de formules, sachant qu'il peut en fabriquer autantque nécessaire, le moment venu.*
> *Dois-je ajouter que, malgré le recul naturel de l'esprit devant le dur processus de la pensée, pourtant, ce processus une fois accompli, l'esprit ressent une puissance et une jouissance qui l'amènent à mépriser désormais les peines et angoisses qui accompagnent son passage d'un stade de développement à un autre ? »*
>
> James C. Maxwell (1860), *Conférence inaugurale au King's College de Londres*.

CHAPITRE 1

CHAPITRE 1

QUESTIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

The essence (part 1)
Ahmad Jamal

I. INTRODUCTION

I.1. UN CONSTAT D'INSTABILITE

On s'accorde généralement à reconnaître que l'enseignement de l'analyse au lycée a subi, depuis trois décennies environ, d'importants bouleversements, et ceci plusieurs fois de suite : à chaque changement de programme (1966, 1971, 1982, 1985, 1991), des remaniements non négligeables ont été opérés dans les contenus d'analyse figurant dans le programme des classes scientifiques (Première et Terminale), avec d'éventuelles retombées sur les autres sections (économique, littéraire). Ces variations ont été pointées dans des travaux récents (Artigue, 1993 ; Artigue, 1996 ; Trouche, 1996 ; Artigue 1998). Il semble qu'il soit difficile à l'institution scolaire de dégager une dialectique raisonnable pour l'enseignement de l'analyse : en témoignent ces turbulences.

Notre projet est de nous intéresser à ces avatars de l'introduction des concepts de l'analyse, et, à travers eux, aux problèmes spécifiques posés par cette introduction ; en effet la nature comme l'ampleur des modifications nous interroge sur ces problèmes. On n'observe pas le même phénomène avec l'algèbre : bien que les enseignants et les évaluations nationales témoignent d'une certaine difficulté des élèves dans ce domaine, il n'a pas été question de supprimer les égalités remarquables, ou les factorisations, du programme du collège, ni les simplifications de fractions rationnelles, ou le second degré, du programme de lycée.

L'analyse dans le secondaire parait donc marquée d'une première spécificité : celle de l'incertitude de la détermination des objets de savoir correspondants, à enseigner. En effet il est possible, en analyse, apparemment, de décider que l'on va enseigner, ou non, la définition d'une limite ; que l'on va déterminer des limites par encadrement ou que ce sera par des théorèmes de l'algèbre des limites ; qu'une intégrale de f entre a et b est égale à la différence des valeurs d'une primitive F de f entre a et b, ou à la limite d'une somme de Riemann...

Or ces choix ne peuvent se faire sans que change le système enseigné : le milieu nécessaire pour enseigner l'une ou l'autre de ces alternatives ne peut demeurer le même. En particulier les situations de validation ne peuvent être que profondément modifiées par ces décisions, puisque celles-ci concernent les critères de preuve disponibles pour un problème donné. A notre connaissance, les problèmes posés par ces modifications, au niveau du milieu et de la validation, n'ont pas été envisagés, du moins pas exactement sous cet angle. Nous nous proposons d'essayer de les aborder.

Parallèlement, les modifications de programmes sont suivies de changements dans l'évaluation : changements dans le contenu de ces évaluations (évolution des sujets d'examens) et aussi changements dans l'organisation même, par exemple introduction systématique des évaluations nationales en début de Seconde, de Sixième. Quels en sont les effets, et de quoi ces phénomènes sont-ils révélateurs ?

I.2. LA « DERIVE » DES SUJETS DU BACCALAUREAT

Cette dérive est signalée dans de nombreuses publications (Association des Professeurs de Mathématiques[4] en particulier), et même jusque dans des publications non réservées aux professeurs de mathématiques (revues « grand public ») : face à un public nouveau, les épreuves du baccalauréat scientifique ont connu une régulation, nécessaire pour éviter les conséquences sociales d'un échec trop massif. Les effets de cette régulation (dont nous n'examinerons pas dans ce préambule si elle est pertinente ou non) sur la préparation de l'épreuve, et donc sur l'enseignement en Terminale scientifique, sont peut-être plus lourds qu'il ne serait nécessaire : on aboutit à un enseignement d'une heuristique de résolution de problèmes afin d'assurer un succès raisonnable aux épreuves de l'examen.

En même temps les commentateurs de l'enseignement et de ses résultats (APM toujours, ministère de l'Education Nationale, corps d'inspection, presse) s'inquiètent d'une baisse très significative des résultats de la France aux Olympiades de mathématiques. De plus les universitaires relèvent le niveau insuffisant des étudiants de DEUG scientifique, en mathématiques, tandis que les professeurs assurant la préparation aux concours de recrutement des enseignants se désolent de la non-maîtrise des connaissances élémentaires de mathématiques dont font preuve les candidats ; et des deux côtés l'analyse est tout particulièrement visée.

Il semblerait donc que les ajustements réalisés n'aient produit qu'une réussite de façade, au niveau du taux de réussite au baccalauréat ; et aucun accord n'a pu être trouvé, à ce jour, sur une façon satisfaisante d'enseigner les rudiments de l'analyse de manière à préparer les étudiants à son étude plus approfondie dans la suite de leur cursus universitaire.

Nous ne tenterons pas, dans cette thèse, d'étudier en détail les effets des réformes successives, ni les conceptions qui les sous-tendent. Ces turbulences nous poussent plutôt à nous interroger sur l'objet de savoir, « analyse », et son introduction dans l'enseignement : nous tenterons de promouvoir une démarche qui nous renseigne un peu sur ce que c'est que l'analyse, scientifiquement et didactiquement parlant ; et ce qu'est son enseignement, ou du moins : comment on peut envisager cet enseignement, et sous quelles modalités. En bref :

Qu'est-ce que l'analyse, comme branche des mathématiques ? sur quels objets travaille-t-elle ? sur quel champ de problèmes ?

Quelles sont les caractéristiques de l'enseignement de l'analyse à l'université ? comment opère, à ce niveau, la transposition didactique ?

Y a-t-il un enseignement possible de l'analyse au lycée, et si oui à quelles conditions ? et à quel niveau ? quels en sont les objets ? quelles sont les caractéristiques du (des) milieu(x) associé(s) ?

Y a-t-il une (des) situation(s) fondamentale(s) de l'analyse ? Et si oui dans quelles directions la chercher ? Comment une telle situation met-elle en jeu les connaissances de l'élève ? et celles du professeur ?

---

[4] En abrégé APM.

Ce sont quelques unes des questions qui sont à l'origine de cette recherche. Pour l'entreprendre nous nous sommes placée dans le cadre de la théorie des situations de Guy Brousseau, tout en ayant recours, lorsque cela nous a paru utile, à la théorie de l'anthropologie didactique d'Y. Chevallard.

II. L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT SUPŽRIEUR

II.1 CONTRATS DIDACTIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

II.1.1 Formalisme et transposition didactique

Les contenus mathématiques de l'enseignement supérieur sont amenés à être la référence « savante » pour notre étude, qui porte essentiellement sur l'enseignement des premiers concepts de l'analyse. Ceci n'implique pas que ce soit une référence aveugle : il s'agit de la questionner, d'un point de vue épistémologique et didactique.

Par ailleurs l'enseignement des premières années de l'université constitue une référence pour l'enseignement secondaire ; lors des allées et venues des définitions des concepts au lycée lors des dernières réformes, l'enseignement supérieur s'est positionné par rapport à ces évolutions. En effet l'université et les classes préparatoires se sont toujours érigées en gardiennes de l'orthodoxie mathématique, ainsi qu'en juges après coup de la qualité de la formation dans l'enseignement secondaire, ce qui est conforme à leur rôle institutionnel ; à ce titre les aléas des notions d'analyse au lycée ne peuvent être vues au niveau supérieur que comme des aberrations. Citons G.Brousseau :

> "... supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles (...) il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux ou inadéquat."
>
> : " Même si (le) savoir enseigné au cours d'une première étape est nécessaire pour aborder une étape ultérieure, l'enseignant doit s'attendre à se voir reprocher les erreurs ainsi tolérées ou suscitées. Les reproches viendront aussi bien de ses élèves que des professeurs des niveaux supérieurs, à moins qu'une tradition ou qu'une négociation culturelle ne le disculpent.
>
> Dans l'hypothèse envisagée, il existe une alternative : le professeur renonce à l'enseignement par adaptation : il enseigne directement un savoir conforme aux exigences scientifiques. Mais alors cette hypothèse implique qu'il doit renoncer à donner un sens à ce savoir et à l'obtenir comme réponse à des situations d'adaptation parce qu'alors les élèves le coloreront de significations fausses." (Brousseau, 1986, p.67).

De plus la position de l'université par rapport au savoir enseigné dans l'enseignement secondaire s'autorise d'un point de vue, qui est qu'il n'y aurait qu'un savoir possible, les manifestations et l'organisation du savoir étant déterminées par celui-ci de façon tout aussi univoque. Remarquons que les universitaires ne font ainsi que « translater » à l'enseignement secondaire une conviction qui est assez partagée dans leur milieu, qui est d'affirmer l'inexistence de la transposition didactique au niveau des études supérieures.

Etant chercheur en didactique des mathématiques, nous ne pouvons faire autrement que de partir d'un présupposé, c'est que les objets de l'analyse, son contenu, tant au niveau mathématique qu'au niveau didactique, ne sont pas aussi évidents, aussi transparents, qu'on pourrait le croire à la lecture de certains ouvrages. Nous n'avons aucune raison de penser qu'une grâce spéciale (due à la puissance du formalisme) pourrait mettre l'enseignement universitaire à l'abri de la transposition didactique (cf. Chevallard, 1991, postface). S'il est clair que certaines notions font consensus parmi les mathématiciens, il semble que c'est plutôt du point de vue de leur opérationnalité que du point de vue épistémologique. Nul ne songe à nier l'utilité des intégrales ou des séries ; cependant on trouve, en particulier dans le préambule des manuels universitaires, des commentaires destinés aux étudiants sur la nécessité, pour bien utiliser les concepts, d'en saisir le **sens** au delà de leur définition formelle et de leur diversité parfois déroutante.

Citons par exemple Paul Deheuvels, 'Mathématiques : l'intégrale', PUF, 1980 : P.Deheuvels souhaite dans cet ouvrage faire mieux comprendre les théories de l'intégration aux étudiants qui, dit-il, « au hasard de leurs études, devront apprendre quatre ou cinq théories auxquelles, le plus souvent, ils finiront par ne plus comprendre grand chose ». P.Deheuvels fait allusion à l'intégrale de Riemann apprise en Deug, puis la mesure de Radon en maîtrise, pour un probabiliste la théorie de la mesure sur un espace abstrait, et pour un ingénieur les séries de Fourier et le calcul numérique des intégrales.

Dans un ouvrage plus récent, destiné aux étudiants à partir de la première année d'université, (Jacques Labelle et Armel Mercier, « Introduction à l'analyse moderne » Montréal 1993, Modulo éd.) les auteurs assignent à leur travail « un objectif principal : faire vraiment comprendre le sens de l'analyse ».

Jean Dieudonné, quant à lui, fustige, dans la préface de « Calcul infinitésimal » (Hermann, Paris, 1980 ; réédité 1997) à la fois les universitaires partisans du formalisme à outrance en premier cycle d'études scientifiques, par exemple au sujet des intégrales multiples (« j'ai dit ailleurs ce que je pensais de la 'Stokomanie' de certains de mes collègues ») et l'archaïsme de l'enseignement secondaire :

> « Il n'est pas interdit d'espérer qu'un jour l'enseignement secondaire remisera au grenier de l'histoire les mathématiques fossiles qui font actuellement ses délices, et que le temps ainsi gagné pourra profitablement être utilisé pour faire passer dans les trois dernières années du lycée une bonne partie de ce qui est enseigné actuellement en première année du premier cycle. »

Ici une autre position est soutenue que celle de l'inexistence de la transposition didactique : c'est que la transposition didactique du secondaire ne peut être que mauvaise, inadaptée (cf. Brousseau ci-dessus) ; et c'est du sein des mathématiques savantes elles-mêmes que Dieudonné s'autorise cette prise de position, qui est pourtant essentiellement **didactique**. Pour notre part, nous ne saurions considérer que le problème de la transposition didactique se règle aussi aisément même à l'université, et nous y ferons quelques incursions. D'ailleurs les problèmes rencontrés à l'heure actuelle dans l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année d'université laissent penser que les ambitions affichées par Dieudonné sont bien peu réalistes, lorsqu'il déclare dédier « Calcul infinitésimal » à la formation des étudiants de deuxième année ou de licence.

La position de Dieudonné (commune à d'autres mathématiciens) est de considérer que les mathématiques contiennent, de par leur essence même, de quoi régler les problèmes épistémologiques et didactiques. Cette vertu proviendrait de leur puissance logique et formelle. Ce positivisme mathématique a été largement battu en brèche par l'épistémologie du vingtième siècle (cf Chalmers 1982, Ullmo 1969, Roubaud 1997). De plus à quel niveau de formalisme devrait-on s'arrêter pour être sûr de la conformité au savoir savant ? le professeur d'université qui fait un dessin explicatif dans un cours est-il de facto sorti de la zone de tolérance ? On mesure bien l'inconsistance d'une telle approche.

D'autres scientifiques soutiennent d'ailleurs que si le mathématicien travaille avec du formalisme, celui-ci ne lui suffit pas toujours pour comprendre ce qu'il fait, ni à plus forte raison pour l'enseigner ; et que la question du réalisme en mathématiques ne peut être éludée. Or le problème du **sens** des mathématiques est lié à celui du réalisme, pour le mathématicien professionnel comme pour l'apprenti mathématicien. Dans le domaine qui nous intéresse, la question est d'autant plus brûlante que les objets de l'analyse sont prioritairement dans le champ de l'infini, de l'infiniment grand ou petit, ou du moins des techniques permettant de maîtriser l'infini, et qu'un réalisme primaire réduit aux quantités finies n'a aucune chance de trancher.

Comme le dit J.P. Delahaye :

> « Pratiquement tous les mathématiciens attribuent une forte objectivité aux nombres entiers (pris individuellement) et aux objets finis combinatoires comme les chaînes de caractères, les tableaux finis de nombres, les graphes...
>
> Ce réalisme finitiste sert de base au formalisme qui est 'l'idéologie' de recours de beaucoup de mathématiciens : refusant de considérer qu'il existe une réalité mathématique plus abstraite que la réalité finie, ou considérant que l'extension du réalisme aux objets infinis est dangereuse et incertaine, le réaliste finitiste propose de se limiter à l'univers évident des objets finis. Cette position est renforcée par le fait que, moyennant des conventions syntaxiques adéquates, toutes les démonstrations peuvent se ramener à des manipulations de symboles. Le sens réel d'un théorème sur les nombres complexes par exemple, n'est pas que telle ou telle propriété est vraie pour les objets dont parle le théorème, mais simplement qu'il est possible, à partir des axiomes et en respectant des règles de manipulation bien définies, de produire une certaine configuration de signes qui est l'énoncé du théorème. (...)
>
> Cependant, cette formalisation, l'ultime recours quand le mathématicien s'interroge sur la justesse d'une démonstration, n'épuise pas, c'est évident, le sens des théorèmes : aussi considère-t-on que le formalisme est une philosophie insuffisante des mathématiques et désire-t-on aller plus loin et passer à un réalisme moins limité incluant l'infini, en premier lieu l'infini des nombres entiers appelé infini dénombrable. » (Revue « Pour la science », n° 159, 1991)

Nous poserons donc comme première condition de ce travail, que le formalisme ne donnant pas de critère définitif, nous aurons à questionner la définition des objets de l'analyse qui est donnée à l'université, et les contrats qui régissent son enseignement.

II.1.2 Contrats didactiques dans les manuels universitaires

Les extraits de manuels cités ci-dessus (voir Annexe du chapitre 1) nous paraissent d'ailleurs attester de l'existence de ces contrats didactiques dans l'enseignement supérieur. Pour les analyser nous nous référons à la typologie de Guy Brousseau (Brousseau 1995).

Le manuel de J.Dieudonné relève alors d'un **contrat faiblement didactique** (c'est assez normalement le cas d'un manuel, qui n'est pas une action directe et contrôlable sur l'étudiant), ici un contrat **d'information dogmatique**. En effet ce contrat est défini par G.Brousseau comme celui où les preuves sont normalisées et fournies systématiquement :

> « Dans ce système le professeur se réfère à un système conventionnel supposé notoire, composé d'énoncés acceptés par tous, et utilise des moyens de dérivation réputés sans mystère pour proposer des démonstrations pour tous ses énoncés.
>
> Ce contrat conduit l'informateur à établir dans la théorie à diffuser, un des ordres axiomatiques auxquels elle se prête et à s'en servir comme guide d'ordonnancement de ses propos pour éviter des demandes d'explications. L'axiomatique répond ainsi à une contrainte ergonomique. (...) Le contrat d'information est celui qui a théoriquement cours dans la communauté mathématique

pour la diffusion des résultats. » (Brousseau 1995).

La dernière phrase s'accorde bien avec les ambitions de J.Dieudonné, qui souhaite explicitement que l'enseignement soit aussi proche que possible de la recherche mathématique (« abandonner les 'mathématiques fossiles' »). Cependant le contrat chez Dieudonné semble aussi faire une place quoique réduite à un autre contrat faiblement didactique, qui est le contrat **d'utilisation des connaissances**. En effet les démonstrations sont suivies d'exemples nombreux, en insistant à chaque fois sur l'efficacité des résultats prouvés, du point de vue du numérique et de l'approximation, que Dieudonné déclare d'ailleurs caractéristique de l'analyse.

Le livre d'analyse (4 tomes) de Laurent Schwartz présente lui aussi un contrat d'information dogmatique, mais sans contrat d'utilisation des connaissances : il ne comporte d'ailleurs pas de préface expliquant les intentions de l'auteur, ni commentaires internes justificatifs, ou exemples d'applications jugées particulièrement intéressantes. La quatrième de couverture présente l'ouvrage comme étant une somme de savoirs sur l'analyse, avec la caution inattaquable de M. Laurent Schwartz : le nom et la réputation de l'auteur suffisent à attester que le savoir est conforme au savoir mathématique savant.

Le manuel de P.Deheuvels sur l'intégration présente les mêmes caractéristiques que celui de J.Dieudonné : contrat d'information dogmatique avec des incursions dans un contrat d'utilisation des connaissances. Deheuvels déclare d'ailleurs souhaiter que son ouvrage puisse encore être 'concrètement utilisable en école d'ingénieurs.

Nous pouvons faire l'hypothèse que ce type de contrat est relativement fréquent dans l'enseignement supérieur, et qu'on le rencontre d'autant plus que le niveau d'enseignement est plus élevé : il est plus fréquent en maîtrise qu'en DEUG, et tend à devenir le contrat standard du mathématicien professionnel, conformément au souhait de Dieudonné.

Tout autre est le contrat qui transparaît dans le manuel de Labelle et Mercier : réservé plus strictement aux étudiants de premier cycle universitaire ; celui-ci s'appuie sur un contrat **d'initiation ou de contrôle** :

> « Dans les contrats précédents le récepteur devait décider s'il s'estimait suffisamment informé ou si au contraire il voulait davantage d'informations, ou des précisions supplémentaires sur celles qu'il avait reçues. Dans ce nouveau contrat l'informateur prend en charge une partie de cette responsabilité : il donne à l'informé un critère pour déterminer s'il a bien 'compris' (et pas seulement reçu) le savoir communiqué. Ce moyen consiste à établir une relation d'équivalence entre deux ensembles d'énoncés, le premier est un ensemble de savoirs communiqués comme tels (par exemple des énoncés d'une théorie), le second est proposé sous forme de questions, d'applications ou de problèmes à résoudre. En postulant l'équivalence informative des savoirs et des applications l'informateur dit à son informé :
>
> — d'une part que la connaissance des théorèmes sera 'prouvée' si le destinataire sait faire la totalité des problèmes proposés,
>
> — d'autre part que pour savoir résoudre tous ces problèmes, il suffit de savoir, et de bien utiliser tel ensemble de théorèmes.
>
> Ainsi l'initiateur montre quels savoirs 'se convertissent' en connaissances pour agir dans des situations déterminées, et quelles connaissances peuvent se convertir en quels savoirs. » (Brousseau 1995).

Dans les contrats faiblement didactiques, l'élève garde la responsabilité effective d'apprendre ou non, c'est-à-dire de faire ce qu'il veut (ce qu'il peut) de la communication reçue ; c'est pourquoi la différence entre les deux types de contrat, les manuels comme celui de Dieudonné ou comme celui de Labelle et Mercier, ne se marque pas dans les formes du discours mathématique (dans les deux types d'ouvrages on trouve de l'analyse 'formelle') mais dans le langage qui l'accompagne. Le manuel de Labelle et Mercier intervient sur le terrain des connaissances, ce qui se traduit par des 'exercices' mais aussi par un 'métalangage' comme : « faire comprendre le sens de l'analyse ».

Pour G.Brousseau, dans les deux cas, « L'ensemble constitue un moyen fictif mais formel d'instruction mis à la disposition de l'apprenant par l'enseignant. Cette fiction épistémologique fait d'ailleurs partie du savoir communiqué. » et plus loin : « Les contrats faiblement didactiques prennent en compte le projet de faire approprier un savoir par un interlocuteur, celui-ci étant pris en tant que sujet épistémique, mais non en tant que sujet effectif. » (Brousseau 1995).

En conclusion de ce paragraphe, nous relèverons donc que nous pouvons identifier deux types de contrat dans les manuels étudiés :

— un contrat d'information dogmatique, dont l'un des buts déclarés est d'amener les étudiants à un fonctionnement conforme à celui des mathématiciens professionnels ;

— un contrat d'initiation ou de contrôle, dont les objectifs sont plus orientés vers la compréhension des étudiants ; en ce sens il est plus proche d'un contrat type « secondaire ». Il en est également plus proche temporellement.

Ces deux contrats sont cependant des contrats **d'émission de savoir expert**.

II.1.3 La transposition didactique dans l'enseignement supérieur

Quant à la transposition didactique, il nous paraît clair qu'elle ne peut être niée dès lors que l'enseignement présente un concept accompagné d'une limitation du champ de problèmes afférents, accompagnée de création d'objets didactiques destinés aux étudiants ; or c'est manifestement le cas dans les manuels étudiés, de façon même clairement explicite puisque tous (sauf celui de L.Schwartz) prétendent sélectionner les problèmes « utiles » aux étudiants, afin d'éviter qu'ils ne se perdent dans le foisonnement des questions relatives à l'analyse ou que l'analyse permet de traiter. (L.Schwartz, lui, expose la somme des savoirs de l'analyse, déclarée comme telle, sans souci didactique autre que la cohérence de l'exposé.)

Il y a bien délimitation d'un champ d'objets de savoirs différents de ceux qui sont connus des mathématiciens professionnels, ce qui entraîne la création d'objets didactiques spécifiques, ne serait-ce qu'à titre d'exercices pour les étudiants.

Cependant les manuels de niveau maîtrise (Dieudonné, Deheuvels, Schwartz) proposent des sommes de savoirs qu'ils présentent comme correspondant à **l'état actuel du savoir**, en tout cas comme **texte du savoir fermé**. Le savoir transmis ici est désigné comme savoir mathématique actuel, avec indication éventuelle de son usage et de ses applications les plus courantes ou les plus utiles. C'est un discours qui s'autorise des **objets mathématiques** sur lesquels il travaille, et uniquement d'eux.

Pour cette raison, nous le prendrons comme référence du savoir déclaré sur l'analyse.

II.2. DU COTE DES INSTITUTIONS

Nous tentons donc ici une première interrogation sur la nature et les fonctions de l'analyse dans le champ des mathématiques de l'enseignement universitaire. Pour cette étude, nous nous situerons dans le cadre de la théorie d'Y.Chevallard, l'anthropologie didactique (cf Chevallard, 1988/89, 1992 ; 1995).

D'après Chevallard (Chevallard 1988/89), un objet O existe dans une institution I, à savoir l'enseignement supérieur, si une autre institution J est capable d'attester d'un rapport non vide de I à l'objet O, soit pour nous l'analyse. L'institution J est ici la communauté des mathématiciens, dont nous avons cité quelques écrits plus haut. La communauté des mathématiciens est en partie externe à l'institution I, au moins dans la mesure où tout le travail de cette communauté n'est pas réduit à l'enseignement, mais participe à la production de mathématiques : même si les personnes peuvent être les mêmes, les fonctions sont séparées. De plus un certain nombre de chercheurs en mathématiques sont au CNRS, donc hors du champ de l'enseignement.

Toujours d'après Chevallard (op cit.), l'institution I découpe dans le savoir S un savoir propre, qui est ensuite organisé en un **texte du savoir**. Ce savoir propre comprend des objets de savoirs qu'il nomme O^S , qui sont objets de relations (avec d'autres objets de savoir), d'associations (entre eux ou avec d'autres) ; étudier le savoir S consiste alors à déterminer l'habitat des objets O^S, c'est-à-dire les lieux où ils apparaissent, et leur niche écologique, c'est-à-dire la fonction et la structure des associations ou relations entre objets.

Cette manipulation d'objets de savoir s'exprime par des pratiques, dans différents registres sémiotiques ; pour Chevallard un objet est <u>émergent</u> parmi des pratiques. Ces pratiques, je les appellerai **pratiques mathématiciennes**, suivant en cela F.Conne (Conne 1996 ; voir chapitre 2).

Tenter de repérer l'analyse dans l'enseignement supérieur nous amène donc à examiner les objets de savoir « découpés » dans le savoir de l'analyse à tel ou tel niveau, ou pour tel ou tel projet ; à reconnaître les pratiques mathématiciennes attachées à ces objets, et les lieux et les occasions où elles se manifestent.

Remarquons que le fait même que l'institution J ait à établir le rapport de I à l'objet « analyse », et que l'établissement de ce rapport s'accompagne, comme nous l'avons dit, d'une **limitation** du champ de problèmes afférent à cet objet, témoigne de l'existence de la transposition didactique au niveau de l'enseignement supérieur. En effet les objets de savoir découpés, pour l'enseignement universitaire, dans le savoir de l'analyse, et les pratiques mathématiciennes qui s'y rapportent sont plus ou moins conformes à l'usage de ce même savoir par les mathématiciens professionnels ; la conformité peut se mesurer dans deux domaines :

— la **forme** de cette activité (le formalisme, l'usage d'un symbolisme idoine : c'est le seul critère retenu par J.Dieudonné, et implicitement par Schwartz) ;

— le **champ de problèmes** abordé.

On pourrait admettre que l'adéquation est d'autant meilleure que le niveau de l'enseignement est plus élevé ; ce n'est pas une prévision a priori de la théorie anthropologique, et c'est même contesté par exemple dans le domaine de la physique, si l'on en croit Jean-Marc Lévy-Leblond qui parle de « la vive désillusion » qui s'empare des « brillants étudiants » ayant appris « des savoirs acquis, réévalués, reformulés, maîtrisés », et qui doivent, en tant que chercheurs, « passer le plus clair de leur temps dans l'erreur ou l'incompréhension : la plupart des théories sont fausses ou sans pertinence, la plupart des expériences sont ratées ou inutilisables ». (J.M.LEVY-LEBLOND, interview au Syndicat National de l'Enseignement Secondaire, octobre 1997).

Il en est de même en mathématiques, où, du moins jusqu'au niveau de la maîtrise (bac + 4), l'étudiant apprend des énoncés de mathématiques parfaitement formalisés ; cela ne le rend capable, ni de résoudre effectivement les problèmes, même obsolètes, relatifs à la théorie dont les grands théorèmes lui sont exposés, ni d'engager la recherche sur des problèmes dont la solution n'est pas balisée. Ainsi un étudiant de 1970, ayant suivi une année durant le cours d'un professeur éminent, spécialiste de géométrie différentielle, tel que Marcel Berger, pouvait s'avérer incapable de résoudre effectivement un système différentiel assez simple, mais n'admettant pas de solution « exacte » connue.

L'adéquation est donc effectivement meilleure pour ce qui est du premier critère ; les différences peuvent par contre être marquantes par rapport au second ; tout verdict d'une institution sur une autre (tel celui porté par Dieudonné sur l'enseignement secondaire, cf supra) devrait, pour être valide, tenir compte des deux critères énoncés ci-dessus. A l'aune du deuxième critère, les mathématiques du premier cycle universitaire sont aussi fossiles que celles du secondaire, étant donné qu'elles se préoccupent d'un champ de problèmes résolu il y a fort longtemps : continuité et dérivabilité des fonctions de variable réelle, intégrale de Riemann... et qu'elles ne rendent pas les étudiants capables de faire *effectivement* des mathématiques dans un champ de problèmes contemporain pertinent.

Par ailleurs on ne saurait juger des pratiques mathématiciennes dans l'enseignement supérieur par les seuls indices relatifs aux activités de l'enseignant. Certains enseignants à l'université peuvent avoir tendance à professer un cours extrêmement théorique et formalisé, d'où peut-être leur prise de position niant la transposition didactique dans l'enseignement supérieur ; il serait hâtif d'en déduire que là est le « niveau » de cet enseignement. En effet *quelles mathématiques* les étudiants ayant suivi ce cours sont-ils capables de *faire* ? Il nous faudra considérer, pour notre étude, des outils adéquats à rendre compte de **l'activité mathématique** (étudiants et enseignants) dans l'enseignement supérieur.

Nous retenons donc plusieurs critères pour examiner la vie du savoir « analyse » à l'Université :

a) du côté du savoir :

— le texte du savoir et les objets de savoir ;

— les pratiques mathématiciennes ; dans cette rubrique nous pouvons compter aussi les **types de raisonnement** pratiqués en analyse ;

— le champ de problèmes.

b) du côté de l'enseigné :

— l'activité mathématique, c'est-à-dire les mathématiques que l'étudiant est apte à *faire* après avoir subi l'enseignement.

Nous examinerons dans le chapitre 3 comment s'articulent, dans l'enseignement secondaire, ces différentes composantes. Pour ce qui est de l'enseignement universitaire, nous commençons de repérer, ci-dessous, les pratiques mathématiciennes convoquées au début du cursus, et quelques objets de savoir de cet enseignement.

II.3. OBJETS EXPLICITES ET IMPLICITES DE L'ANALYSE

Nous tenterons, dans ce paragraphe, de pointer quelques objets de savoir de l'analyse, en insistant sur les évolutions que l'enseignement de ces objets peut avoir connu même dans une période récente. Une référence sera faite aux concepts de légitimité, culturelle et épistémologique, introduits par Bosch et Nin (Actes de la VIème école d'été, 1991) tels qu'ils figurent dans la thèse de G.Chauvat (Chauvat 1997).

II.3.1 Les bases de l'analyse : objets préalables

Les objets « préconstruits » à l'enseignement de l'analyse à l'université sont essentiellement les nombres réels et les fonctions.

Les fonctions sont introduites dès le collège, par le biais des fonctions linéaires (cependant les fonctions linéaires disparaissent dans les nouveaux programmes), et de façon généralisée en Seconde ; l'étude de l'enseignement des objets relatifs à la notion de fonction constitue une grande part de ce travail de thèse, on pourra se reporter aux chapitres suivants. On notera simplement que les fonctions, de par leur place dans les programmes à la fois de l'université et du secondaire, peuvent être créditées d'une très forte légitimité et pertinence épistémologique, et de surcroît d'une forte pertinence culturelle (les fonctions numériques comme « vitrine » de l'enseignement de l'analyse). Cependant leur introduction se fait, en classe de Seconde, par la notation f(x) et des exemples de fonctions comme correspondance terme à terme ; il peut sembler que cette introduction n'est guère propre à introduire ensuite l'analyse.

Pour ce qui est des réels, l'enseignement secondaire ne prévoit plus, depuis les programmes de 1982, de chapitre spécifique sur les nombres réels, que ce soit en classe de Quatrième (élèves de 14 ans) ou en Seconde (16 ans).

Quel est alors pour le professeur le statut des réels, supposés préconstruits, alors que nul enseignement n'est explicitement organisé sur cette notion : évidence culturelle ? implicite commode, fournisseur de contre-exemples et autres cas pathologiques, du moins jusqu'à la terminale des lycées ? Et à l'université, comment fonder l'enseignement du concept de limite sur la droite réelle, si les étudiants ne manipulent en fait que des décimaux ? Sur le rapport au savoir des élèves à l'objet « nombres réels », on consultera Digneau, 1989 ; Izorche, 1977 ; Margolinas, 1985, Bronner, 1997.

Ce que l'enseignement a peut-être aussi voulu évacuer, comme trop difficile à gérer, c'est le problème sous-jacent de l'infini, et des représentations de la droite réelle. Or l'analyse a réussi, historiquement, après une longue évolution, à décoller ses raisonnements de la description d'une représentation (cf chapitre 3). Il n'en reste pas moins que le concept de limite renvoie fortement à ces représentations (cf Robert, 1982 ; Cornu, 1992 ; Trouche, 1996, p.85 et suiv.). Un des buts de ce travail est de chercher à comprendre quels outils de validation, dans le travail fait en enseignant l'analyse, peuvent jouer le rôle de « garde-fous épistémologiques » afin que le savoir construit soit conforme aux exigences ultérieures de l'institution universitaire, et que les représentations puissent ne pas être l'outil privilégié de la validation.

II.3.2 Objets institutionnels prégnants

Toujours selon la classification de Bosch et Nin reprise par Chauvat (Chauvat 1997), il s'agit d'objets qui ont une forte légitimité épistémologique, ce qui fait qu'ils sont présents dans les contenus de l'enseignement sous une forme peu altérée depuis à peu près 30 ans. On peut y compter :

— les fonctions numériques, continuité, limites et dérivées, différentielle ;

—l'intégrale de Riemann, les primitives ; fonctions rationnelles et leurs primitives ; les fonctions logarithme et exponentielle ; les fonctions usuelles (sin, cos, sh, ch, tan, th, et réciproques...) ;

— fonctions convexes ;

— développements limités, formule de Taylor...

— séries numériques ;

— équations différentielles simples ;

— séries entières, séries de Fourier, problèmes de convergence ; fonctions analytiques ;

— espaces topologiques ;

— espaces vectoriels normés, formes différentielles...

Ceci au niveau des deux premières années d'université, avec des variantes, les universités fixant librement leur programme. Le concept central de l'analyse est bien sûr celui de **fonction**, des prémisses jusqu'au niveau avancé.

II.3.3 Objets marginaux

Certains objets ont un statut moins établi et plus fluctuant : l'exemple typique est celui des probabilités et des statistiques. Elles figurent au programme de certaines universités alors que d’autres ne les programment qu’en option. De plus la problématique d’enseignement des probabilités a évolué suivant les années d’un point de vue que nous appellerons « classique » (de type pragmatique, éventuellement sans les applications incluses) à un point de vue « moderne », c’est-à-dire en termes de théorie de la mesure. L’enseignement classique comporte :

— probabilités discrètes, lois usuelles (Bernoulli, binomiale, Poisson...) ; probabilité sur un espace continu, variable aléatoire, espérance, écart-type ; lois usuelles de probabilité (uniforme, normale, $\chi 2$, Student...) ; suites de variables aléatoires, loi des grands nombres, chaînes de Markov, tests ; l’enseignement des probabilités en termes de théorie de la mesure s’intéresse aux mesures abstraites, espaces L^p ...

Les fluctuations des contenus de l’enseignement peuvent être considérées comme un indice important de faible légitimité. Remarquons que dans le cas des probabilités, il s’agit d’une faible légitimité épistémologique, ainsi que d’une faible légitimité culturelle, mais pour des raisons différentes :

— leur **faible légitimité épistémologique** vient de ce que les probabilités et statistiques ont été longtemps considérées comme un champ disciplinaire ressortant de l’empirique : elles seraient des fréquences déguisées, et leur pratique serait avant tout expérimentale ;

— une raison de leur faible pertinence épistémologique est leur développement historique à l’écart du reste des mathématiques, avec un vocabulaire spécifique qui d’ailleurs constitue un obstacle à leur intégration dans le champ « ordinaire » de l’analyse (en bref, les probabilités ont besoin de l’analyse mais l’analyse, pendant longtemps, n’a pas eu besoin des probabilités) ; du fait de ce vocabulaire spécifique, les institutions chargées de valider les savoirs pouvaient tout aussi bien les ignorer ; les instances, tels que section scientifique au CNU, ne comptant pas forcément, il fut un temps, de spécialistes de ce champ de recherches bien spécifique, c’est tout le travail fourni dans cette branche qui put être sous-estimé ou péjoré pendant un durée plus ou moins variable ;

— leur **faible légitimité culturelle** vient aussi, paradoxalement, de leur ancrage dans le quotidien et l’empirique : les graphiques et statistiques figurant quotidiennement dans les journaux, les jeux de hasard sont très médiatisés, mais il n’est pas reconnu de compétence ou de savoir spécifique pour traiter de problèmes si évidents ; le savoir sous-jacent au traitement des informations en termes de statistiques ou de probabilités n’est aucunement un savoir de prestige, c’est un labeur obscur que la société ignore ou considère comme évident. Le slogan du loto : « cent pour cent des gagnants ont tenté leur chance » est supposé « décodable » par tous, bien que de fait il n’en soit rien! (comme le prouvent quelques expériences de caméra cachée...)

— les statistiques ont retrouvé dynamisme et intérêt par les progrès accomplis dans le traitement de l’information (analyse des données) en liaison avec le développement des moyens de calcul : mais c’est pour beaucoup au service des sciences humaines, c’est-à-dire dans un domaine que la plupart des mathématiciens ignorent. Donc cette forte pertinence épistémologique pour une institution utilisatrice ne s’accompagne pas d’une égale pertinence épistémologique dans l’institution productrice.

A notre sens on peut considérer que l’invasion de l’enseignement des probabilités par la théorie de la mesure, durant les années 70, était une tentative de restaurer la légitimité épistémologique des probabilités, en inscrivant celles-ci dans un courant radical de modernisme mathématique (au détriment cependant de leur lisibilité pour d’autres institutions).

II.3.4 Raisonnements et formalisme

Les professeurs de classe préparatoire ou de DEUG, interrogés sur l'enseignement de l'analyse, mettent tous l'accent sur le nouveau mode de raisonnement que celle-ci suppose, lié au formalisme et à la rigueur : le raisonnement sur les limites, par ε et α, semble bien constituer le paradigme du raisonnement de l'analyse classique, et il est vu à la fois comme une initiation aux « vraies » mathématiques, et comme un obstacle qui empêche l'étudiant de « voir le sens » de ces mathématiques.

Ce qui est certain, c'est que l'entrée à l'université et l'enseignement de l'analyse constitue une rupture avec le raisonnement algébrique : on ne démontre plus que a = c car a = b et b = c, mais parce que $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$. Un des points importants de notre travail sera l'étude du raisonnement en analyse et des questions que cela soulève du point de vue de son enseignement.

Comment ce formalisme est-il justifié pour les étudiants ? ne peuvent-ils pas l'interpréter comme une contrainte inutile si ce n'est en termes de contrat ? Dans ce cas le formalisme risque d'être la première connaissance qui s'effondre lorsque l'étudiant est placé dans une situation qui le met en difficulté. Or le formalisme est vu par les professeurs, et par l'institution, d'une part comme une garantie de **validation** par l'étudiant de ses résultats, d'autre part comme le laissez-passer pour la poursuite de ses études universitaires.

D'autres types d'enseignement ont pu être tentés : remarquons qu'en ce cas ce sont les procédures de validation qui sont modifiées (cf Artigue, 1983 et GRECO, 1989). Par exemple les critères de validation deviennent des critères graphiques. Par contre, dans l'exemple que nous avions donné en DEA (Bloch, 1995 : l'exemple est celui du DEA de F.Praslon, Paris 1993) l'enseignement reposait sur un renforcement de la validation formelle : malgré la tentative de « discours méta », il n'apparaissait pas de changement significatif dans le type d'objets de savoirs donnés à étudier, ni dans les procédures et résultats des étudiants.

Il semble bien qu'on voie apparaître le rôle fondamental des formes prises par la validation dans l'enseignement de l'analyse. C'était déjà l'une des conclusions retenues en DEA, et c'est un point crucial de ce travail de thèse.

II.3.5 Champ de problèmes

Quel est le champ des problèmes de l'analyse ? Ce champ de problèmes est-il pertinent ? est-il indiscutable (fait-il consensus) ? les probabilités, comme nous l'avons signalé, n'y figurent pas ; or elles ont une grande importance pour d'autres champs disciplinaires, et elles utilisent explicitement de nombreux concepts de l'analyse.

Quelle est la prise en compte des problèmes nouveaux ? (le « chaos déterministe », ou les systèmes dynamiques complexes par exemple). Est-ce qu'on enseigne l'analyse sur un champ de problèmes périmé comme le stigmatise Dieudonné ? au lycée, sans aucun doute ; mais est-ce qu'on pourrait faire autrement ?

L'enseignement de l'analyse à l'université ne semble pas se fonder sur une problématique, sauf à donner pour telle les exercices rituels de recherche de continuité, dérivabilité, somme de séries... Lorsqu'un enseignement en terme de résolution de problèmes est mis en oeuvre, on peut voir le formalisme retrouver tout son sens comme outil de validation (c'est le cas de l'enseignement de l'intégrale proposé par M.Legrand (Legrand, 1995)).

Les grands problèmes de l'analyse, ceux qui ont donné naissance à l'analyse moderne (les problèmes de convergence des séries, les problèmes de mesure,...) sont loin derrière les mathématiques actuelles ; celles-ci se sont réorganisées en fonction d'eux, mais en ne les faisant plus apparaître explicitement dans les exposés du texte du savoir. Faut-il, pour l'enseignement, réintroduire certaines de ces problématiques ?

Par ailleurs ces problèmes étaient souvent issus de problèmes physiques ; or tout savoir sur le modélisation est exclu de l'enseignement des mathématiques. La position prise par Legrand (Legrand, 1991 ; 1995) est que la modélisation est un moyen privilégié de retrouver une problématique pour l'enseignement de l'analyse. C'est un point qui mérite d'être examiné[5].

II.4. L'ANALYSE NON STANDARD

L'analyse non standard se présente parfois comme un support plus propre à l'introduction de l'analyse au niveau pré-universitaire, que la théorie classique : cette dernière présente un raisonnement contravariant (on part des conditions sur f(x) pour déterminer x), alors que l'ANS permet de raisonner de façon covariante. C'est la position adoptée par exemple par Lutz et alii (Lutz, Makhlouf, Meyer 1996) : remarquons qu'il n'y a pas eu, préalablement, d'étude de didactique justifiant que ce raisonnement contravariant est une des principales difficultés de l'analyse classique. Admettons-le cependant.

Il s'agit de créer, à partir d'une théorie, un instrument didactique pour introduire un champ des mathématiques dans l'enseignement. Du point de vue de la transposition didactique, c'est une création volontaire de système transposé, et non pas la dilution d'un savoir savant à des fins d'enseignement.

De ce point de vue on peut comparer cette création à celle qui est présentée dans la thèse d'Antoine Rossignol (Rossignol, 1996) : là encore il s'agit de construire un sous-système d'une théorie, ici la théorie des distributions, pour introduire de façon plus directement opérationnelle la résolution des équations différentielles à coefficients constants. La construction d'un ensemble intermédiaire A, muni d'un produit de convolution, conduit à un algorithme de résolution. (voir aussi IXème école d'été de didactique des mathématiques, atelier Antibi-Chauvat). Dans ce cas comme pour l'ANS, il est probable que l'institution de référence (les mathématiciens) refuse d'avaliser cette construction.

Dans le système proposé par Lutz et alii, on ne pourra bien sûr pas récupérer toute l'ANS, et justifier la construction des hyperréels ; mais on pourra fonctionner, en algébrisant l'analyse. Les choix faits sont fondés sur une transformation du répertoire avec lequel on parle des réels ; cette approche risque de poser quelques problèmes :

— si le langage utilisé ne peut être justifié, c'est donc qu'il est métaphorique : on va parler de réels « très proches », « très grands » ; ces vocables sont fondés sur des représentations et les induisent, or nous avons vu que l'un des buts du formalisme était de se dégager des représentations pour valider ;

— plus grave semble être le manque de problèmes sous-jacents à cette introduction : il s'agit d'une construction ostensive, tout comme par exemple le fait de présenter la construction de **R** par les coupures de Dedekind : quels problèmes justifient que l'on ait à s'intéresser aux réels très petits, très grands ; ou bien aux coupures ?

Concluons ce paragraphe en remarquant que, pour l'ANS comme pour l'entrée classique dans l'analyse, le parti-pris didactique est à chaque fois : les définitions d'abord. N'est-il donc pas possible d'introduire l'analyse par un champ de problèmes pertinent ? Reposons la question déjà posée par M.Legrand (Legrand 1991) et reprise dans (Bloch 1995) : **y a-t-il des situations fondamentales de l'analyse ?**

[5] Voir chapitre 3.

III. DIFFICULTES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Parmi les phénomènes qui ont attiré notre attention dans l'historique de l'enseignement de l'analyse, nous avons cité la variation importante des contenus des programmes. Cependant il existe d'autres « points sensibles » dans cet enseignement, ou des difficultés qui sont mises en évidence par le fonctionnement dans la classe de mathématiques ; ces difficultés ont été pointées par différents chercheurs en didactique ; nous tentons d'en donner quelques unes ci-dessous, et de poser quelques questions à leur sujet.

III.1. PROBLEMES LIES AU SAVOIR

III.1.1 Phénomènes de rupture

Des chercheurs ont étudié les ruptures entre arithmétique et algèbre (Chevallard, 1989), entre algèbre et analyse (Legrand, 1991). Ces ruptures :

— sont-elles de même nature ?

— sont-elles gérées didactiquement de la même façon, et sinon pourquoi ?

Y a-t-il une certaine continuité possible de l'arithmétique à l'algèbre (par exemple les types de raisonnement ne sont pas complètement étrangers) qui n'est pas possible quand on passe de l'algèbre à l'analyse ? on peut remarquer qu'en effet, en analyse, au lieu de raisonner sur un nombre, on raisonne souvent sur le voisin[6] et qu'à ce titre la complexité augmente.

III.1.2 Problèmes relatifs aux prérequis

Les notions d'analyse reposent au départ sur l'existence d'espaces topologiques, soit **R** pour l'analyse élémentaire. Or les programmes ont aussi bouleversé les différentes phases de l'apprentissage des nombres : les rationnels et les réels ont été étudiés en classe de Quatrième, dans les années 70 ; la construction de **R** ne figure plus qu'au programme de l'agrégation de mathématiques, après avoir tenu une place en première année d'université ou de classe préparatoire mais avoir disparu.

Dans quelle mesure les difficultés et déficiences des apprentissages antérieurs sur les nombres rejaillissent-ils sur l'enseignement de l'analyse ? En particulier l'absence de construction ou d'identification de **R**, en collège et au lycée, se ressentent-elles (sous forme de conceptions des élèves, d'obstacles didactiques) lors de la construction du concept de limite ? cf. Robert (1982) ; Margolinas (DEA 1985) ; Izorche (DEA, 1977) ; Digneau (1989) ; Bronner (1997) ; Spagnolo (1995).

D'autre part les questions de <u>nombres comme mesures</u> sont-elles prises en charge de façon progressive dans l'enseignement ? Cette conception du nombre, plus ou moins prédominante à l'école élémentaire, évolue-t-elle explicitement ou le rapport nombre/mesure devient-il relativement opaque au collège et au lycée, sans parler de l'université ?

[6] Voir chapitre 3.

III.2. PHENOMENES INSTITUTIONNELS

La grande variabilité des notions d'analyse contenus dans les programmes s'accompagne de phénomènes repérables dans le fonctionnement de la classe et de l'institution scolaire. Citons en quelques uns :

III.2.1 Difficulté d'existence stable

Les fluctuations des programmes et les réformes fréquentes n'induisent-elles pas une fragilité du champ de savoirs « analyse » dans l'institution scolaire ? En effet, pour que les enseignants construisent une transposition vivable des concepts, avec les activités qui y sont associées, une certaine stabilité est nécessaire : c'est un travail qui s'effectue sur plusieurs années.

En conséquence, peut-on s'attendre à une plus ou moins grande éradication de l'analyse dans les programmes du secondaire ? cette éventualité conduirait-elle à un équilibre vivable pour le système ?

III.2.2 Phénomènes de rupture : les fonctions

Il s'agit cette fois de ruptures entre cycles : par exemple entre le collège et le lycée, ou entre lycée et université. Ces transitions sont-elles gérées de façon cohérente ? La gestion s'appuie-t-elle sur les savoirs ou s'effectue-t-elle en termes de contrat ? citons ce que nous disions au sujet des fonctions (Bloch, 1995) :

« Fonction quelconque : une pseudo-définition

Dans le cours de mathématiques en Seconde on constate essentiellement, suivant en cela les manuels, une introduction des fonctions par une **définition formelle,** suivie de quelques exercices, en variant parfois un peu les cadres ; il faut remarquer que les programmes n'incitent, eux, pas à donner cette définition formelle ; elle est proscrite en Troisième, et n'est nullement recommandée en Seconde. On lit :

— "familiariser les élèves avec la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions" ;

— "acquérir une bonne maîtrise des fonctions usuelles". (c'est souligné dans le programme).

Mais on remarque dans la totalité des manuels, et dans la pratique des enseignants, une insistance à donner cette définition ; et ce n'est pas que le fait d'enseignants ayant connu le programme des années 70. Ainsi S., professeur-stagiaire en Seconde dans un lycée de la côte basque, après quelques activités d'introduction, annonce :

"définition : : une fonction f définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I, associe à chaque nombre de I un unique nombre noté f(x)."

Puis en remarque : "Qu'est-ce que c'est une fonction ?"

Effectivement le professeur a conscience de la faiblesse de cette "définition" qui dit ce que <u>fait</u> une fonction mais pas <u>ce que c'est</u>, et de sa vacuité pour les élèves, puisqu'on a besoin d'une remarque pour essayer encore de le dire...

Suite à la remarque prend place un petit dessin : deux "patates", l'une notée I, l'autre **R** , avec des flèches entre les deux (réminiscence de diagramme de Venn qui ne fait pas partie de la culture actuelle des élèves du secondaire) et enfin le professeur énonce : "c'est un <u>processus</u>".(?)

Dans le programme de Seconde l'enseignant passe très vite aux fonctions "de référence" x, x^2, vx, x^3, 1/x . Le but est que l'élève apprenne à "reconnaître" les représentations graphiques de ces fonctions, moyennant éventuellement une transformation simple du plan (translation, affinité...). Il n'y a là plus de souci formel.

Comment peut-on s'expliquer l'insistance mise par les manuels (et les enseignants) à formuler une définition d'une fonction quelconque, alors que le programme ne la sollicite pas ?

Quelle interprétation peut-on proposer de ce phénomène ?

— est-ce que la rupture collège / lycée semble l'exiger ? Les professeurs de mathématiques ne se sentent-ils pas en charge de gérer l'entrée des élèves dans les mathématiques abstraites ? On peut remarquer que cette entrée est gérée par des déclarations formelles, et non par des problèmes : elle n'est donc pas traitée dans le domaine mathématique, mais en **termes de contrat** : l'élève est prié d'avoir compris que les mathématiques du lycée ne sont plus celles du collège ; le positionnement des mathématiques par rapport au réel a changé, mais sans que l'élève en soit averti explicitement ; au collège il était supposé n'avoir pas quitté le réel, en lycée il n'y est plus du tout : dans les deux cas où est la modélisation ?

— dans ce cas pourquoi cette rupture se porte-t-elle sur la notion de fonction, c'est-à-dire sur l'enseignement des premiers concepts de l'analyse ?

- est-ce que cela pourrait concerner la géométrie ? en lycée la part consacrée à celle-ci diminue par rapport au collège où elle est majoritairement convoquée pour l'initiation au raisonnement ; ce n'est donc probablement pas un objet d'enseignement assez neuf ; de plus la part qui lui est réservée va aller en s'amenuisant encore en Première, sauf dans les sections scientifiques ;
- par contre les fonctions sont en Seconde un objet nouveau ; de plus l'étude des limites, des tableaux de variations, des représentations graphiques, constitue une part importante du programme des classes suivantes, du moins celles (S, ES et L avec option mathématiques) qui ont un enseignement mathématique significatif. »

Quant à la rupture lycée / université, nous constations (Bloch 1995) :

1) En ce qui concerne la continuité dans l'enseignement de l'analyse (lycée - université) on observe à ce propos (l'adaptation des élèves au savoir et les étapes de l'apprentissage) des phénomènes intéressants, particulièrement en ce qui concerne les fonctions (comme nous l'avons dit, les "vrais" problèmes d'analyse concernant les fonctions ne sont pas réellement traités dans le secondaire, en Première et Terminale). Il en résulte que les étudiants se retrouvent dans la situation décrite par G.Brousseau (Brousseau 1986), avec un savoir non seulement approximatif, mais aussi partiellement faux et inadéquat.

Certaines difficultés des étudiants de DEUG peuvent peut-être alors s'expliquer aussi par la rupture de contrat déjà évoquée. Le DEA de Frédéric Praslon (Paris, 1993) évoque les problèmes de l'enseignement de l'analyse en DEUG A : l'hypothèse faite étant que pour les concepts abordés il n'existe pas de bons problèmes (ce qui est une hypothèse de négation de la modélisation, et de négation d'un champ de situations fondamentales : l'analyse ne serait enseignable que par des <u>procédures</u>), une tentative est faite pour introduire un "discours méta" qui n'atteint pas vraiment son but, à savoir faire entrer les étudiants dans le champ de l'analyse. Dans les questionnaires, évaluations, rédactions de fiches de synthèse...proposés apparaît clairement la différence fondamentale avec le contrat institué en lycée. Nous pensons que cet exemple n'est pas unique, et F.Praslon énonce des difficultés assez généralement rencontrées en première année de DEUG.

Dans ce DEA, les problèmes rencontrés sont imputés entre autres à l'inefficacité de l'enseignement en lycée, qui enseignerait des techniques vides de sens alors que l'université tenterait de promouvoir un enseignement de <u>méthodes</u> significatives du sens du savoir visé.

Apparemment dans l'exemple ci-dessus le choix fait par l'enseignant est d'enseigner un savoir formel conforme aux exigences scientifiques, ce qui effectivement, comme prévu par la théorie des situations, n'a pas amélioré la pertinence des réponses données par les étudiants...

Ce qui nous parait par contre très intéressant, c'est que F.Praslon observe en DEUG une profonde rupture au niveau du jeu et des intentions :

a) à l'université les motivations du professeur restent cachées (en première c'est clairement la recherche de limites pour les suites, l'étude des variations et des branches infinies pour les fonctions) ;

b) l'irruption de théorèmes d'existence n'est pas comprise des étudiants ;

c) les problèmes de maîtrise de la technique sont envahissants.

Le point b) ci-dessus illustre bien la **rupture de contrat** : en lycée on ne manipule pas, ou peu, de suite ou de fonction dont on ne sait pas déterminer la limite : on ne travaille pas sur de l'indéterminé. C'est un degré de plus de l'entrée dans l'analyse que d'admettre qu'on peut dire des choses pertinentes sur du non-calculable ; c'est aussi le but de l'analyse. »

Les problèmes des programmes sont reflétés dans les manuels, et la rédaction des dits programmes rend très difficile d'appuyer l'enseignement des premières notions de l'analyse sur un milieu pour la validation : ce point sera détaillé au chapitre 3.

III.2.3 Méthodes de l'enseignement

a) Les manuels actuels de la classe de Première organisent une présentation ostensive de la notion de limite : ostension graphique ou ostension numérique (voir chapitre 3). Le recours à l'ostension massive est-il induit par la structure des programmes et l'absence de définition des concepts ? ou bien y a t-il des alternatives possibles ?

b) Quels sont à ce niveau les assujettissements des professeurs ? sont-ils capables de contrôler le discours qu'ils tiennent en classe, ou ont-ils du mal à assurer la transposition ? dans sa thèse (El Bouazzaoui, 1988) H. El Bouazzaoui donne des exemples de la deuxième alternative : dans ce cas, est-ce le contenu du programme et des manuels, qui exerce une contrainte suffisamment forte pour déposséder le professeur du recours à un autre niveau de conceptualisation ? on peut se demander si le professeur ne fonctionne pas, dans certaines situations, comme l'élève : au lieu de chercher une validation théorique, il se laisse influencer par le niveau du problème posé et surtout la forme sous laquelle il est posé, et répond par recours à des représentations empiriques plutôt que par validation théorique.

c) Du point de vue de l'élève, des études (Antibi, 1988) ont mis en évidence la stabilité des erreurs et des conceptions, de la classe de Première à la préparation au concours de professeur de mathématiques, ce qui révèle une certaine difficulté à maîtriser des concepts de l'analyse, même à un niveau élevé d'études (4 ans après le baccalauréat). Les critères de preuve et de résolution de problèmes, introduits en analyse, le sont ils à un moment approprié de la scolarité ? et si oui comment expliquer cette permanence dans la difficulté de leur utilisation ? ou bien est-ce le même effet que celui pointé ci-dessus ?

III.3 INTRODUCTION A LA DIDACTIQUE DE L'ANALYSE

Nous nous proposons d'étudier tout particulièrement l'enseignement en lycée des premiers concepts de l'analyse, c'est-à-dire l'introduction des fonctions « quelconques » et des limites (classes de Première et Terminale au lycée).

III.3.1 Questions sur l'organisation de l'enseignement secondaire

On peut poser un certain nombre de questions sur la façon dont s'organise l'enseignement du début de l'analyse, avec les contraintes actuelles des programmes :

- Quel est le milieu choisi pour l'enseignement de l'analyse ? comment est-il organisé ?
- Quel est le champ de problèmes qui donne accès à l'analyse dans l'enseignement ? ce champ de problèmes est-il stable ? est-il relayé, par exemple en physique ?
- Quelle forme prend l'enseignement concernant la validation en analyse ? est-il concomitant avec l'introduction des concepts (limites, dérivées...) ou non ?
- Dans l'entrée dans le champ de l'analyse, comment s'organise le contrat didactique ? qu'est-ce qui est à la charge de l'élève ? les éléments concernant la validation font-ils partie de ce que l'élève est invité à prendre en charge ?
- En référence aux sujets d'examen évoqués plus haut : l'enseignement donné est-il un réel enseignement de l'analyse ou l'enseignement d'une heuristique de résolution de problèmes ?
- Et qu'est-ce qu'un « réel enseignement de l'analyse » ? Comment est-on bien sûr que c'est l'analyse qui est enseignée et apprise ?

Ces questions, déjà à la base de notre travail de DEA (Bloch, 1995), nous avaient amenée à tenter de définir la spécificité de l'analyse, comme théorie et dans la pratique de son enseignement. Citons ce qui était dit de cet enseignement :

> 1. « le manque de cohérence et de théorisation dans l'enseignement des nombres, au collège puis au lycée, contribue à rendre très fragiles les bases de l'enseignement de l'analyse : la question est ici celle de l'articulation des connaissances et des savoirs ; et du rapport différent au savoir en collège et en lycée ;
> 2. la façon dont est gérée la rupture collège / lycée n'autorise pas la transition savoirs empiriques / savoirs scientifiques ; induit-t-elle l'échec dans l'enseignement de l'analyse, parce qu'elle porte sur un point clé de l'entrée dans ce champ de savoirs ?
> 3. **la réorganisation du système spécifique de preuves , lorsqu'on travaille en analyse, devrait être un point travaillé explicitement lorsqu'on cherche une situation fondamentale** ;
> 4. ce savoir relatif aux moyens spécifiques de preuves en analyse peut-il suffire à donner aux élèves un outil de **contrôle des processus infinis** ? (cf. Berthelot , 1983 p.60)
> 5. la modélisation en analyse nous parait de nature différente de ce qui se produit avec les nombres réels, ou la géométrie : dans ces deux cas il y a naturalisation abusive (ou peut-être faudrait-il dire mathématisation abusive au contraire du "milieu ambiant" qui se "lit en termes mathématiques"), alors qu'en analyse le savoir mathématique semble complètement déconnecté du "réel".
>
> Pour nous l'analyse, y compris son système spécifique de preuve, constitue une **théorie mathématique**, et le système didactique choisit, pour des raisons historiques, culturelles, probablement aussi sociologiques, complexes, de relier ou non, dans l'enseignement, une théorie et les phénomènes de mathématisation du réel dont elle est issue. »

Et plus loin, nous étions amenée à définir le **Système de Preuve de l'Analyse**, **le SPA**, comme objet d'étude pertinent de cette recherche. Le SPA sera étudié au chapitre 3.

Regardons cependant dès à présent ce qu'il en est des objets manipulés dans l'institution « enseignement secondaire », du rapport au savoir que les élèves sont susceptibles de développer, et du champ de problèmes concerné.

III. 3.2 Rapport au savoir de l'analyse : rapport fictif, rapport effectif

La question posée : « Les élèves font-ils bien de l'analyse ? » peut s'exprimer à l'aide du concept, introduit par D.Fregona, de rapport effectif au savoir.

Pour Fregona, un rapport effectif au savoir ne peut se produire que dans un milieu spécifique du savoir visé : c'est bien ce que nous affirmons aussi, et nous cherchons à pouvoir attester de cette spécificité. Fregona déclare en effet (Fregona 1995, p.62) :

> « Nous distinguons deux types d'interaction d'un sujet avec son milieu : des *interactions effectives* et des *interactions fictives*. (...) L'interaction que nous appelons *effective* est celle qui ne dépend pas entièrement de l'acteur. Il reçoit de l'extérieur des sanctions non prévues de sa part. Le contrôle de ses actions est assumé, en partie, par un système extérieur.
> Ce type d'interaction peut avoir lieu dans une situation d'action, ou de formulation, ou de validation. Le caractère « effectif » est lié au rapport plutôt qu'au type d'éléments d'un milieu. **Le rapport est effectif quand il entraîne une confrontation avec un certain domaine, soit le micro-espace, soit le langage, soit une théorie. »** (C'est nous qui soulignons cette dernière phrase)

Autrement dit, il pourra être attesté de l'effectivité du rapport au savoir introduit par une situation d'enseignement, si l'on dispose de critères pour savoir si cette situation entraîne bien une confrontation avec la théorie de l'analyse. Une question importante est alors de déterminer les **éléments pertinents** de la théorie auxquels la confrontation doit être organisée par la situation.[7]

Dans le milieu que l'on suppose organisé pour faire rencontrer à l'élève le savoir de l'analyse, le travail peut être interprété selon le modèle d'une activité mathématique, donnant lieu à des pratiques mathématiciennes[8]. C'est pourquoi nous posons la définition ci-dessous :

Définition : en tenant compte de la classification ci-dessus (activité, pratiques), nous dirons qu'un rapport au savoir de l'analyse est **effectif,** si :

— le milieu organise bien une confrontation avec la théorie de l'analyse (à travers ses pratiques et son langage), tout au moins du niveau que nous avons pris, au chapitre 1, comme référence de cette théorie (Schwartz, Dieudonné) ;

— le sujet observé est amené à user, dans son activité, de pratiques mathématiciennes relevant de la théorie de l'analyse.

III. 3.3 Objets de l'analyse dans l'enseignement secondaire : objets sensibles

Reprenons, en les spécifiant pour l'analyse, les notions introduites par Chevallard (Chevallard 1988b) et reprises par Mercier (Mercier 1998). En effet le problème qui se pose à nous est de pouvoir attester, ou non, de la « présence » d'éléments significatifs d'une théorie dans l'activité mathématique des élèves et du professeur, à un certain niveau du cursus scolaire ; pour ce faire, nous pouvons considérer les objets ***sensibles*** de l'enseignement qui nous occupe, et tenter de préciser dans quelle mesure ces objets, sur lesquels porte l'enseignement, sont bien reliés à la théorie de l'analyse, et de quelle façon, dans la situation proposée. Etant donnée la définition de ce qu'est l'analyse, nous devons préciser le rapport institutionnel du secondaire aux objets d'enseignement, et examiner si le rapport ultérieur à ces objets devient bien un rapport idoine pour l'institution « enseignement supérieur ».

Les objets sensibles de l'enseignement de l'analyse, au niveau secondaire, sont les fonctions, les suites, les limites de suites et de fonctions, les dérivées, et les intégrales. On peut ajouter quelques objets « dérivés » des précédents, comme les équations différentielles. Les fonctions linéaires et affines, par contre, ne font plus partie des objets sensibles ; elles font partie des objets pour lesquels un rapport idoine est demandé (savoir tracer la droite,

[7] C'est l'objet du chapitre 3.
[8] cf. Conne, 1996.

savoir trouver le coefficient directeur, savoir dire si un point donné appartient ou non à la droite…).

Pour un objet sensible de l'enseignement secondaire, à l'étape où nous le considérons (Première et Terminale scientifiques) :

— le rapport à cet objet, pour les élèves, peut être ***adéquat*** (le jugement d'adéquation concerne la conformité du point de vue de l'institution) sans être ***effectif*** : en effet le jugement « effectif » concerne, lui, la théorie ; or celle-ci peut tout à fait être absente d'un rapport institutionnel ;

— on peut penser qu'un rapport effectif au niveau n, conduit, lorsque l'objet devient forclos au niveau n+1, à l'émergence d'un rapport idoine (cependant ce n'est pas garanti, supposons-le toutefois faute de preuve du contraire) ; cependant est-ce une condition nécessaire, autrement dit, un élève peut-il entretenir, au niveau n, un rapport idoine à un objet forclos (mais pertinent) s'il n'a pas entretenu, au niveau n-1, un rapport effectif ? Le cas le plus favorable est évidemment celui où l'institution du niveau n-1 a elle-même fixé un rapport effectif à l'objet considéré : en effet dans ce cas, le rapport institutionnel effectif du niveau n-1 peut assurer que les connaissances construites à ce niveau permettront de manifester un rapport idoine au niveau n.

Cependant si l'institution « enseignement secondaire » n'organise pas un rapport effectif aux objets sensibles (fonctions et limites), et si le rapport ultérieur à ces objets s'avère non idoine pour l'institution située en aval, cela pourra donner lieu à des phénomènes (inadéquation de connaissances par exemple) qui seront visibles dans l'institution aval, et que nous pourrons étudier.

L'un des objectifs de cette thèse est en outre d'étudier la possibilité de construction d'un milieu qui permette ce rapport effectif, c'est-à-dire d'une alternative à l'organisation classique de l'enseignement secondaire. Afin d'envisager la construction de ce milieu il est souhaitable d'avoir précisé, non seulement sur quels objets, mais aussi sur quel **champ de problèmes** s'exerce l'activité mathématique.

Le paragraphe IV est donc consacré aux objets et champs de problèmes de l'analyse dans l'institution « enseignement secondaire » ; dans ce paragraphe est fait l'inventaire du champ de problèmes disponible pour l'enseignement de l'analyse dans le secondaire, et de son évolution depuis 1962.

III. 3.4 Les objets de l'analyse dans l'enseignement secondaire : objets de l'activité mathématique

Conformément à Conne (Conne 1996 & 1997b) considérons les objets mathématiques étudiés comme le **résultat** de l'activité mathématique : « les objets sont objets de pensée, il s'ensuit que ce qui est objet pour l'un ne le sera pas pour tel autre, ou alors le sera mais peut-être tout autrement. »

Prenons l'exemple d'une formule algébrique y = f(x) : ce qui est une équation de la courbe représentative d'une fonction pour l'un (le professeur) sera peut-être une « chose » pour l'autre (l'élève) : une écriture sans signification, ou bien sera une sorte d'étiquette nommant la fonction et pas une condition reliant y et x, ainsi que le signale M.Schneider .

Il en résulte que nous considérerons les objets mathématiques comme construits par l'activité du couple enseignant/enseigné dans le milieu, et non pas pré-existants : ces objets deviennent donc des produits de cette activité, ils sont le support de la conversion connaissance / savoir à l'issue de cette activité (cf Rouchier 1991).

Cependant si l'on veut s'assurer que l'activité professeur / élève est bien **mathématique**, le travail dans la classe va rencontrer, à un moment donné, les objets de pensée des mathématiciens, qui pour le professeur et l'élève sont du côté des savoirs institués - inconnus pour l'élève, mais connus pour le professeur, du « savoir déjà-là »selon

A.Rouchier (Rouchier 1991, p.27).

Cette rencontre pourra se faire si l'ensemble des objets de pensée, issus de l'activité dans la classe, et l'ensemble des objets de l'activité des mathématiciens, sont d'intersection non vide - autrement dit si l'activité du couple enseignant /enseigné a débouché sur des savoirs (pas forcément des savoirs institués, mais des connaissances utiles) **reconnaissables** par les savoirs institués de référence - on pourrait peut-être dire aussi **utilisables** par ces mêmes savoirs (utilisables par exemple pour engager l'élève - et l'enseignant - dans la poursuite de leur activité mathématique).

Une autre condition pour que cette rencontre puisse avoir lieu est que les symboles utilisés dans l'activité mathématique donnent lieu à un travail dans la situation ; travail qui permette justement que les signes utilisés, les *ostensifs* du travail mathématique, puissent prendre petit à petit, pour le professeur et pour l'élève, des significations concordantes : que ces ostensifs puissent renvoyer à des concepts qui soient bien ceux des mathématiciens.

Il en résulte qu'il y a nécessité de distinguer deux sortes d'objets mathématiques, en jeu dans le travail de la classe :

— les objets de pensée construits par l'activité mathématique dans cette même classe ;

— les objets mathématiques pré-existants à cette activité ; l'enseignant connaît certains de ces derniers, qui sont donc repérables seulement (ou surtout) **dans les connaissances de l'enseignant**.

Les objets du travail mathématique dans la classe, peuvent bien évidemment être des objets sensibles, et faire l'objet d'un rapport (fictif ou effectif) aux savoirs de l'analyse. Les chapitres 2, 3 et 4 essaient de préciser, relativement à cette problématique, le rôle de l'enseignant, les conditions de rapport effectif à la validation en analyse, et les ostensifs utilisés avec leurs potentialités et leurs limitations.

III.3.5 Enjeux de l'introduction de l'analyse : lien enseignement secondaire / université

Par ailleurs nous avions cherché à identifier les enjeux de l'enseignement de l'analyse ; il est intéressant de se demander si l'organisation actuelle de l'enseignement secondaire est compatible avec les enjeux et les objectifs déclarés de l'enseignement supérieur. En effet le choix de l'université parait bien être de privilégier le « tout formel » ; et on pourrait concevoir que l'introduction de l'analyse se fasse seulement en DEUG, et de cette façon formelle. Mais des notions préalables à celles de l'analyse (nombres, fonctions) existent dans l'enseignement secondaire, et il est difficile d'envisager que coexistent, à deux niveaux proches de l'enseignement, des savoirs et des pratiques trop contradictoires, sans que cela ne provoque de problèmes institutionnels. C'est pourquoi il était signalé, pour l'enseignement de l'analyse dans le secondaire, quelques points qui paraissent être des enjeux de la construction du savoir relatif à l'analyse :

1. « permettre une initiation au système de preuve de l'analyse à travers des problèmes qui lui donnent du sens ;
2. discriminer le domaine de l'algèbre du domaine de l'analyse, expliciter les articulations entre ces deux champs de savoir ;
3. permettre d'envisager les concepts de l'analyse d'une façon moins rituelle et stéréotypée ;
4. faciliter la transition lycée/université. » (Bloch, 1995, p.70)

Il faudra évaluer si l'enseignement traditionnel permet d'atteindre ces objectifs, et si l'approche de l'enseignement de l'analyse par la théorie des situations, proposée dans le présent travail, est mieux adaptée à la construction de situations d'enseignement assurant la transition secondaire / supérieur ; et si elle permet de rendre compte des phénomènes qui se manifestent dans l'enseignement institutionnel.

III.4 OBJETS MATHEMATIQUES ET CHAMP DE PROBLEMES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Nous avions annoncé une triple entrée dans l'analyse par les objets, les systèmes de preuve, le champs de problèmes. Si nous avons choisi ce découpage, c'est qu'il peut, nous semble-t-il, permettre d'aborder l'enseignement d'une théorie en analysant plus finement le **contenu** de cet enseignement, au niveau d'un programme par exemple. Prenons l'exemple du dénombrement : si l'on se réfère aux travaux de Grenier, (Grenier 1995) il est clair que l'enseignement du « dénombrement »(peut-être devrions-nous dire d'éléments de la théorie du dénombrement) souffre de certaines « carences ", au sens du rapport au savoir de la théorie des mathématiques discrètes, mais que ces carences ne se portent pas également sur TOUS les points cités dans le découpage ci-dessus. Il y a, présents dans cet enseignement, des objets reconnaissables dans la théorie (les savoirs institués) du dénombrement ; il y a également des problèmes de dénombrement fini ; par contre, comme nous le signalions au chapitre 1, ce qui semble manquer serait plutôt du côté des raisonnements spécifiques de la théorie. Autrement dit la transposition didactique n'a pas eu les mêmes effets sur toutes les composantes du savoir, en gardant certaines, en éliminant ou modifiant d'autres, ce qui ne saurait nous étonner. Il apparaît donc bien pertinent, du point de vue de l'analyse d'un contenu d'enseignement, de différencier les éléments présents dans ce contenu.

Pour prendre l'exemple de l'analyse, si l'on regarde les objets (au sens strict, c'est-à-dire les notions) enseignées en classe de Première scientifique, les dérivées par exemple y figurent sans changement depuis une vingtaine d'années. Par contre, entre la définition formelle, les encadrements par fonctions de référence, ou l'approche actuelle de type intuitif, tout le monde s'accorde sur le fait que les évolutions ont été considérables des années 70 à l'époque actuelle. Il est donc clair que définir un contenu par la présence ou l'absence d'une notion est insuffisant.

On en revient alors aux situations, et il est vrai que rien ne rend mieux compte de l'enseignement que l'explicitation des situations qui y sont mises en oeuvre. Mais les situations sont fortement contraintes par le libellé des programmes, et par les outils du travail de la classe que ceux-ci autorisent : c'est à ce niveau que nous situons la nécessité d'une analyse en termes d'objets, de types de preuve et de champ de problèmes.

Cette approche se légitime aussi par les travaux sur l'écologie des savoirs. En effet ces recherches (Assude 1992, Bosch 1994 p.ex.) ont montré qu'un concept, placé dans un environnement « programme ", ne pouvait y vivre que s'il était relié convenablement à tout un réseau de concepts, accompagné de tâches, s'expliquant elles-mêmes par des techniques... Autrement dit l'objet « dérivée »en soi ne signifie rien ; quels sont les **moyens mathématiques** qui sont donnés en même temps que cet objet, pour agir dessus ? quels sont les **problèmes** que le programme autorise à se poser à propos des dérivées ? et quels sont les **moyens de validation** dont on dispose pour répondre à ces problèmes ? En termes de la théorie anthropologique, ces questions pourraient se reformuler ainsi : quels sont les ostensifs dont on dispose pour parler des fonctions ou des dérivées ? Ces ostensifs sont-ils bien adéquats ? (Permettent-ils un rapport convenable au savoir de l'analyse ; ce rapport pourra-t-il évoluer de façon idoine, dans la suite de la scolarité ?) Quel est l'environnement d'une notion comme celle de dérivée ? Quelle est sa niche écologique ?

Voici les questions auxquelles, nous semble-t-il, il nous faut répondre avant de construire (ou d'analyser) une situation permettant de travailler le concept de dérivée.

III. 4.1 Le champ de problèmes

Le champ de problèmes auquel nous sommes amenés à nous intéresser comporte nécessairement deux dimensions :

— le champ de problèmes qui a donné naissance à la théorie « analyse mathématique », dans ses différentes composantes, calcul différentiel et intégral par exemple ; et celui où elle s'exerce dans les mathématiques contemporaines, et qui lui donne son ampleur ;

— le champ de problèmes circonscrit dans l'enseignement, et qui est un produit (**des** produits, car il y a des champs de problèmes différents suivant bien sûr le niveau de l'enseignement, mais aussi l'époque à laquelle on s'intéresse) des contraintes de la transposition didactique.

Le premier, le champ de problèmes de l'analyse, est certes un produit de l'activité des mathématiciens analystes, et en ce sens il n'est pas non plus pré-existant dans l'absolu ; cependant, dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques que nous étudions il se situe du côté des **savoirs institués**.

a) Le champ de problèmes de la théorie

Il n'est certes pas question de l'explorer, même de façon sommaire. Il n'est pas interdit cependant de faire quelques remarques :

— les problèmes à l'origine de la théorie remontent fort loin dans l'histoire ; ils sont en général fortement reliés à des problèmes de physique complexes relevant de plusieurs domaines (cinématique, mécanique, diffusion de la chaleur, vibrations...) et qui ont trouvé leur formulation et leur solution, tout au moins dans le cadre de la science de l'époque, en même temps que se développaient grâce à eux les outils mathématiques ; il y a eu en quelque sorte développement dialectique entre les mathématiques (l'analyse) et la physique[9] ;

— les problèmes relevant du champ d'intervention de l'analyse se sont développés bien au delà des questions initiales ; il n'est actuellement peut-être pas un domaine des mathématiques qui n'ait recours aux techniques de l'analyse ou à ses éléments théoriques (concepts, théorèmes...).

Dans ces conditions, on pourrait s'attendre à ce que le champ de problèmes présent dans l'enseignement (secondaire et début du supérieur) soit, d'une part varié, et d'autre part, relié à la physique. Cependant nous savons bien, et s'il en était besoin nous pourrions en avoir ici une preuve supplémentaire, que les voies de la transposition didactique ne sont pas celles du savoir productif. Or l'organisation didactique qui a amené à l'actuel champ de problèmes visible dans l'enseignement n'a pu le faire qu'en amputant le champ de problèmes du savoir savant : ce sont donc des traces de ce champ originel que nous pouvons nous attendre à retrouver dans l'enseignement. D'autre part il pourra être intéressant d'étudier l'évolution de ce champ de problèmes de l'enseignement, depuis la période initiale que nous choisissons de considérer, à savoir les années soixante, jusqu'aux nouveaux programmes entrés en vigueur en septembre 1998.

b) Le champ de problèmes de l'analyse dans l'enseignement

Ce champ a effectivement connu des évolutions significatives de 1960 à nos jours. Nous pouvons identifier deux composantes de ce champ :

— une composante que nous appellerons interne : il s'agit des exercices et problèmes purement mathématiques proposés comme illustration, application, d'une notion ;

[9] cf. Dhombres, 1978.

— une composante que, par opposition avec la précédente, nous nommerons externe, et qui est constituée des applications dans d'autres domaines que les mathématiques (cinématique, physique, sciences économiques...).[10]

Résumons dans le tableau ci-dessous les principales caractéristiques de ces évolutions ; nous avons retenu les éléments les plus significatifs des programmes étudiés ; les applications de l'analyse, présentes dans les programmes, et qui ont disparu ensuite, ont été signalées en gras. Les applications nouvelles sont, quant à elles, repérées en italique et en gras.

Année	Niveau	Objets et applications ''internes''	Applications ''externes''
1962	Terminale C	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles et **irrationnelles**. Recherche de primitives ;calculs d'intégrales ; **étude de quelques équations fonctionnelles.** Equations, inéquations. **Calcul numérique : logarithmes.** **Etude de problèmes géométriques se traitant par l'introduction de fonctions.** Calcul d'aires. **Calcul de volumes.** **Etude de quelques courbes de l'espace (hélice).**	**Cinématique du point.**
1966	Terminale C	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. Recherche de primitives ;calculs d'intégrales. Equations, inéquations. ***Equations différentielles***. **Calcul numérique : logarithmes.** Calcul d'aires. **Etude de quelques courbes de l'espace (hélice).**	**Cinématique du point.** (Quoique déjà en diminution quant à la place accordée).
1971	Terminale C (Remarque les autres classes de Terminale ont un	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. Fonctions vectorielles. **Hélice circulaire** ; ***recherche de tangente à une conique.*** Recherche de primitives ;calculs d'intégrales.	**Cinématique du point**. ***« Applications mécaniques, physiques, etc...(calculs de volumes, masses, moments d'inertie ; vitesse et distance parcourue ; intensité et quantité d'électricité ; puissance et énergie, etc...).***

[10] Nous avons choisi de ranger la cinématique dans les applications non mathématiques, et ceci bien qu'elle ait été longtemps considérée comme interne à celles-ci ; elle ne s'en est séparée que vers la fin des années 70 (suppression dans les programmes de CAPES et d'agrégation).

	sous-pro-gramme de C.)	Equations différentielles. (Equations et inéquations sont passées dans <u>l'algèbre</u>.) **Calcul numérique avec logarithmes.** (En diminution) Calcul d'aires. **Calcul de volumes.** ***Probabilités, statistiques.***	***Valeur efficace d'un phénomène périodique.*** » (Programme de 1971) Dans les manuels : très peu d'applications de physique, uniquement de la cinématique théorique (avant de définir une fonction vectorielle, le manuel Aleph 0 définit la topologie de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ par les boules).
Année	**Niveau**	**Objets et applications ''internes''**	**Applications ''externes''**
1982	Terminale C	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. ***Développements limités***. ***Les suites*** (comme chapitre autonome) Fonctions vectorielles. Recherche de primitives ;calculs d'intégrales. Equations différentielles. Calcul d'aires. ***Dénombrement*** **:**Remplace les proba s Toute mention de calcul numérique a disparu des programmes ; le manuel Istra donne encore un chapitre de calcul numérique. Les calculs de volumes ont disparu de la mention des programmes en tant que rubrique autonome; ils figurent parmi les différentes applications à la physique ; il en demeure en exercices dans certains manuels.	Toute mention d'application a disparu des programmes, cependant des manuels (Magnard, Istra) continuent à donner un paragraphe d'applications (calcul de volumes, d'intensité moyenne...)

1986		Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. **Développements limités**. Les suites (comme chapitre autonome) **Fonctions vectorielles**. Recherche de primitives ;calculs d'intégrales. Equations différentielles. Calcul d'aires. Calculs de volumes : en exercices ou travaux pratiques dans certains manuels.	La cinématique a disparu, mais « Fonctions vectorielles » est introduit dans les objets purement mathématiques. Pratiquement pas d'applications à la physique (rien dans les programmes, presque rien dans les manuels). Calculs d'intensités efficaces : en exercices dans certains manuels.
Année	**Niveau**	**Objets et applications ‘’internes’’**	**Applications ‘‘externes’’**
1992	Terminale C	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. Les suites . Courbes paramétrées (remplacent les fonctions vectorielles). Recherche de primitives ;calculs d'intégrales. Equations différentielles. Calcul d'aires. Calculs de volumes : en travaux pratiques dans les manuels, mais souvent TP 5 ou TP6, donc la probabilité d'être abordés paraît réduite	Une mention rapide dans les programmes, d'applications à la physique; il en existe en travaux pratiques dans les manuels : - TP6 de Fractale (chapitre 6) sur le travail d'une force ; - dipôle et oscillateurs amortis dans le chapitre 7 du même manuel (TP1 et 2) ; - le manuel Dimathème 1992 ne comporte aucun exemple de ce type. Le Terracher en comporte quelques uns ; on trouve tous les niveaux, de zéro pour Dimathème à 8 pour Fractale (7 exemples en physique, un sur l'application des statistiques à la publicité).
1994	Terminale S enseigne. obligatoire et spécialité	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. Les suites . Courbes paramétrées (remplacent les fonctions vectorielles). Recherche de primitives ; calculs d'intégrales. Equations différentielles. Calcul d'aires. Calculs de volumes dans le programme ; en travaux pratiques dans les manuels, mais souvent TP 5 ou TP6, donc la probabilité d'être abordés paraît réduite	Le programme mentionne à plusieurs reprises (pour les suites, et pour les intégrales) l'intérêt de donner des exemples d'applications aux sciences (biologie, physique, économie) : « Exemples d'étude de situations décrites au moyen de suites (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...) ». « Exemples simples d'emploi du calcul intégral pour le calcul de grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques ».
Année	**Niveau**	**Objets et applications ‘’internes’’**	**Applications ‘‘externes’’**

1998	Terminale S enseigne. obligatoire et spécialité	Etude de fonctions polynômes, de quelques fonctions rationnelles. Les suites . Courbes paramétrées. Recherche de primitives ; calculs d'intégrales. Equations différentielles. Calcul d'aires. Calculs de volumes : en travaux pratiques dans les manuels, mais souvent TP 5 ou TP 6, donc la probabilité d'être abordés paraît réduite	idem

III. 4.2 Evolution des applications « internes » et « externes »

Les tableaux des pages précédentes permettent de voir l'évolution : effectivement elle se présente en termes d'objets (calcul numérique, suite) comme de problèmes d'application (disparition de la cinématique…). Certains points, d'autre part, ont évolué mais cela ne figure pas dans le texte des programmes, car c'est au niveau des pratiques que les modifications se font sentir : ainsi les paramètres disparaissent dans les années 80, et c'est stipulé dans les commentaires des programmes et non dans le texte de ceux-ci ; de même les questions d'approximation ont disparu dans les années 70. Les intégrales sont restées, mais si on traitait encore de l'intégrale de Riemann en classe de Terminale dans le programme de 1966 (présence dans les manuels bien que le libellé ne le mentionne pas), à partir de 1971 et plus encore après 1982, les commentaires stipulent que seule l'introduction des intégrales à l'aide des primitives est au programme. Autre point important du travail de l'analyse, la récurrence a disparu des programmes de Première Scientifique en 1991, et il n'en est resté qu'un résidu peu significatif en terminale, lors de l'uniformisation des classes terminales en « Terminale Scientifique ».

Ce qu'on peut remarquer à la suite de cette étude, c'est que la partie « problèmes, applications » de l'analyse a connu une fortune diverse suivant les périodes considérées, cependant on peut retenir quelques grandes tendances :

— ce champ occupait une place relativement importante jusqu'à la réforme des « maths modernes », en 1971, puisque plusieurs chapitres étaient consacrés à la cinématique, au calcul numérique, aux applications en géométrie ; remarquons toutefois que l'essentiel portait sur des applications considérées comme internes aux mathématiques, puisqu'à cette époque la cinématique, comme nous l'avons signalé, était une discipline mathématique ;

— la réforme de 1971 a fait une place aux applications externes, mais a réduit la place, d'une part de la géométrie classique (remplacée à cette période par du calcul vectoriel), d'autre part de la cinématique ;

— les applications, en particulier les applications externes, sont depuis 1971 toujours plus ou moins présentes dans les programmes (parfois c'est simplement le préambule qui signale l'intérêt de l'analyse pour la physique, parfois c'est dans le corps du programme que prennent place ces applications) ; cependant on peut douter, vu le temps dont dispose l'enseignant pour traiter le programme, vue aussi la culture des enseignants qui les porte à considérer comme plus essentiels les apprentissages purement mathématiques (il est clair que cette priorité vient aussi du niveau des élèves de Terminale, et de la nécessité légitime de les préparer aux épreuves du baccalauréat), on peut douter donc que le professeur de Terminale S consacre beaucoup de temps à des travaux pratiques sur l'intensité efficace, le calcul du travail des forces de pesanteur sur une pile de briques, ou un calcul de moment d'inertie.

Dans ces conditions les phrases du programme peuvent n'apparaître que comme un alibi culturel, un hommage abstrait à l'interdisciplinarité, mais qui risque fort de ne guère être suivi d'effet. Cependant l'effet existe, même s'il ne se traduit pas par des séances d'enseignement devant les élèves, mais par d'autres phénomènes. Des professeurs de lycée, interrogés, disent relier systématiquement les équations différentielles à la physique (oscillateurs harmoniques) mais ne pouvoir le faire qu'exceptionnellement pour le calcul différentiel et intégral et pour les suites. Citons C., professeur en TS, une Terminale sans spécialité maths :

« Oui, ça m'arrive, si j'ai le temps, je fais un TP ; il y en a dans les manuels, mais pour les intégrales, à part les calculs de volume, je ne vois pas trop ce que je pourrais faire ; c'est comme pour les suites, si j'ai le temps je les fais avec le flocon de von Koch, sinon tant pis ; pour les équations différentielles, là oui, je leur en parle, je fais le lien. Et puis pour la cinématique, je me suis entendu avec la collègue de physique, elle m'a montré ce qu'elle faisait, pour qu'on soit d'accord *(la cinématique est faite entièrement en cours de physique) ;* de toutes façons, il y a séparation entre les maths comme outil et les maths du cours de maths. »

D'autres professeurs attestent s'entendre régulièrement avec le professeur de physique sur la façon dont sera traitée la cinématique, ou les applications des intégrales ; ce n'est cependant pas toujours possible, comme le reconnaît C. :

« On le fait, mais il faut dire, il y a des moments où les maths courent après la physique qui a déjà traité les équations différentielles par exemple, alors que nous on est encore dans les exponentielles. »

On peut donc conclure que les champ de problèmes de l'analyse n'est pas totalement absent de l'enseignement secondaire, et que les recommandations des programmes ne sont pas absolument dénuées d'effet ; cependant ces effets s'exercent surtout du côté de la concertation entre professeurs, et de la prise de conscience des interactions entre disciplines (ce qui n'est pas négligeable), plutôt que du côté de séquences d'enseignement réellement construites pour les élèves.

Remarquons que, sans faire ici une étude détaillée de la section « Economie » qui serait pourtant pleine d'intérêt, il en est tout autrement, notamment quant à la pertinence des sujets retenus, en classe de Terminale ES (économie) : dans le manuel Déclic 1998 (éd. Hachette) 13 chapitre sur les 15 du manuel comportent des travaux pratiques orientés sur l'économie. Les deux seuls chapitres qui prévoient des travaux pratiques « exclusivement mathématiques » sont le chapitre sur les limites et asymptotes, et le chapitre d'introduction des fonctions logarithmes. La rubrique « exercices » est également abondamment fournie en exercices et problèmes issus de phénomènes économiques, financiers ou démographiques par exemple. Même constatation dans le Bréal 1998 de Terminale ES.

Cependant même en section ES nous constatons que les problèmes, soit internes soit externes, sont présents ici comme **applications** des concepts introduits, et non pas comme problématiques à l'origine de leur introduction. La transposition historique a donc un effet qui est de reléguer certains des problèmes, historiquement pertinents pour l'introduction d'une notion, à la périphérie du savoir, comme exemples à donner du fonctionnement de cette notion. Ceci se comprend bien dans la mesure où ces problèmes n'en sont plus pour le mathématicien (ni pour le physicien).

Il n'est pas interdit d'imaginer une autre organisation de l'enseignement dans ces quatre années, qui pourrait réintégrer ce champ de problèmes dans l'activité de la classe ; c'est d'ailleurs une option envisagée pour réformer un enseignement qui, nous l'avons dit au préambule du chapitre 1, semble ne plus convenir pour former des scientifiques (cf APMEP 1997). La question est de savoir si ces problèmes pourraient être reconstitués en problématiques pour l'élève. En supposant cette reconstitution souhaitable, et possible pour le professeur (compatible avec sa conception des mathématiques, et avec les contraintes temporelles de l'enseignement, pour ne citer que deux conditions), une autre question est celle du coût d'un tel fonctionnement, et pas seulement en temps : cette option serait-elle, plus que celle qui prévaut actuellement, compatible avec par exemple les exigences du rapport au savoir demandé en aval ? Et sinon serait-il acceptable de « sacrifier » des savoir-faire actuellement exigés, au profit d'un apprentissage centré sur des problématiques résolues depuis longtemps par les mathématiciens ? C'est une question qui est pour l'instant complètement ouverte.

Les auteurs de la brochure citée ci-dessus (APMEP 1997) mettent quant à eux à l'étude l'idée de sujets de baccalauréat favorisant davantage la recherche, et non l'obtention de résultats stéréotypés. Il s'agirait de valoriser les capacités à :

« — conduire un raisonnement (...) ;

— adopter une attitude critique face à un résultat (...) ;

— fournir un exemple iconique ou numérique ;

— émettre des hypothèses de plausibilité ;

— faire choix d'une méthode ou d'une stratégie ayant les meilleures chances de déboucher sur une solution. » (APMEP 1997 p. 16)

Et ceci, plutôt que d'évaluer des réponses standardisées à des exercices également standardisés[11].

Ce qui ressort de cette étude, c'est une certaine difficulté à concevoir un enseignement de l'analyse à partir du champ de problèmes qui lui a donné naissance ; voilà pourquoi, dans notre DEA, nous avions porté l'accent sur les méthodes de la théorie « analyse », et tenté de caractériser ces méthodes. Il convient de pousser plus loin cette étude, c'est le projet du paragraphe qui suit, entreprise que nous reprendrons au chapitre 3. Cependant si nous voulons construire un milieu pour l'enseignement de l'analyse, il convient de s'assurer que la dimension « champ de problèmes » n'est pas absente de notre projet : autrement dit, ce projet de construction d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse devra porter sur un champ de problèmes tout au moins pertinent, même s'il n'est pas possible de retrouver les problèmes à l'origine de la théorie ou ses applications les plus intéressantes.

III. 4.3 Le système de preuve et les types de raisonnement

Lorsque l'on s'engage dans des études d'analyse, on peut être frappés, d'un côté par la formulation des problèmes posés (formulation qui fait souvent appel à l'infini, grand ou petit, nous y reviendrons) ; et d'autre part, par les méthodes de raisonnement, qui paraissent en rupture avec les raisonnements utilisés en algèbre. Certaines tentatives ont été faites pour faire porter une partie de l'enseignement sur ces méthodes de raisonnement, soit en les présentant par un discours « méta » (cf Rogalski 1994) ; soit en tentant de faire redécouvrir aux étudiants le système de preuve de l'analyse classique (M.Legrand, pour l'intégrale de Riemann, voir Legrand 1997).

Notre hypothèse de travail est que le système de preuve d'une théorie fait partie de cette théorie, c'est une part du langage de la théorie ; cette partie du langage est celle que la théorie s'est donnée pour sa validation. En ce sens ce système de preuve est une part de l'organisation du savoir de la théorie ; toute théorie mathématique comprend une part de l'organisation du savoir qui est dédiée à la validation. Cette part s'est parfois naturalisée, comme en algèbre élémentaire, au point de nous devenir transparente, elle n'en existe pas moins.

Cependant ce système n'est pas présenté par les mathématiciens de notre référence (cf chapitre 1) comme une organisation du savoir, mais plutôt comme une **norme des pratiques mathématiciennes**, dans le domaine de l'analyse.

[11] Il n'est bien sûr pas évident que ces propositions puissent déboucher rapidement sur des épreuves d'examen acceptables.

Cette norme des pratiques mathématiciennes se fait essentiellement sentir dans les phases de validation : en ce sens les types de raisonnement, système de preuve, ..., de l'analyse sont une part incontournable d'un milieu pour la validation. Dans mon DEA j'avais introduit ce système de preuve ; ici encore je le nomme **SPA (système de preuve de l'analyse**) et je lui attribue comme fonction d'être un modèle de l'organisation du **milieu pour la validation** en analyse.

Le SPA est donc un outil de contrôle pour l'enseignement de l'analyse, et un outil de contrôle de la validité de celui-ci (conformité aux savoirs de référence). En ce sens il sera nécessaire de prendre en compte dans le SPA non seulement les types de raisonnement et de preuve, mais au moins une part des questions proposées dans l'enseignement et des moyens disponibles pour les résoudre, c'est-à-dire d'élargir quelque peu l'assise de cette entité.

Justifions que, du point de vue de l'enseignement de l'analyse, nous puissions considérer une « norme des pratiques mathématiciennes »comme faisant partie d'un modèle d'organisation des connaissances et des savoirs. Certes les deux concepts ne coïncident pas : plus précisément le premier est inclus dans le second. C'est-à-dire qu'un tel modèle des connaissances et des savoirs doit nécessairement contenir une norme des pratiques mathématiciennes, ou du moins être d'intersection non vide avec cette norme définie par les mathématiciens professionnels. Dit de cette façon, c'est presque une évidence : un modèle qui précise quelles connaissances et quels savoirs nous devons rencontrer dans un milieu adéquat pour l'enseignement d'une théorie, doit également stipuler quelles formes de reconnaissance et de validation de ces savoirs vise l'enseignement, et quelles preuves ou types de raisonnement seront considérés comme valides dans l'étude de cette théorie.

Il résulte de cette organisation du savoir, que cette part du savoir qui est vouée à la validation se retrouve dans l'enseignement de la théorie, non bien sûr sans que la transposition didactique n'ait exercé son effet.

Nous aurons donc à considérer le système de preuve de l'analyse, mais comme objet didactique, à un niveau donné, dans des conditions d'enseignement données.

Par **SPA** nous entendons par conséquent, non pas un objet unique (les méthodes de preuve de la théorie « analyse ») mais des objets qui ont une parenté avec le précédent, et qui sont le produit de la transposition didactique. Ces objets, nous aurons à les définir, ainsi qu'à déterminer lesquels entrent nécessairement dans la constitution d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse, **afin que la validation y soit possible.**
L'étude du SPA est ce qui va ultérieurement nous occuper (voir chapitre 3).

Nous le disions plus haut, l'analyse, y compris son système spécifique de preuve, constitue une **théorie mathématique** ; il reste à examiner, dans ce chapitre, ce que nous pouvons dire, d'un point de vue didactique, d'une théorie mathématique, et de son enseignement.

IV. L'ANALYSE COMME THŽORIE
LE MILIEU EN ANALYSE

IV. 1. LES THEORIES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

IV.1.1 Organisation du savoir et théories

Il ne s'agit pas dans ce travail de caractériser ce qu'est une théorie en mathématiques : la théorie des théories mathématiques est un domaine mathématique spécifique, on peut consulter par exemple à ce sujet Lorenzen (1967). Ce que nous cherchons à analyser ici, c'est l'organisation d'une théorie à des fins d'enseignement, ou tout au moins de communication. De ce point de vue les manuels de mathématiques évoqués au début de ce chapitre sont concernés également par ce type d'analyse.

En effet toutes les théories mathématiques sont l'objet de communication du savoir, par l'intermédiaire d'un texte du savoir ; dans ce texte les énoncés sont organisés en axiomes, lemmes, théorèmes, corollaires, propriétés... Cette organisation n'est pas forcément canonique : certains mathématiciens peuvent appeler lemme ce que d'autres appelleront Théorème 1 ; et surtout les énoncés peuvent ne pas avoir la même fonction.

a) Savoirs et connaissances de la théorie

En effet un énoncé donné peut figurer, dans un exposé ou dans un théorème :

- comme une « **brique** » (savoir connu sur lequel on peut s'appuyer), c'est-à-dire en terme de **savoir** ;
- comme une **méthode**, c'est-à-dire soit comme un **savoir** méthodologique, soit comme une **connaisssance** à faire fonctionner.

Suivant les théories mathématiques, on pourra constater des organisations très différentes de ce point de vue : ainsi en statistiques, on démontre des théorèmes généraux qui ne seront ensuite plus utilisés (ce sont les savoirs fondateurs de la légitimité de l'utilisation de la théorie), et on utilise ensuite des tables ; par contre en géométrie, les théorèmes sont convoqués pour le travail dans la théorie, c'est-à-dire que les pratiques mathématiciennes relatives à la géométrie utilisent constamment ces théorèmes . Les énoncés retenus peuvent donc l'être pour leur valeur **d'usage** (c'est le côté connaissances) ou pour leur valeur de **légitimation** (côté savoir). En analyse, c'est par exemple le rôle du théorème des fonctions implicites.

Mais ce n'est pas la seule distinction qu'il convient de faire : en effet une même théorie a pu être exposée suivant des modalités différentes :

b) Choix des savoirs et connaissances pour la diffusion de la théorie

Suivant les options de communication qui ont été choisies, on peut repérer au moins deux types de systèmes générateurs axiomatiques :

- une génération **analytique**, type Dieudonné : le but étant de raffiner au maximum les conditions, et d'utiliser des hypothèses les plus restreintes possibles (cf Dieudonné, 1980) ;
- une génération orientée plutôt vers l'introduction d'un grand nombre de théorèmes efficaces afin d'être opératoire dans un grand nombre d'applications. C'est ce que nous

appellerons une génération **productive**, la référence étant par exemple G.Choquet.

c) Savoirs et connaissances dans l'enseignement d'une théorie

Dans **l'enseignement** d'une théorie, les savoirs sont convertis en connaissances, et certaines formes du savoir sont plus favorables au développement de certaines connaissances : par exemple le savoir sur la décomposition des entiers en facteurs premiers se manifeste dans la façon de simplifier les fractions. Ou encore, le savoir sur les dérivées et la pente de la tangente à une courbe se manifeste comme connaissance dans la résolution graphique des équations différentielles (cf Artigue et Gautheron, 1983).

De même, les connaissances qui se manifestent dans une situation sont en général le reflet d'un savoir, interne ou externe à la théorie étudiée ; ou bien les connaissances construites lors de la confrontation avec un milieu vont être institutionnalisées comme des savoirs.

Ce qui semble important, c'est que **rien** ne prouve qu'une génération logique, qu'elle soit de type analytique ou productif, soit en même temps une génération cognitive : toutes les méthodes axiomatiques peuvent être inefficaces pour faire fonctionner les connaissances lors de l'apprentissage. Il est connu qu'un apprentissage peut parfaitement s'appuyer sur des déclarations fausses, si ces déclarations engendrent des questions, qui elles-mêmes produisent une genèse des connaissances qui est d'un autre type que la génération logique. Il s'agit de faire une place aux *causes d'apprentissage*, lesquelles ne se confondent pas avec les *raisons de savoir.*

Il est donc important de se demander quelle part de la théorie va être conservée dans l'élaboration de situations d'apprentissage de cette théorie, ou plus précisément dans le **milieu** proposé dans ces situations, et si la transposition didactique, en créant ces situations, ne peut pas avoir pour effet de dénaturer la théorie, de sorte que le savoir construit soit inutilisable pour la poursuite de l'étude.

IV.1.2 Théorie et fonctionnement didactique

a) Place de la théorie dans l'enseignement

Comment s'articule donc l'apprentissage d'une théorie ? quels éléments de la théorie sont injectés dans le milieu ? il semble que ce puisse être très variable : suivant le niveau d'enseignement bien sûr, mais aussi suivant la théorie, et la façon dont elle est prise en compte dans l'enseignement. On peut penser par exemple au dénombrement (Grenier 1995), à la logique formelle (Durand-Guerrier 1996), à l'algèbre linéaire (.1997). On peut imaginer les deux extrêmes :

— depuis l'enseignement de la théorie telle quelle (au moins une de ses organisations, telles que définies plus haut), c'est-à-dire le texte du savoir, sans problématique, ni application ;

— jusqu'à une introduction « floue » qui semble proche de ce qui se pratique actuellement pour l'analyse en lycée, les concepts de la théorie n'ayant alors qu'un statut quasiment protomathématique (cf chapitre 3).

L'exemple traité par Grenier (Grenier 1995) du dénombrement se distingue de celui de l'analyse, dans ce que la théorie savante correspondante est moins évidemment connue des mathématiciens, elle n'a donc pas la même légitimité épistémologique ; elle ne jouit pas non plus d'une forte pertinence épistémologique, n'ayant pas d'applications très courantes dans des champs très vastes des mathématiques. Citons D.Grenier :

> « (...) nous examinons la question des savoirs spécifiques qui sont en jeu dans les problèmes combinatoires. (...) Pour cerner les enjeux d'apprentissage d'une

situation, il est nécessaire d'identifier le milieu pour la situation. Pour les situations de combinatoire, la question est d'autant plus complexe qu'elle interpelle un savoir savant mal cerné et, d'autre part, qu'elle suppose un « milieu » de connaissances non explicité mais très spécifique. Je m'inscris ici en faux contre l'idée répandue qu'il faut peu de (voire aucune) connaissances particulières pour résoudre des problèmes de combinatoire. » (Grenier, 1995, p. 236)

et plus loin : « La plupart des énoncés des problèmes classiques de combinatoire peut être compris par des non spécialistes, qu'ils aient ou non une grande culture mathématique (...). Ils peuvent sembler avoir une solution « intuitive » évidente - qui se révèle souvent fausse - et présenter une complexité de résolution qu'il est difficile d'anticiper. Une des raisons de ces difficultés tient en partie au type d'objets qu'on manipule : objets définis en compréhension et non en extension, d'où la nécessité de travailler sur des raisonnements formels. » (idem, p.237)

Ici le parallèle avec l'enseignement actuel de l'analyse semble très intéressant : certes la théorie de l'analyse est, contrairement au savoir de la combinatoire, un savoir savant très bien cerné, mais qui a été « évacué » des programmes de l'enseignement secondaire ; le fait, en analyse, de s'appuyer sur l'intuition se révèle souvent peu productif voire producteur d'erreurs ou de conceptions fausses ; les objets de l'analyse, ne pouvant être manipulés de façon satisfaisante sous le contrôle de l'intuition, doivent l'être par des raisonnements formels.

Dans les deux cas, on peut :

— faire un constat : il y a une tentative d'enseigner un champ des mathématiques en évacuant plus ou moins la théorie de ce champ ;

— et poser une question : **quelle part irréductible** d'une théorie mathématique doit faire partie du milieu de l'enseignement de cette théorie pour que le résultat de l'enseignement soit conforme à ce qui peut en être attendu ? (attendu par exemple par l'institution d'enseignement située en aval de l'institution d'enseignement donné).

Une hypothèse de ce travail de thèse est que cette part est relative aux **outils de validation** de la théorie. C'est aussi semble-t-il celle de Grenier (Grenier et Payan, 1997) à propos de la combinatoire, lors de leur exposé du 9/3/97 au séminaire national de didactique des mathématiques à Jussieu.

b) Place de la théorie dans les conceptions des enseignants

La référence est ici la thèse de H. El Bouazzaoui (El Bouazzaoui, 1988), « Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction ». Les réponses des professeurs, repérées par El Bouazzaoui dans des situations où une représentation intuitive de la notion de continuité est insuffisante pour résoudre le problème, montrent clairement une difficulté à se détacher des notions intuitives enseignées à leurs élèves, et à se placer dans un cadre plus théorique (par exemple revenir à une définition topologique de la continuité).

Il semble qu'on pourrait parler, à propos de cet assujettissement des professeurs, d'un effet de contre-transposition (cf Conne, 1992), même si ce n'est pas exactement le sens donné par Chevallard à ce mot : localement, pour les enseignants, il y a construction d'un corpus de savoirs relatifs aux seules fonctions numériques de variable réelle, qui leur permettrait de justifier les buts de l'enseignement de la notion de limite et de ne pas envisager de cas « pathologiques » mettant en défaut l'ostension pratiquée en classe ; chaque corps professoral construit son système de références qui lui permet de fonctionner quotidiennement, et de répondre à tous les problèmes que la classe peut poser. Cet effet de transposition peut aussi venir de la tendance naturelle de clôture des savoirs, qui tend à enfermer les savoirs d'un niveau d'enseignement dans des justifications de ce même niveau (cf Bloch, 1997).

En conclusion, nous étudions donc l'analyse comme une **théorie à enseigner**, théorie qui manipule des objets complexes et nombreux, avec des raisonnements spécifiques. Pour rendre compte de cette complexité, notre but est de construire **un modèle de MILIEU pour l'enseignement de l'analyse, et de dégager des méthodes permettant d'analyser ce milieu.**

Ceci permettra d'envisager des **situations** d'enseignement de l'analyse ; en particulier la recherche théorique de situations fondamentales des concepts de fonction ou de limite pourra être abordée.

IV.2 L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : LE MILIEU

IV. 2.1 Le milieu dans la théorie des situations

Des notions intuitives d'analyse et de topologie s'introduisent nécessairement auprès des élèves dès l'école primaire par le jeu des apprentissages et des pratiques scolaires relatives à des objets tels que les nombres décimaux ou les fractions, la proportionnalité, l'étude des fonctions élémentaires en algèbre etc. Il est tentant de considérer ces connaissances intuitives comme une base utilisable pour alimenter un apprentissage plus poussé, et donc pour construire un milieu d'apprentissage de l'analyse. Mais la réussite d'un tel processus suppose que les raisonnements utilisés en analyse sont conformes à ceux que les élèves ont développé dans leurs autres activités mathématiques antérieures (ou assez proches pour que l'apprentissage puisse se faire en continuité avec les connaissances antérieures), et donc que l'apprentissage pourra s'appuyer sur les connaissances antérieures pour les transformer en savoirs.

Or si la connaissance mathématique d'une notion se manifeste dans son usage même implicite ou dans sa formulation même approximative, le savoir se prouve essentiellement par la capacité à justifier des énoncés formellement corrects. C'est pourquoi au chapitre 3 sera étudié le système de preuves analytiques (SPA) qu'une situation d'enseignement / apprentissage de l'analyse peut prévoir, avec un espoir raisonnable de voir les élèves d'un niveau donné comprendre et utiliser ces preuves. Mais avant d'étudier le SPA, il est nécessaire d'envisager une définition a priori du milieu de l'enseignement de l'analyse au niveau secondaire. A cette fin, rappelons quelques concepts de la théorie des situations, sur lesquels nous nous appuierons pour construire un milieu pour l'enseignement de l'analyse. Le texte qui suit est un texte non publié de Guy Brousseau (Brousseau 1998) :

« **MILIEU, CONCEPTION** :

Conception

Nous avons vu qu'une connaissance isolée n'est maintenue utilisable par un élève (comme d'ailleurs par une institution) que si elle appartient à une " conception " i.e.

1. si elle est une partie d'une collection C de " connaissances " (objets, déclarations, algorithmes etc.) qui lui sont logiquement reliées et qui seront activées en même temps qu'elle (ces " connaissances du sujet peuvent d'ailleurs être justes ou fausses) ;
2. si elle est utilisée assez fréquemment avec cette collection de connaissances dans une famille S assez vaste et variée de situations où l'une et les autres sont indispensables pour le sujet ;
3. si une certaine partie de ces connaissances est formulable dans un langage L mobilisable ;
4. si l'ensemble de ces trois collections de pratiques, de termes et d'énoncés possèdent certaines propriétés :

4.1 de pertinence réciproque

— Toute situation de S peut être " traitée (sinon effectivement résolue) par des connaissances figurant dans C, Pour toute connaissance de C il peut être trouvé dans

S des situations qui la rendent nécessaires, Tout terme de L possède des référents mis en œuvre dans des éléments assez fréquents dans C etc.

4.2 d'adéquation et d'idonéité :

— le traitement des situations de S par les connaissances de C formulé par les termes de L doit produire une réponse véridique ou/et satisfaisante (pour l'enseignant) dans une proportion suffisante de cas.

4.3 d'ergonomie

— C, S et L doivent constituer des répertoires de taille raisonnable pour permettre leur apprentissage et leur usage ;
— les solutions générées par ces répertoires doivent présenter une complexité et un coût d'exécution acceptables.

4.4 de fermeture

— Toutes les connaissances de C sont assez " étroitement " reliées par divers types de relations logiques ou rhétoriques : inférence, analogie, co-présence, métaphore, métonymie, représentation, etc.
— « Toutes » les situations de S peuvent être résolues à l'aide des connaissances de C ;
— Pour chaque situation de S le recours à des connaissances ne figurant pas dans C est très limité ;
— Pour tout connaissance de C, S présente un ensemble raisonnablement varié de situations qui demandent C comme moyen principal de raisonnement.

Conceptions des élèves et conceptions didactique

Les conceptions des élèves sont développées dans leurs interactions didactiques. Le professeur provoque ces interactions en constituant des systèmes composés de connaissances, de savoirs (définitions, théorèmes etc.), de langages appropriés et de situations (problèmes, exercices) qu'il va leur proposer. Les conceptions des élèves sont induites par les conceptions didactiques choisies par le professeur (qu'il ne faut pas confondre avec les conceptions privées du professeur à propos de cette notion). Ces dernières sont supposées dénuées d'erreurs, au contraire des premières.
L'enseignement d'une notion se traduit par la proposition et l'usage (explicite ou implicite) d'au moins une conception didactique relative à la notion visée.
Les propriétés d'une conception didactique conditionnent en bonne partie le succès de l'enseignement qui l'utilisera.

Il est concrètement difficile de constituer d'autres collections de situations que celles fournies par les ajustements empiriques résultant de l'action et de la réflexion des enseignants, et tout aussi difficile de délimiter des champs relatifs à une notion. La construction systématique de situations fondamentales fournit un moyen de production et de discussion de ces champs S par le jeu de la transposition, et de l'étude de leurs variables cognitives et didactiques. Elle manifeste et représente l'antagonisme d'un sujet avec un environnement qui lui pose des problèmes d'adaptation qu'il doit résoudre par la création ou la mise en œuvre de connaissances

Mais étant donné un champ empirique S de situations, l'existence d'une situation fondamentale n'est pas assurée, et a fortiori son unicité. La fermeture de la conception peut englober un champ trop large. D'autre part cette forme d'engendrement n'est pas la seule concevable : un ensemble d'instruments matériels ou de situations " concrètes ", assorti d'un ensemble de règles et d'un répertoire linguistique peuvent découper un champ S.

Nous appellerons " milieu " un champ de situations assez vaste engendré de cette façon et représentant les contraintes qui vont justifier la réunion d'un ensemble de connaissances en une théorie pertinente cohérente et consistante.

> Par exemple l'ensemble des figures planes que l'on peut obtenir avec la règle et le compas, forment un milieu pour une certaine géométrie élémentaire. Si on y adjoint des instruments " déformables " comme des glissières ou des systèmes mécaniques plus complexe le milieu est profondément modifié et les connaissances mathématiques nécessaires aussi. » (Guy Brousseau, 16/11/98)

IV. 2.2 Définir un milieu pour l'analyse

Le projet de définir un milieu pour l'analyse nous induit à essayer de prendre en compte les éléments théoriques énoncés ci-dessus. Nous avons relevé l'inadéquation du milieu de l'enseignement traditionnel, inadéquation mentionnée non seulement dans les recherches en didactique mais même par la noosphère ; il reste à définir un milieu possédant de façon suffisante les caractères énoncés ci-dessus, à savoir être un champ de situations découpé de façon suffisamment vaste, pertinente et cohérente dans le savoir de l'analyse, et permettant de construire des connaissances suffisamment fréquemment visitées. Notre étude du milieu se décompose de la façon suivante :

a) Objets, preuves, problèmes

La collection C de connaissances dont parle G.Brousseau dans le texte ci-dessus, a été définie et classée. Un premier découpage a permis de distinguer plusieurs sortes d'éléments :

- les objets de l'analyse, les concepts : fonction, suite, nombres … ;
- les propriétés qui leur sont attachées : continuité, dérivabilité, intégrabilité... ;
- les objets "dérivés" des objets primitifs par ces propriétés : dérivées, intégrales, ...
- le traitement de ces objets (preuve, validation) et les pratiques mathématiciennes associées à ces objets.;
- le champ de problèmes de l'analyse.

Ces points, en particulier la validation, sont étudiés au chapitre 3.

b) La représentation des concepts

Cependant les objets (concepts) des mathématiques ne sont pas directement accessibles, on n'accède qu'à leurs représentants. Ce point a été plus particulièrement soulevé dans les études sur l'enseignement de l'analyse, car les représentants à considérer sont nombreux et complexes.[12] Il est donc nécessaire d'étudier quels sont les symboles (les ostensifs) dont on peut disposer pour organiser des situations d'enseignement de l'analyse, et quel rôle peuvent jouer ces ostensifs dans le choix d'une situation ; et une fois la situation choisie, quelle est leur influence sur le travail mathématique et les apprentissages éventuels. Cette étude est faite au chapitre 4.

c) L'étude empirique : la construction de situations d'enseignement des notions de fonction et de limite et leur analyse

Afin de confronter l'étude faite à la contingence, deux situations d'enseignement ont été construites en se référant à l'étude théorique :

— une situation d'enseignement du concept de fonction, la situation « Graphiques et chemins », exposée au chapitre 5 ;

— une situation d'enseignement du concept de limite, la situation « Flocon de von Koch », exposée au chapitre 6.

Enfin un questionnaire sur fonctions et limites a été proposée à quatre classes de Première scientifique : il figure au chapitre 7.

---

[12] voir chapitre 4.

IV. 2.3 La structuration du milieu en analyse : remarques sur la validation

Dans la théorie des situations, le rôle du milieu est d'être le « système antagoniste du système enseigné », c'est-à-dire de fournir à l'élève les rétroactions nécessaires au fonctionnement de la situation, et particulièrement dans les phases de validation. Le fait que les méthodes de raisonnement soient spécifiques à l'analyse, et semblent constituer un enjeu important de son enseignement, nous incite à porter particulièrement notre attention sur la validation.

Qu'est-ce, en analyse, qu'un milieu pour la validation ? Les connaissances nécessaires à la validation sont issues des savoirs et des méthodes de l'analyse. Ces savoirs et ces méthodes ne sont pas, dans l'état actuel de l'enseignement pré-universitaire, introduits d'emblée (dès le début de l'enseignement de ce domaine). L'attention devra porter sur les **savoirs** nécessaires à la validation, contenus dans le milieu, mais aussi sur les **méthodes** explicites ou implicites, c'est-à-dire les **connaissances** disponibles dans ce milieu.

IV. 2.4 Les connaissances de l'élève

L'enseignement des prémisses de l'analyse, dans les deux dernières années de lycée, se fait sans recourir au formalisme ni aux définitions : il s'agit d'un apprentissage qui se veut basé sur l'intuition, et repose sur l'ostension de quelques cas emblématiques (voir chapitre 4). Dans ces conditions de quoi peut-on disposer pour analyser l'activité mathématique de l'élève ? Les savoirs étant absents, l'élève peut construire éventuellement des *connaissances* qui lui permettent de répondre aux demandes de l'institution concernant la résolution d'exercices et les relations avec les savoirs mathématiques ultérieurs.

Au début de l'enseignement universitaire, la théorie et le formalisme sont introduits massivement ; les étudiants construisent-ils alors un rapport au savoir compatible avec la théorie ? les observations faites prouvent qu'en cas de situation problématique pour eux, ils se rabattent sur des connaissances antérieures, souvent basées sur l'approche empirique du lycée.[13]

Dans les situations testées, qui tentent de réintroduire sinon le formalisme, du moins la validation, il était nécessaire également de disposer d'un modèle de l'activité de l'élève pour analyser la situation. Nous avons donc choisi de construire ce modèle à partir d'une approche de la distinction connaissances / savoirs, et d'essayer de le faire fonctionner sur les protocoles de séances dont nous disposions.

IV.3 CONNAISSANCES ET SAVOIRS

De tout ce qui précède nous pouvons conclure que l'étude du **savoir** de l'analyse est insuffisante à caractériser l'enseignement de l'analyse. L'introduction des connaissances se justifie pour plusieurs raisons, théoriques et empiriques (liées à l'étude de la contingence). Il y a une nécessité théorique de l'étude des connaissances pour :

— rendre compte de l'activité mathématique des élèves, et plus généralement du couple enseignant / enseigné (cf Conne 1997b) : cette activité mathématique se traduit en connaissances avant de se traduire en pratiques mathématiciennes ;

— analyser le milieu ; on peut donner comme exemple les passages entre registres différents relatifs à un même concept : en effet les passages entre registres différents (conversions sémiotiques) ne sont pas tous objets de savoirs dans l'enseignement ; ils sont pris en charge de façon très différenciée suivant la nature du registre ou de la conversion, et

[13] cf chapitre 8.

certains restent sous forme de connaissance privée du mathématicien. Par exemple les conversions graphique → algébrique ne font pas partie explicitement du savoir sur les graphiques et fonctions dans l'enseignement secondaire (cf Duval 1994). Autre exemple : des connaissances sur l'infini peuvent être à l'oeuvre dans des calculs de limites, alors que la méthode de validation ne prévoit pas de traitement mathématique de l'infini (voir chapitre 3).

La prise en compte de la distinction connaissances/savoirs est donc nécessaire à deux niveaux :

— fonction empirique (rendre compte de la contingence)

— fonction théorique : modèle d'analyse didactique. Si dans le milieu il n'y a pas de **savoirs** pour la validation, peut-on y mettre des **connaissances** ? ces connaissances peuvent-elles jouer un rôle satisfaisant pour engager cette validation ? (au sens où le savoir présent dans la situation sera bien identifié, mobilisé, et éventuellement pourra être institutionnalisé).

Dans le chapitre 2, nous nous proposons d'examiner les études publiées en didactique sur les savoirs et connaissances, et de retenir un modèle théorique utile pour notre étude. Les différentes recherches menées en didactique des mathématiques sur l'enseignement de l'analyse seront plus tard examinées à la lumière de ce modèle afin de retenir ce qui paraît compatible avec notre projet.

V. QUESTIONS

En conclusion de ce chapitre d'introduction il convient maintenant de poser quelques questions.

Le milieu de l'introduction de l'analyse paraît être un lieu particulièrement propice pour étudier les rapports connaissances / savoirs : en effet, on s'introduit dans le champ d'un savoir nouveau (première introduction explicite des concepts de l'analyse au lycée). Les observations de situations d'enseignement de l'analyse devraient donc fournir :

— du côté de l'institution, des exemples d'organisations didactiques relatives aux choix faits pour l'introduction des concepts de l'analyse (fonctions, limites, dérivées...) ; dans ces organisations devraient être repérables l'équilibre choisi des connaissances et des savoirs ;

— du côté des élèves, des exemples de procédures, d'erreurs, de conceptions... d'élaboration et d'utilisation de connaissances et savoirs.

D'où les questions qui guident cette recherche :

Question 1.1 : L'organisation du milieu traditionnel pour l'enseignement de l'analyse (fonctions, limites) au lycée permet-elle aux élèves de construire un rapport au savoir satisfaisant ?

Lors des fluctuations des programmes des trente dernières années, ce ne sont pas les seuls objets du savoir qui ont changé, mais les outils de validations et les possibilités d'organisation de l'apprentissage. D'où **la question 1.2,** et les suivantes :

Question 1.2 : Les réformes successives ont bouleversé l'équilibre connaissances / savoirs dans l'enseignement des deux dernières années de lycée. Ce phénomène a-t-il des conséquences sur l'organisation pratique des savoirs présents dans la classe ? ces conséquences sont-elles plus ou moins fortes que le texte des programmes ne le suggérerait ? cette modification de l'enseignement, si elle existe, entraîne-t-elle des effets sur le rapport des élèves au savoir de l'analyse, et si oui lesquels ?

Question 1.3 : Dans l'enseignement secondaire, certaines connaissances d'analyse, présentes dans la situation, et qui ne font pas l'objet d'un discours du professeur ou des manuels d'un niveau donné (qui ne sont pas converties en objets de savoir à ce niveau), font-elles partie des savoirs nécessaires dans la poursuite du travail de l'analyse ?

Question 1.4 : Parmi ces connaissances non converties en objets de savoir, certaines sont du registre de la validation, y compris des outils nécessaires à la validation au niveau concerné. Ces savoirs vont-ils s'avérer manquants dans l'enseignement supérieur, et quelle solution didactique l'institution « Enseignement Supérieur » retient-elle pour pallier à ces manques de savoirs ?

Question 1.5 : Sans les connaissances — ou les savoirs — relatifs à la validation, une situation peut-elle offrir la garantie d'être porteuse d'un savoir conforme à la théorie, et par conséquent les connaissances induites par cette ou ces situations peuvent-elles être compatible avec le rapport institutionnel exigé en aval ?

Question 1.6 : Peut-on concevoir, pour enseigner l'analyse à ce niveau de l'enseignement secondaire, un " milieu " assez facile à engendrer, suffisamment fréquemment visité et tel que les connaissances associées aux situations soient reliées entre elles de façon assez serrée ?

Question 1.7 : Existe-t-il des situations fondamentales pour les principaux concepts de l'analyse (fonctions, limites) ?

Question 1.8 : Peut-on mettre en œuvre, dans les classes, des réalisations de situations, au moins partiellement a-didactiques, qui soient compatibles avec le temps didactique imposé par l'institution ?

RESUME DU CHAPITRE 1

1) On constate une négation de la transposition didactique par certains mathématiciens, y compris en première et deuxième année d'études scientifiques à l'Université ; ceci s'accompagne de difficultés effectives importantes rencontrées dans l'enseignement, laissant à penser que les choses ne sont pas aussi simples.

2) Les contrats rencontrés dans les manuels de niveau maîtrise de l'enseignement supérieur sont de type **faiblement didactique**. Le discours des mathématiciens professionnels, lorsqu'ils enseignent, déclare s'autoriser des seules mathématiques et des objets sur lesquels celles-ci travaillent : bien que nous ne puissions avaliser ce point de vue, nous prendrons ce discours comme **référence du savoir déclaré sur l'analyse**.

3) La complexité de l'analyse, et de son champ d'applications, conduit à chercher une triple entrée dans le savoir de l'analyse : entrée par **les objets, les types de preuves, le champ de problèmes.**

4) L'analyse est une théorie mathématique ; une théorie se construit avec son système de preuves. Dans la théorie « analyse », les raisonnements sont en rupture avec ceux de l'algèbre et il y a augmentation du niveau de complexité des preuves (raisonnement contravariant). D'autre part le système de preuves est nécessaire à la validation, à tout niveau d'enseignement.

5) L'étude du rapport au savoir de l'analyse et la structuration du milieu sont les deux nécessités (théoriques) de l'étude des connaissances. L'étude de la distinction savoirs/connaissances se justifie par le souci de contribuer à l'étude du milieu des situations proposées pour l'enseignement de l'analyse ; et de compléter les modèles existants pour étudier l'activité mathématique du couple enseignant/enseigné.

CHAPITRE 2

CHAPITRE 2

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : CONNAISSANCES ET SAVOIRS MILIEU DU PROFESSEUR

Vingt regards sur l'Enfant Jésus
Olivier Messiaen

... Il n'en reste presque rien, rien que du savoir, et pas de la connaissance.
La connaissance, c'est d'ordre génital, c'est-à-dire rencontre de deux esprits portant fruit ;
et le savoir, c'est d'ordre oral, anal.
Françoise Dolto, « Tout est langage »

INTRODUCTION

Les questions posées en fin de chapitre 1 avaient trait aux connaissances et savoirs mis en jeu dans l'enseignement de l'analyse au niveau secondaire, ainsi qu'à la possibilité de construire des situations fondamentales relatives aux concepts de fonction et de limite. Les principes théoriques de la recherche de situations fondamentales de ces deux notions sont examinés au chapitre 3.

Le chapitre 1 faisait état de la nécessité de prendre en compte les *savoirs* mais aussi les *connaissances*, dans le processus d'apprentissage, et donc dans la construction de situations pour l'enseignement des concepts de l'analyse. Les savoirs mis en jeu étant d'un grand niveau de complexité, et les méthodes de validation ne faisant pas partie des connaissances antérieures des élèves, il apparaît de plus que les *interactions de connaissances élève / professeur* doivent jouer un rôle non négligeable dans la conduite de situations pour l'enseignement de l'analyse.

Le présent chapitre étudie donc, d'un point de vue théorique :

- la dialectique connaissances / savoirs ;
- le rôle du professeur dans l'enseignement secondaire, dans l'hypothèse où il n'est pas possible d'assurer que les rétroactions avec le milieu suffisent à garantir l'apprentissage.

Necessité de l'étude de la dialectique connaissances / savoirs

Lorsqu'on s'intéresse à l'enseignement des notions de fonction et de limite en fin de scolarité secondaire, une question se pose : les programmes ayant été édulcorés des définitions formelles des notions de limite et de continuité, ce qui reste du travail sur les suites et les fonctions est-il bien encore de l'analyse ? et sinon existe-t-il une alternative à l'enseignement proposé actuellement par les programmes et les manuels, alternative qui :

- d'une part, ne se proposerait pas forcément de rétablir l'enseignement par l'exposé des savoirs (contrat dogmatique) qui prévalait avant la réforme de 1981 ;
- d'autre part, permettrait d'assurer que l'analyse est bien présente dans le travail fait par le professeur et les élèves dans une classe.

Afin de s'assurer que l'activité des élèves, en classe, porte bien sur l'analyse mathématique, on peut se baser sur les décisions et les validations que ceux-ci ont à leur charge, c'est-à-dire la dimension a-didactique [14] de l'apprentissage. Ceci suppose de séparer effectivement ce qui est à la charge des élèves et ce qui est à la charge du professeur. La modélisation d'un milieu a-didactique pour l'élève, et des décisions possibles pour lui dans ce milieu, existe : c'est la théorie des situations qui a introduit ce modèle, avec le concept de *situation fondamentale*.

On pourrait donc assurer que des élèves font bien de l'analyse, au niveau de l'introduction du concept de limite par exemple, s'il existait une situation fondamentale pour ce concept : la question de l'existence, ou non, de situations fondamentales pour l'enseignement des premiers concepts de l'analyse a déjà été largement discutée, et aucune situation satisfaisante n'a encore été construite à partir d'un milieu ne contenant pas déjà des éléments d'analyse mathématique, du moins pour les concepts de fonction et de limite [15] (cf par exemple Di Martino 1992, Legrand 1997).

En l'absence d'une situation fondamentale pour introduire les concepts de fonction ou de limite, nous sommes conduits nécessairement à considérer des situations qui, tout en portant une partie du savoir, par exemple ce qui est nécessaire pour la dévolution des problèmes d'analyse, ne comportent pas un milieu suffisamment résistant pour qu'il soit possible de compter seulement sur les rétroactions qu'il fournit pour engager le processus de formulation et de validation. Dans ces conditions, les connaissances et les savoirs nécessaires à ce processus seront obligatoirement introduits, à un moment donné, par le professeur.

La première question que nous nous posons alors est celle de la possibilité de faire cependant vivre la situation en y aménageant un milieu permettant l'action de l'élève, milieu offrant un support assez pertinent, du point de vue du sens, à la formulation et à la validation ; autrement dit, un milieu offrant une certaine marge pour l'activité mathématique de l'élève, ainsi que pour l'exploitation de cette activité lors du processus d'institutionnalisation. On peut traduire ceci par : *la situation comporte une dimension a-didactique pour l'élève*. On doit à Mercier (Mercier 1995) d'avoir montré comment le contrat didactique pouvait évoluer en fonction de l'existence d'une dimension a-didactique ; et, si celle-ci est manquante, l'activité

---

[14] Sur la dimension a-didactique, cf Mercier, 1995.

[15] Sur les raisons qui conduisent à douter de l'existence de situations fondamentales du concept de limite, voir Bloch 1999, annexe 1.

des élèves n'est équivalente qu'à une phase d'action, sans que le rapport au savoir visé puisse évoluer vers le rapport institutionnel prévu. Notre travail souhaite s'inscrire dans cette continuité.

La question revient donc de savoir reconnaître cette dimension a-didactique dans la situation : à quoi, selon quels critères, peut-on affirmer qu'une situation comporte bien, pour l'élève, une telle composante ? Une situation a-didactique, même si elle ne l'est que partiellement, relève des *connaissances*, et non des savoirs (un milieu a-didactique est un milieu propre à la mise en œuvre de connaissances, cf Brousseau 1990). Il faudra donc se donner les moyens de distinguer les connaissances que les élèves mettent en œuvre pour résoudre le problème posé.

Nécessité de l'étude de la situation du professeur

La deuxième question concerne les modalités de l'intervention du professeur : quand et comment injecte-t-il des connaissances ou des savoirs dans le milieu ? Est-ce suivant ses seules décisions (par exemple en suivant son projet d'enseignement jusqu'à son terme) ? Ou bien est-ce sur la sollicitation des élèves ? Dans ce cas, comment et dans quelles circonstances transforme-t-il ses savoirs en connaissances utilisables par les élèves ? On peut envisager qu'à un moment, le professeur soit contraint, par l'activité des élèves, à faire un apport de connaissances ou de savoirs dans la situation : c'est donc que les élèves ont eux-mêmes exprimé ou fait fonctionner des connaissances nécessitant un retour, ou une mise au point, ce qui a obligé le professeur à se positionner sur le terrain du savoir ; le milieu s'est trouvé enrichi par les apports des élèves et les réactions du professeur. Ce que l'on observe alors, c'est bien une interaction, une activité mathématique conjointe de l'élève et du professeur : autrement dit, l'activité mathématique de l'élève et celle du professeur doivent être étudiées ensemble si l'on veut comprendre le fonctionnement de la situation. *Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment a-didactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève.*

Le présent chapitre prétend donc aussi s'attaquer à l'examen et l'étude du rôle du professeur ; dans l'exemple que nous avons retenu pour illustrer notre propos le professeur se trouve avoir à conduire une situation qui, sans être globalement a-didactique (et nous aurons à préciser, ainsi que nous l'avons dit, cette part d'a-didacticité), prévoit un milieu dont les élèves peuvent se saisir pour agir, formuler, valider. En réponse aux connaissances manifestées alors par les élèves, ou de par ses propres décisions, le professeur intervient dans la situation ; et il n'est pas sûr que ses interventions se fassent uniquement en termes de savoir, il se peut qu'il intervienne en termes de *connaissances*, par exemple parce que le savoir correspondant n'est pas à la portée des élèves, ou pas prévu dans le curriculum, et que le professeur ne pense pas pouvoir l'introduire.

Nous pensons donc nécessaire, afin de comprendre comment se joue cette interaction à ce niveau déjà complexe de l'enseignement des mathématiques, de modéliser la situation, du point de vue du professeur, comme Brousseau l'a fait pour la situation du point de vue de l'élève.

I. CONNAISSANCES ET SAVOIRS, DES MODELES POUR L'ANALYSE DU MILIEU

I.1. CONNAISSANCES ET SAVOIRS DANS LA PERSPECTIVE DE LA DETERMINATION D'UN MILIEU POUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Le projet de détermination d'un milieu pour l'analyse n'est certes pas neuf : des contributions décisives ont été apportées par des auteurs travaillant soit sur la notion générale de milieu, soit sur des propositions d'ingénierie pour l'analyse (cf Legrand pour les limites et l'intégrale — Legrand 1991, Legrand 1997— et les travaux sur l'enseignement de l'analyse instrumenté par des logiciels de calcul formel — Artigue, Drouhard, Lagrange 1994, Trouche 1996, Chauvat 1997 ; ainsi que les travaux sur le graphique : Lacasta 1995, Alson 1987 et 1991, Duval 1994). Les auteurs de langue anglaise ont aussi abondamment écrit sur ce sujet : cf l'ouvrage collectif du groupe Advanced mathematical thinking, 1991. (L'étude plus détaillée de ces travaux, dans la perspective qui nous intéresse ici, figure au chapitre 4).

Pour l'analyse du milieu, nous reprendrons l'argumentation de G.Brousseau dans son article fondateur (Brousseau 1990), ainsi que les apports de C.Margolinas et alii (Margolinas 1994, Comiti, Grenier, Margolinas 1995). Le projet de ce chapitre est de situer la construction d'un milieu a-didactique pour l'analyse, par rapport aux travaux concernant les connaissances et savoirs : Brousseau, Margolinas, Conne, Rouchier .

Tout en situant clairement cette analyse dans le cadre de la théorie des situations, nous essaierons de la développer dans une direction qui nous parait devoir être fructueuse pour l'étude de la contingence : nous tenterons d'identifier un peu mieux le rôle du professeur, les connaissances dont il a besoin pour gérer une situation d'enseignement / apprentissage, et ceci même dans les niveaux a-didactiques. Nous pensons que les travaux de Conne, tout particulièrement, peuvent se révéler fructueux pour mener cette recherche, ainsi que pour l'analyse, a priori et a posteriori, des situations présentées aux chapitres suivants de cette thèse.

Brousseau lui-même déclare (Brousseau & Centeno, 1991, p. 197) :

> “ La théorie des situations résulte de trois extensions a priori métaphoriques, de l'usage des automates :
> 1) Identifier l'acceptation d'un fait nouveau ou la production d'une décision par le fonctionnement d'un système de connaissances et de savoirs avec la reconnaissance ou avec l'engendrement d'une phrase à l'aide d'une grammaire (générative).
> 2) Etendre le modèle à d'autres systèmes que des sujets (apprenants ou appliquants), plus particulièrement à l'antagoniste du sujet, c'est-à-dire au milieu a-didactique, puis au système éducatif lui-même, c'est-à-dire au protagoniste du sujet dans la relation didactique.

3) Modéliser clairement l'interaction des systèmes en présence : dans ce cas un état représente une situation permise des relations entre les systèmes et **non les systèmes eux-mêmes.**

Une disposition de pièces sur un jeu d'échecs représente un état de la partie, et les possibilités d'évolution auxquelles doivent s'adapter les joueurs. **Mais elle ne représente pas les joueurs eux-mêmes ni leur système de jeu.** " *(C'est nous qui soulignons).*

Or si l'étude de l'un des joueurs (l'élève) a été menée déjà dans de nombreux travaux, particulièrement par rapport aux connaissances et aux savoirs qu'il est supposé construire par interaction avec le milieu de la situation, l'autre joueur (le professeur), bien que souvent mentionné, ne fait que peu l'objet d'une étude de connaissances ; ces connaissances du professeur sont fréquemment évoquées, leur nécessité est souvent pointée, y compris dans les articles de Brousseau ; mais leur spécificité, même par rapport à la situation étudiée, est peu mise en valeur. Margolinas y consacre certes un travail important, dont nous comptons bien nous aider ; elle s'arrête cependant aux niveaux didactiques, alors que nous aimerions montrer l'intérêt de poursuivre cette analyse du rôle et des connaissances du professeur jusqu'aux niveaux a-didactiques.

1.1.1. Structuration du milieu et connaissances

Dans son article sur le milieu (Brousseau 1990) Brousseau pointe d'une part :
— la nécessité d'un milieu a-didactique ; et d'autre part :
— la diversité des connaissances en oeuvre dans la situation, connaissances de l'élève et connaissances de l'enseignant.

Il écrit en effet :

> " Considérer le milieu comme source ou objet du travail de chaque acteur est insuffisant, il faut montrer qu'il est une nécessité du contrat didactique. L'intervention de l'enseignant modifie les conditions de fonctionnement du savoir, conditions qui font aussi partie de ce que l'élève doit apprendre. (...) Les connaissances enseignées et les savoirs communiqués doivent permettre à l'élève d'entrer dans toutes les situations et pratiques sociales non didactiques comme sujet majeur et non en tant qu'élève. Ceci implique, d'une part, que l'enseignant dégage progressivement les situations qu'il propose à l'élève autour d'une notion de leurs présupposés didactiques, d'autre part qu'il reconnaisse ce milieu a-didactique comme territoire de référence culturelle et de fonctionnement des savoirs qu'il enseigne. On a une chaîne de jeux : ceux des mathématiciens, ceux de l'enseignant, ceux de l'élève, et les statuts d'un savoir sont différents selon les jeux. " (Brousseau 1990, p.322-323)

Et plus haut, à propos de " l'oignon " :

> " La situation n'est pas seulement le cadre de l'action du sujet, elle en est la condition, elle est donc étroitement associée aux connaissances en jeu. De ce fait, une partie de la situation va devoir entrer comme partie intégrante des savoirs correspondants. Cette partie, cachée peut-être, mais essentielle, sert de *référence* au savoir et *d'objet à la connaissance*. " (idem, p. 320). "

> et p. 318 : " Il faut remarquer qu'à chaque niveau de relations, les savoirs et les connaissances de l'enseignant et de l'enseigné sont différents, même lorsqu'il s'agit de la même notion mathématique. "

Dans la suite du travail sur le milieu (Brousseau & Centeno, 1991) les définitions données placent clairement les connaissances du côté de l'action, et les savoirs du côté de la validation et la communication :

> “ Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation , et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale.
>
> Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. ” (Brousseau& Centeno 1991, note p.176)

Dans la théorie des situations, les connaissances se situent du côté du contrôle de la situation par l'élève, tandis que les savoirs sont du côté du contrôle de la situation par l'institution, ainsi que le remarque G.Chauvat (Chauvat 1997). Dans sa thèse (Lacasta, 1995) E.Lacasta insiste sur le caractère nécessaire de la distinction connaissances/savoirs : “ Cette distinction va être catégorique en didactique si on montre que, dans une activité, il y a une partie (qui sont des connaissances) qui doit rester opaque au savoir ” (Lacasta 1995 p.46). Cela signifie bien que, dans une situation, il reste toujours un point aveugle pour le savoir du professeur : ce sont les connaissances mises en oeuvre par les élèves pour traiter le savoir que celui-ci (le professeur) a mis en jeu dans la situation..

Plusieurs auteurs (Brousseau, Rouchier, Conne) s'accordent pour remarquer que le savoir et les connaissances ont des fonctionnements culturels différents ; ils ne sont pas traités de la même manière par les institutions. Les connaissances sont souvent très fortement contextualisées, et elles restent en général du côté du rapport privé au savoir, alors que les savoirs sont “ triés ” par des institutions comme celle des mathématiciens afin de garder les énoncés “ utiles ”, et ont une forte composante publique, voire exclusivement publique. Pour Rouchier par exemple, les connaissances sont du côté de la *situation agie* (niveau I) alors que dès qu'on aborde la situation réfléchie on est dans l'ordre des savoirs.

Notons que de ce point de vue, il y a rencontre avec la théorie anthropologique : l'institution édite un **texte du savoir**, cf chapitre 1, p.14.

Ce que nous retiendrons à ce stade, c'est la différence pointée dans les textes de Brousseau, d'une part entre connaissance et savoirs, d'autre part entre connaissances de l'élève et connaissances de l'enseignant, à un même moment de la situation ; en ce sens on peut dire que, de même que le milieu a-didactique est une nécessité pour l'organisation de la transmission du savoir dans une perspective d'extinction du contrat didactique**, la distinction connaissances/savoirs est une nécessité de l'étude du milieu a-didactique** : en effet l'enseignant transporte dans le milieu de la situation une partie de ses **savoirs**, sous forme de **connaissances** afin que l'élève puisse les rencontrer et les utiliser pour contrôler son action dans la situation ; en même temps l'enseignant emploie, lui, des **connaissances** (différentes de celles de l'enseigné) pour contrôler que l'élève utilise bien les connaissances adéquates au contrôle de l'action dans le milieu a-didactique aménagé grâce aux savoirs de l'enseignant.

Ainsi dans Rouchier 1991, p. 37 :

> “ La connaissance est une condition nécessaire du savoir. Cela ne veut pas dire que temporellement il doit y avoir connaissance avant savoir. Cela veut dire qu'il ne saurait y avoir d'installation d'un savoir (pour un sujet) s'il ne visait pas ou s'il n'était pas conséquent de l'établissement d'un rapport de connaissance (effectif ou potentiel). La nécessité, pour la connaissance, se joue en cet endroit précis dans sa

capacité à assurer le maintien de la relation entre le sujet et le milieu, finalisé par la situation. Cette nécessité... devra être transportée dans le savoir. ”

Le modèle d’analyse ascendante et descendante de Margolinas (Margolinas 1994), dérivé de “ l’oignon ”, s’attache à préciser les connaissances des acteurs impliqués dans la situation, à chaque niveau de celle-ci. En reliant cette analyse à celle du temps didactique, il apparaît que les connaissances de l’enseignant sur la situation ne dépendent pas de ce temps (contrairement aux connaissances de l’élève) et donc que cette a-temporalité des différentes positions du professeur aux différents niveaux de milieu, et des connaissances y afférentes, est ce qui caractérise la place de l’enseignant dans la structuration du milieu. (Margolinas, 1997, Séminaire National de Didactique). Ces connaissances sont d’ailleurs une caractéristique de ce que Chevallard appelle son topos, sa place dans le milieu, et ne caractérisent pas une évolution de son rapport au savoir : “ Ceci implique (..) qu’il *(l’enseignant)* reconnaisse ce milieu a-didactique comme territoire de référence culturelle et de fonctionnement des savoirs qu’il enseigne ”, ainsi que le dit Brousseau. (Brousseau 1990, cité ci-dessus)

Si donc les connaissances de l’enseignant ne sont pas ce qui contrôle l’évolution de sa position, dans l’analyse du milieu, c’est que ces connaissances sont d’une nature différente de celles de l’élève, et ne s’en distinguent pas simplement par un décalage temporel (les connaissances de l’élève “ rattrapant ” presque celles du professeur en fin d’apprentissage). J’avais tenté, dans Bloch 1997, de pointer la spécificité des connaissances de l’enseignant pour l’enseignement, c’est-à-dire justement celles qui lui permettent de contrôler la situation vécue et agie par l’élève. Une hypothèse faite alors était qu’il existerait une “ transposition didactique intermédiaire ” qui serait celle de l’enseignant (et qu’il reste très largement à étudier). On peut faire l’hypothèse que ce qui distingue les conaissances de l’enseignant tient :

- à leur nature (dans Bloch 1997 nous disions que ces connaissances étaient “ la part mathématique du didactique ”) ;
- à leur genèse (dans l’activité mathématique d’enseignement justement, par une transposition spécifique) ;
- à leur fonction, et en conséquence à leur fonctionnement.

L’étude des connaissances que le professeur manifeste dans la situation, pour la contrôler, et particulièrement dans les phases a-didactiques, apparaît donc comme une nécessité liée à celle de l’étude du milieu. (voir III)

Tout ceci nous conduit :

1) à nous interroger sur la nature des liens qu’entretiennent connaissances, savoirs et transposition didactique ;

2) à chercher comment modéliser, dans la perspective de l’étude de la structuration du milieu de l’enseignement de l’analyse, les activités respectives de l’élève et du professeur et les connaissances présentes dans cette (double) activité.

1.1.2. Savoirs, connaissances et transposition didactique

D’un point de vue convergent, on peut dire aussi que la distinction connaissance/ savoir est une nécessité de l’étude de la transposition didactique (cf Conne, 1997b) :

“ ... la distinction connaissance / savoir suit logiquement la prise en compte de la

transposition didactique comme phénomène....Pour moi, la didactique étudie le système enseignement / apprentissage. ..Les études didactiques opèrent ce que j'appelle un retour sur les savoirs et les pratiques. "
Puis après une citation de Brousseau 1986, sur le fait que " le milieu a-didactique est à la fois milieu actuel et représentation d'un système distinct du système éducatif " :
" La didactique se caractérise donc par une (nécessairement) double référence à la réalité ". (Conne 1997b).

Cependant pour Conne, il y a lieu de faire des distinctions plus fines que celles exposées plus haut, et de distinguer connaissances et différents types de savoirs :

> " Je propose que l'on distingue le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation, ce sera l'ordre de la connaissance, du cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet (et de la représentation) ce sera l'ordre du savoir. (...) *le savoir est de l'ordre de l'utilité des connaissances pour transformer les situations*. " (Conne 1992, p.223)
> " L'ordre de la connaissance et l'ordre du savoir ne sont pas régis par des processus identiques, la situation les départage. (...) Enseigner, *c'est travailler le savoir*, pour induire dans un cadre situationnel choisi, un processus cognitif supportant l'apprentissage dont le *produit* sera en retour institué en savoir. " (Conne 1992 p.249)
> " Un savoir est une connaissance *utile*. Utile est à prendre dans le sens le plus large possible : *utilisable, à utiliser*, etc. " (idem p. 250)

De plus Conne distingue savoir-faire, savoirs **réfléchis** et savoirs **savants** — et parmi ces derniers, certains sont des savoirs **institués** :

> " En résumé, le savoir-faire est une connaissance utile en regard d'une situation donnée et du produit qui résulte de l'interaction. Le savoir-réfléchi est une connaissance utile en regard de la représentation à l'oeuvre dans cette interaction. (...). La finalité d'un savoir savant sera l'organisation et le développement des savoirs eux-mêmes. ... Les savoirs savants sont des savoirs *sur* les situations. " (idem p. 255)

Les savoirs institués sont alors les savoirs qui jouent un rôle privilégié de référence. Ces savoirs institués ne sont pas forcément des savoirs scientifiques (" l'astrologie en est un ") et ne sont pas forcément des savoirs savants (les savoirs professionnels par exemple sont des savoirs pragmatiques). Mais, dit Conne, " les savoirs institués se donnent à nous tout organisés (même si cette organisation ne nous est pas accessible). " (Conne 1997b)

Ces considérations sont à prendre en compte aussi bien en ce qui concerne les connaissances de **l'élève** que celles du **professeur**, présentes dans le milieu organisé pour l'enseignement.

D'ailleurs à propos de la transposition didactique, Conne signale, (Conne 1992), ce qu'il nomme son *ambivalence* : à savoir la " navette " effectuée par celle-ci entre savoirs savants et savoirs enseignés.

> " Ainsi lorsque la transposition didactique procède d'un savoir savant, il lui faut transposer ce savoir en une situation *pratique* c'est-à-dire *réaliser* ce savoir comme savoir pragmatique. Il faut que le travail scolaire soit *pour de vrai*. En revanche, cette situation ne sera pas à prendre pour elle-même mais *pour l'exemple* , parmi tant

d'autres réalisations pragmatiques qui eussent été possibles. C'est alors par l'enchaînement et l'articulation des situations elles-mêmes que la transposition didactique retrouvera le savoir-savant et son organisation, c'est-à-dire assurera que les savoirs scolaires s'organisent et se développent à la manière des savoirs savants. " (Conne, 1992, p.263)

Dans un autre texte (Conne 1994) Conne nous invite à parcourir dans les deux sens la chaîne de la transposition didactique, afin de comprendre le processus qu'il nomme transposition de savoirs :

> " Du point de vue didactique, la double conversion opérée par l'acte d'enseignement correspond à ce que nous nommons une *dévolution* du savoir en connaissance, suivie d'une *institutionnalisation* de connaissance en savoir. Il n'est cependant jamais assuré que ceci se solde exactement par une boucle, que la connaissance induite par la situation soit reconnaissable comme le savoir que l'on se proposait d'enseigner, que le processus d'enseignement ait pu être à ce point contrôlé qu'il n'ait connu en cours de route aucun gauchissement. (...) Il y a donc un écart connaissance / savoir qui se manifeste par une dérive transpositive. " (Conne 1994 p.9)

Comment dans ces conditions faire état d'une connaissance manifestée par un sujet dans une situation ? cette connaissance est-elle reconnaissable par le savoir correspondant ? et sur quels critères ?

Si donc nous étudions les savoirs et connaissances en jeu dans une situation d'enseignement, n'y a t-il pas le risque que nous perdions de vue l'objet de savoir visé par l'enseignement pour n'étudier que des objets infiniment dérivés, construits par la théorie didactique qui les considère comme des connaissances relevant de ce savoir ? autrement dit quel est le rapport entre le savoir (les savoirs institués) et ce qu'on peut en lire dans l'expérience ?

Afin d'éviter ces dérives de l'étude didactique, dérives signalées aussi bien par Chevallard (Chevallard 1991, chap.2) que par Brousseau (Brousseau 1986), Conne propose de remonter la chaîne de la transposition didactique : en effet considérer la transposition didactique dans le sens unique savoirs → connaissances risque de contribuer à la dérive mentionnée.

> " Rappelons que cette chaîne se définit par : xxx → objet de savoir → objet à enseigner → objet d'enseignement. (...) Ma réponse à ceci se trouve en filigrane dans ma thèse, puisque je propose en fait de prolonger la chaîne transpositive jusqu'à l'objet effectivement appris et **à la remonter** en examinant aussi les reflux de la transposition, sous forme des objets restitués par les acteurs sis aux différents maillons de la chaîne : xxx → objet de savoir → objet à enseigner ← → objet d'enseignement ← → objet enseigné ← → objet appris.(...)
> La transposition didactique est donc un cadre théorique pour l'étude et le travail sur les décalages cognitifs à l'école et plus précisément en classe. Je ne me contente pas de tendre le fil sur lequel descendrait la transposition, mais je considère qu'il est parcouru par une navette qui assume les descentes et remontées des connaissances ou des objets d'enseignement. " (Conne 1994 p.17)

Dans cette navette nous retrouvons les connaissances du professeur, qui a " [reconnu] ce milieu a-didactique comme territoire de référence culturelle et de fonctionnement des savoirs qu'il enseigne ", et qui pourra reconnaître (et éventuellement institutionnaliser) les connaissances et objets enseignés lors de leur remontée. Ce qu'il est important de noter ici, c'est qu'il apparaît clairement que cette navette de la transposition didactique ne peut fonctionner sans un double investissement de connaissances, côté élève et côté professeur. Si les connaissances du côté de l'élève ont été évoquées dans de nombreux travaux (à travers les conceptions, ou les connaissances à acquérir — faire acquérir par l'élève, ou les théorèmes en acte et modèles implicites d'action) il n'en va pas de même pour les connaissances du professeur, qui sont moins étudiées (voir cependant les travaux de C.Margolinas à ce sujet ; M.Legrand a également évoqué ces connaissances de l'enseignant en parlant de contrôle épistémologique du professeur sur la situation : cf Legrand, 1991 et Di Martino, 1992).

Surtout, il apparaît à l'issue de cette étude qu'il peut être producteur d'étudier **conjointement** ces différentes connaissances, au lieu de les disjoindre. C'est pourquoi, suivant en cela F.Conne, nous parlerons de **connaissances du couple enseignant/enseigné**, dans le travail de la classe qui est identifié comme une activité mathématique propre aux deux composantes de ce couple : l'élève et le professeur.

1.2 ACTIVITE MATHEMATIQUE DU COUPLE ENSEIGNANT/ENSEIGNE

I. 2.1 Activités mathématiques et pratiques mathématiciennes

Suivant toujours F.Conne, nous distinguerons ici activité mathématiques et pratiques mathématiciennes ; résumons en disant que l'activité est du côté de la connaissance, alors que la pratique (les pratiques mathématiciennes) est du côté des savoirs institués ; entre les deux il y a le *faire* :

> “ ..qu'est-ce qu'enseigner les mathématiques ? [Cette question] renvoie directement à une autre, portant celle-là sur ce qu'est une situation et une situation d'interaction entre un enseignant et un élève. Je me trouve alors devant la nécessité de distinguer entre l'action, le faire et la pratique. Pratiquer les mathématiques, dans quelque situation que ce soit implique une certaine activité cognitive ainsi que la production de certains gestes ou signes lisibles de l'extérieur, ce que j'appellerai un faire. Enseigner les mathématiques, c'est alors introduire à certaines pratiques, et cela suppose qu'une certaine activité se prête à une production. Voilà ce que j'entends par faire faire des mathématiques.(...) Cela suppose, chez l'enseignant lui-même une certaine activité et des productions tangibles**. Faire faire des mathématiques comporte donc chez l'enseignant ces trois dimensions que sont l'action, le faire et la pratique. Tandis que faire faire des mathématiques à un élève demande à ce que l'on enrôle son activité dans des pratiques mathématiciennes. ”** (Conne 1997b)

Nous retrouvons les connaissances de l'enseignant, par le biais de sa nécessaire activité ; quel avantage y a t-il à envisager ainsi l'activité du couple enseignant/ enseigné, au lieu de focaliser sur les connaissances et l'activité de l'élève seul ? l'idée est que l'observation des situations d'enseignement / apprentissage ne se fasse plus par seule référence aux connaissances, erreurs, conceptions... de l'élève, mais par une reconnaissance **d'interactions**. En ce sens il est possible de rapporter, dans une certaine mesure, l'activité de l'élève à celle de l'enseignant, (et réciproquement) et de regarder ce que nous apprennent ces activités sur la situation et sur le milieu - ainsi bien sûr que ce que nous apprend le milieu sur les connaissances que peut y rencontrer l'élève, et sur celles que doit y porter l'enseignant. Autrement dit il s'agit de prendre en compte, dans la situation, le **fonctionnement cognitif** du professeur, comme on prend en compte celui de l'élève. Cette analyse de l'activité mathématique peut d'ailleurs être étendue à tous types de situations, et si nous continuons à privilégier la recherche de situations a-didactiques pour l'enseignement de l'analyse, il nous paraît que les critères “ activité, pratiques ” peuvent s'avérer efficaces pour l'observation de situations “ ordinaires ” d'enseignement / apprentissage.

Il y a là une certaine symétrisation des rôles (enseignant / enseigné) qui rejoint ce qui est proposé par Alain Mercier lorsqu'il annonce l'étude de l'enseignement comme “ d'une activité coopérative entre l'enseignant et l'élève ”. (Mercier, Séminaire National de Didactique, 18 janvier 1998).

I. 2.2 Activité conjointe enseignant / élève et milieu de l'analyse

Nous retrouvons posé le problème de la définition d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse, mais notre question a évolué. Si la question initiale était, au chapitre 1 :

Qu'est-ce qu'une situation fondamentale de l'analyse ?

… il faut remarquer que le questionnement s'est à la fois élargi (du côté des situations que nous considérons, qui inclut maintenant non seulement les situations a-didactiques, mais peut s'étendre jusqu'à l'observation des situations « ordinaires », via les situations comportant une dimension a-didactique) et précisé (les termes dans lesquels nous les considérons). Lors de l'étape précédente cette question pouvait être devenue :

A quelle(s) condition(s) une situation est-elle susceptible d'être bien porteuse de savoirs de l'analyse ?

Elle a maintenant évolué jusqu'à la forme suivante :

A quelle(s) condition(s) une situation est-elle susceptible d'introduire le couple enseignant / enseigné à une *activité mathématique* dont l'objet est l'analyse, et qui débouche sur des *pratiques mathématiciennes* conformes à celles de l'analyse ?

En conclusion de ce paragraphe, il semble que tout converge pour qu'on examine l'activité mathématique dans l'enseignement / apprentissage, du couple élève / professeur, par rapport aux critères retenus, c'est-à-dire :

— activité sur un champ de problèmes relevant de l'analyse ;

— activité mettant en jeu les savoirs de l'analyse, et plus particulièrement les savoirs utiles à la validation, ce qui était appelé SPA (système de preuve de l'analyse) dans notre DEA ;

— activité débouchant sur des pratiques mathématiciennes conformes à celles que reconnaissent les mathématiciens de référence comme étant de l'analyse.

D'autre part cette activité devra être observée :

— du point de vue de l'élève, des connaissances que le milieu a-didactique lui fera rencontrer ;

— du point de vue du professeur, des connaissances et savoirs qu'il doit mettre dans la situation, pour pouvoir la piloter.

Cette activité se manifestera sur un milieu a-didactique qui pourra également être évalué avec ces critères.

L'une des questions de départ était de savoir si un élève se trouvait vraiment engagé dans un travail sur la théorie mathématique « analyse »; pour nous en assurer, nous choisissons de regarder l'activité conjointe du professeur et de l'élève; c'est donc pour les deux acteurs de la relation didactique que nous allons étudier si les savoirs et connaissances manifestés dans une situation sont bien des rapports au savoir « analyse mathématique ».

Thèse : Le milieu construit pour l'enseignement d'une théorie mathématique (ici l'analyse) ne peut conduire, pour l'élève, à un rapport *effectif* [16] au savoir de cette théorie que dans la mesure où l'activité mathématique non seulement de l'élève, *mais aussi du professeur*, sollicite le savoir spécifique de cette théorie.

C'est l'étude du *milieu du professeur*, y compris dans les niveaux a-didactiques, qui peut nous permettre d'analyser les connaissances que l'enseignant manifeste et construit dans le milieu de la situation.

[16] Pour la définition d'un rapport effectif au savoir, voir p.62 la thèse de D.Fregona (1995) : "Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie." Université Bordeaux I. Cette notion a été également reprise par C.Margolinas, dans son atelier de la VIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995). Cf. aussi chapitre 1.

II. MODELISATION DES SAVOIRS ET CONNAISSANCES DU PROFESSEUR

II.1 QUESTIONS SUR LA SITUATION DU PROFESSEUR

Une conséquence de l'étude du paragraphe I est que, afin de théoriser et d'observer les situations d'enseignement/apprentissage, il devient nécessaire de chercher le sens de la situation tout autant du côté des connaissances que l'enseignant engage dans la situation (pour construire et faire vivre le milieu, mais aussi pour piloter la situation, y compris dans les niveaux a-didactiques), que du côté des connaissances que l'élève met en oeuvre dans le milieu, et avec lesquelles il agit et interagit. L'enseignant, lui aussi, interagit avec les connaissances du milieu, mais **le milieu de l'enseignant n'est pas le même que celui de l'élève** - ce que disent aussi bien Conne (pour Conne même (Conne 1996), « l'enseignant et l'élève apprennent, mais leur apprentissage ne s'effectue pas dans la même institution. »), que Margolinas (cf Margolinas, exposé au Séminaire National de Didactique, Paris 19/10/97).

Nous reprendrons ci-dessous (voir II.3) les questions posées par Margolinas; auparavant il faut préciser ce que nous entendons par *milieu de l'enseignant :* nous considérons que les connaissances du professeur s'exercent et se construisent sur le milieu que lui renvoie :

1) la situation (celle qu'il a mise en œuvre pour l'élève);
2) les élèves (leurs procédures, leurs erreurs...);

C'est ce que nous appellerons un milieu pour l'enseignement - alors que celui de l'élève est un milieu pour l'apprentissage; et c'est ce que nous allons tenter d'étudier.

Pour l'étude de ce milieu nous reprendrons le schéma proposé par Margolinas pour « l'oignon » dans une situation a-didactique ou comportant des phases a-didactiques (Margolinas 1994). Cependant nous pensons développer davantage l'étude des connaissances du professeur : en effet dans ce milieu l'enseignant exerce des connaissances ; ces connaissances sont à l'oeuvre suivant deux modalités : elles se construisent, ou bien elles étaient existantes (le professeur les avaient employées ou construites lors de la gestion d'une autre situation) et la situation les amène à se manifester, sans pourtant que la distinction entre ces deux modalités soit absolue : les connaissances s'actualisent dans la nouvelle situation. Mais c'est, à notre sens, à travers l'étude de ces connaissances que nous aurons accès au milieu du professeur.

Rappelons d'abord le schéma de Margolinas :

M3 : M- de construction		P3 : P- noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur
M2 : M- de projet		P2 : P- constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : M- didactique	E1 : E- réflexif	P1 : P- projeteur	S1 : situation de projet	tique
M0 : M- d'apprentissage	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur**	**S0 : situation didactique**	
M-1 : M- de référence	E-1 : E-apprenant	P-1 : P- observateur	S-1 : situation d'apprentissage	a-
M-2 : M- objectif	E-2 : E- agissant		S-2 : situation de référence	didac
M-3 : M- matériel	E-3 : E- objectif		S-3 : situation objective	tique

Nous souhaitons discuter ce modèle à partir de l'étude de situations comportant une certaine composante a-didactique. En effet les chercheurs ayant pratiqué des observations de situations a-didactiques s'accordent sur la difficulté de la dévolution et de la recherche de contrat dans ces situations. Dans le primaire, où de telles situations ont été testées de façon régulière (par exemple au COREM à l'école Michelet de Talence, ou à Pau par des IMF - Instituteurs Maîtres-Formateurs - en collaboration avec des didacticiens comme R.Berthelot), les didacticiens reconnaissent la difficulté de l'entreprise, et la longueur du travail conjoint entre professeurs et chercheurs afin que la situation puisse vivre de façon satisfaisante. Ceci rejoint les observations faites à un niveau d'enseignement plus élevé; citons par exemple Di Martino (1992) qui insiste sur l'importance du contrôle épistémologique nécessaire de la part du professeur qui pilote la situation. Entre un enseignement « classique » (magistral ou par ostension) où le professeur contrôle le déroulement du début à la fin, et une situation comportant des phases a-didactiques où la dévolution paraît très difficile à obtenir, il y a, nous semble-t-il, nécessité d'étudier le professeur *pour lui-même*, dans ses relations à la situation et au savoir : *qu'est-ce qui change* pour lui, entre les deux types de situations ? qu'est-ce donc qui rend si difficile la conduite de situations faisant place à l'activité de l'élève, alors même que ces situations ont pu parfois (abusivement certes) être présentées comme fonctionnant (presque) toutes seules ?

II.1.1 Quels sont les objets du milieu du professeur ?

Le milieu du professeur peut se construire en suivant le tableau ci-dessus, en correspondance avec la situation de l'élève : dans notre hypothèse en effet, dans une situation a-didactique l'enseignant et l'élève apprennent, par le truchement de leur activité mathématique, à l'occasion de « la même » situation. Cependant comme nous l'avons déjà mentionné, « l'enseignant et l'élève apprennent, mais leur apprentissage ne s'effectue pas dans la même institution. » (Conne 1996). De plus, comme nous l'avons signalé (au I de ce chapitre), on ne peut considérer que le professeur ne mette que des **savoirs** dans la situation : la distinction connaissances / savoirs est tout aussi nécessaire lorsqu'il est question de savoirs professionnels que dans le cas d'apprentissage de l'élève. Il s'ensuit que, pour étudier le milieu du professeur, deux types d'objets sont à considérer :

— les éléments « objectifs » du milieu (les élèves, les éléments de la situation, les

rapports entre l'élève et les différents milieux a-didactique...) ;

— les connaissances et les savoirs que le professeur met en jeu dans la situation.

En référence aux modèles théoriques que nous avons étudiés dans la première partie de ce chapitre, il nous parait pertinent de distinguer non seulement savoirs et connaissances, au sens de Brousseau, mais aussi savoir comme connaissance utile, autrement dit d'adopter le filtre de Conne. Rappelons que pour celui-ci (Conne 92) on peut parler de **connaissance lorsque l'acteur est sous le contrôle de la situation, et de savoir lorsque c'est l'acteur qui contrôle la situation**. Nous pensons montrer que cette définition est particulièrement pertinente dans les situations d'enseignement de l'analyse étudiées ci-dessous (voir chapitres 5 et 6). Ainsi il pourra apparaître que l'enseignant peut se trouver sollicité par la situation et conduit à manifester des connaissances d'analyse, lesquelles ne sont pas destinées à être institutionnalisées dans le travail de la classe, mais qui néanmoins s'avèrent essentielles pour le contrôle épistémologique de la situation et du savoir de l'analyse présent dans celle-ci (voir exemple ci-dessous au III) ; indispensables aussi pour le contrôle de l'activité de l'élève, c'est-à-dire justement, paradoxalement, pour accepter de parfois ne plus le contrôler sans perdre le fil de la situation, et nous touchons ici une des plus importantes difficultés de la dévolution.

Il semble d'ailleurs nécessaire, si l'on étudie des situations à dimension a-didactique, de reprendre en partie l'analyse de la situation de l'élève, en pointant à quel(s) moments(s) celui-ci peut effectivement prendre le contrôle de la situation, et :

— quel sens donner à cette prise de contrôle ;
— quelles conditions le permettent ;
— quel est l'effet de cette prise de contrôle sur le professeur.

En effet si l'élève n'est pas dans une situation a-didactique, où le milieu est suffisamment résistant pour envoyer les rétroactions nécessaires, y a-t-il quand même pour lui des moments a-didactiques et si oui lesquels et pourquoi le sont-ils ?

II.1.2 Connaissances et milieu a-didactique

Remarquons que ce faisant, nous nous heurtons à deux difficultés, relativement à ce qui a été décrit par les chercheurs comme le rôle et la position de l'enseignant :

— premièrement, si l'enseignant modifie, ou actualise ses connaissances dans son activité mathématique concomitante à celle de l'élève, c'est que l'a-temporalité ne serait plus ce qui caractériserait sa position; on peut rétorquer à ceci que, même si les connaissances du professeur évoluent et se construisent par son activité d'enseignement, il y a a-temporalité dans la mesure où il peut rejouer, en principe indéfiniment, les mêmes situations, ce qui n'est pas le cas de l'élève (sauf s'il redouble : mais dans ce cas rejoue-t-il la même situation ? il se peut d'ailleurs qu'il n'ait rien joué du tout la première fois).

— deuxièmement, lorsque les connaissances de l'enseignant sont sous le contrôle de la situation, ce ne peut être qu'une situation ou une phase a-didactique : en effet on ne peut pas imaginer qu'un enseignement par ostension puisse conduire l'enseignant à en perdre le contrôle, du moins de son point de vue (c'est un point sur lequel nous reviendrons). Or, même s'il est possible, d'un point de vue théorique, d'envisager l'étude isolée d'une situation a-didactique, dans les faits une situation a-didactique est toujours une phase d'un projet *didactique*; il nous faudra donc expliquer comment le professeur articule son projet didactique et son travail dans les niveaux a-didactiques d'une situation. Il en résulte bien que l'étude du milieu et des connaissances du professeur est nécessaire dans ces niveaux a-didactiques; l'étude, menée par Margolinas, des connaissances de l'enseignant du niveau 3 au niveau -1, n'est pas suffisante pour expliquer l'apprentissage du professeur. L'étude de Margolinas se place clairement dans la perspective d'un professeur pour l'élève, et dans une situation « ordinaire » d'enseignement où les niveaux a-didactiques sont vus par le professeur comme « écrasés », c'est-à-dire tous confondus : le professeur ne distingue en général pas, dans un cours ordinaire, les différents niveaux a-didactiques de l'élève, à supposer qu'ils réussissent à exister.

Or notre ambition est de construire un modèle du professeur, non pas seul mais dans ses interactions avec les élèves, le savoir et la situation; dans ces conditions l'examen des interactions des niveaux a-didactiques s'impose.

Nous avançons donc que le travail du professeur et son apprentissage, dans son activité mathématique en classe, se situent surtout dans les niveaux a-didactiques.

Corollaire : dans une organisation traditionnelle de l'enseignement (cours magistral ou dialogué, ou ostension déguisée) l'enseignant a peu d'occasions de changer ses instances de contrôle : soit il manifeste des savoirs qu'il possédait déjà, soit il ne met pas de savoirs spécifiques dans la situation didactique. Un exemple en est donné par les observations de Margolinas (Margolinas 1997) où l'un des professeurs, tout en ayant constaté l'inefficience de la situation prévue pour faire acquérir à des élèves de Quatrième le concept de transformation géométrique (tout au moins une première approche de ce concept), est néanmoins satisfaite du déroulement de la séance, et envisage de reprendre le même support d'introduction les années suivantes. Il y a donc défaut à constater ce qui est pourtant relativement facile à repérer en situation d'enseignement, à savoir que les élèves n'ont pas réussi à effectuer les tâches demandées, ou que leurs productions n'étaient pas pertinentes relativement au savoir visé.

Certes un professeur peut apprendre d'une situation d'enseignement traditionnelle, en se rendant par exemple subitement compte d'un manque dans son exposé, ou d'une impossibilité logique, ou d'une possibilité qu'il n'avait pas entrevue; mais l'apprentissage du professeur dans son interaction avec l'élève, c'est-à-dire les connaissances mises en jeu dans cette activité commune, ne peuvent se produire qu'en situation a-didactique.

II.1.3 Analyse descendante ou ascendante

Dans l'introduction du schéma ci-dessus (Margolinas 1994) Margolinas privilégie, pour le professeur, l'analyse descendante, ce qui correspond effectivement aux niveaux où elle envisage l'action du professeur : P-noosphérien, P-constructeur, P-projeteur, Professeur, et dans S-1, P-observateur. Cependant cette interprétation met bien en évidence ce qu'il peut rester à remanier dans ce projet : si l'analyse descendante éclaire sur les connaissances du professeur lorsqu'il envisage la situation, elle ne nous dit rien sur la réalisation de cette situation du point de vue du professeur, et donc sur l'adéquation entre les intentions du professeur et ce qui s'est réellement passé, non plus que sur les connaissances que l'enseignant acquiert dans cette réalisation. De plus ces connaissances ne sont pas acquises par une simple position d'observation (encore qu'il faudrait préciser ce qu'implique cette action d'observation), mais par une interaction avec le milieu du professeur ; cette interaction comprend certainement de l'observation mais cela ne saurait suffire à la décrire. D'ailleurs le même auteur (dans Margolinas 1997) donne une description des actions du professeur, que nous reprenons ci-dessous.

Par ailleurs notre intérêt pour l'étude du rôle du professeur dans les niveaux a-didactiques est motivé par une circonstance venue de la contingence, et qui, nous semble-t--il, pose question : comment se fait-il que les « cases » de la situation du professeur dans les niveaux a-didactiques soient vides, alors que tout praticien sait bien l'énergie qu'il faut dépenser pour faire vivre, en classe, une telle situation, y compris (et peut-être même surtout) lorsque les élèves sont en phase d'action ? Quelle est cette étrange façon de ne rien faire, qui laisse épuisé le professeur qui l'a vécue ? et si l'enseignant **fait**, alors il y a lieu et possibilité de modéliser ce **faire**.

Or de ce point de vue de la réalisation de la situation, l'analyse ascendante est pertinente si nous pouvons effectivement identifier les différents niveaux du milieu du professeur, et les caractéristiques de son interaction avec ces milieux, lors de la réalisation de la situation ; et si de plus nous pouvons montrer l'intérêt de cette approche pour progresser dans notre projet, c'est-à-dire :

- identifier l'activité mathématique du couple enseignant / enseigné ;

- caractériser le rôle et les connaissances du professeur, en particulier dans une situation a-didactique ;

Remarquons que de ce point de vue, l'analyse descendante des connaissances du professeur ne discrimine pas (ou très peu) les situations classiques d'enseignement des situations a-didactiques, nous y reviendrons.

- mettre à jour des critères de l'activité mathématique en classe, qui nous renseignent sur l'effectivité du rapport de cette activité avec le savoir théorique visé, en l'occurence l'analyse.[17]

II.2 ANALYSE ASCENDANTE DE LA SITUATION DU PROFESSEUR

Par le biais de l'analyse ascendante nous croyons possible de dégager **les caractéristiques du milieu du professeur.**

II.2.1 Le milieu matériel

Le milieu matériel du professeur comprend les élèves, et le milieu matériel des élèves : le professeur est en effet « responsable » de deux composantes qui conditionnent la suite, et la réussite, de la situation :

— l'adéquation du milieu matériel à la poursuite de son projet ;

— l'utilisation, par les élèves, de ce milieu matériel d'une manière conforme à ses prévisions.

[17] Voir I ci-dessus, et chapitre 3

Autrement dit, le professeur organise le milieu matériel et l'action d'un acteur objectif sur ce milieu (cf Fregona, 1995, p. 43) ; et ceci conditionne la façon dont le professeur et l'élève pourront jouer la **recherche de contrat** et la dévolution de la situation.

D'une certaine façon, on peut dire que le professeur, lui, joue « contre » l'élève et le milieu de l'élève : le système antagoniste du professeur, c'est le couple élève/milieu de l'élève. A chaque coup, la réussite est sanctionnée par la réaction de ce couple ; or le milieu de l'élève, c'est lui (le professeur) qui l'organise. Il y a donc dans le milieu du professeur, à ce niveau, deux composantes :

— l'une qu'il contrôle (jusqu'à un certain point, en tous cas qu'il a construite), c'est le milieu matériel de l'élève ;

— l'autre qu'il ne contrôle qu'en partie et très indirectement (par le biais de la première) est constituée des réactions des élèves et de leur capacité à s'engager plus avant dans la situation.

Une caractéristique essentielle du milieu du professeur, c'est qu'à l'inverse du milieu de l'élève, il est **toujours** finalisé : finalisé pour que les élèves agissent, et pour que le professeur les voit agir. Remarquons **qu'il est essentiel qu'il en soit ainsi** : on peut observer parfois dans des classes, par exemple chez des professeurs débutants, des milieux du professeur non finalisés, où l'enfant a une tâche à accomplir *qui ne sert à rien* au professeur ; celui-ci s'active vainement dans l'environnement de la tâche et **le temps didactique** ne peut avancer. Il n'est bien sûr pas fortuit que nous retrouvions ici le temps didactique lié au milieu du professeur, et à notre problématique connaissances/savoirs (cf Brousseau et Centeno, 1991 ; Mercier, 1992).

Nous en déduirons que l'action de l'élève, dans ce milieu a-didactique, a deux fonctions : :

— pour l'élève, elle sert à faire évoluer son interaction avec le milieu, à construire et utiliser ses connaissances ;

— pour le professeur, à s'assurer que la situation avance conformément à ses prévisions **et** à construire et utiliser ses connaissances (connaissances mathématiques et didactiques). Remarquons que, parmi ces connaissances, il faut compter comme des plus importantes les connaissances que l'enseignant acquiert **sur les connaissances** des élèves disponibles dans la situation, et le traitement qu'il peut en faire : cette composante de la situation du professeur apparaît comme fondamentale dans le milieu objectif.

II. 2.2 Le milieu objectif

Le milieu objectif du professeur est constitué des éléments de la situation, des actions des élèves et surtout des connaissances de ceux-ci et des modifications que ces connaissances provoquent dans le milieu objectif des élèves. La situation de référence, pour l'enseignant, s'établit donc par rapport à l'élève agissant ; il en résulte qu'à ce niveau, contrairement au niveau précédent, le professeur ne surdétermine plus aucune part du milieu, puisque le milieu objectif de l'élève comporte dejà des réalisations de celui-ci, tentatives, erreurs, connaissances... Dire qu'il ne surdétermine plus le milieu dans lequel il évolue et avec lequel il interagit ne signifie nullement qu'il en a perdu tout contrôle : c'est ici qu'interviennent des connaissances utiles à ce contrôle. Dans III nous étudierons, sur un exemple, comment s'exercent ces connaissances. Dans II.3 ci-dessous nous essaierons de les mettre en correspondance avec des actions possibles, sans oublier de les relier aux savoirs spécifiques du professeur.

Le milieu du professeur est en partie modelé par les actions, tentatives, théorèmes en acte... de l'élève : en effet selon nous, à ce stade le professeur ne peut être seulement observateur « passif » de l'action ; son milieu comporte nécessairement une prise en compte des connaissances, essais de validation... des élèves.

Il convient de distinguer l'observation « extérieure », et l'observation « à chaud », celle que le professeur met en oeuvre pour piloter la situation, lorsqu'il est pris dans l'activité enseignement / apprentissage. Ainsi que le dit Conne (Conne 1996) :

> « ... mon observation ne se situ(e) pas sur le même plan que mon interaction avec l'élève et les objets à traiter. En d'autres termes, je ne puis me faire une idée de ce que l'élève pense qu'en rapport avec ce que je pense sur le moment, l'un en fonction de l'autre. D'où l'importance pour l'observation et l'expérience à me trouver en position d'être surpris. En ce sens, « regarder ce que ça donne » m'oblige à « refaire » donc est l'occasion de « mobiliser » (« remobiliser ») certains schèmes, ou encore « d'accéder au niveau de l'activité », en direct ou en différé, peu importe. Le hiatus entre ce plan de l'observation et celui de l'interaction est exactement ce qui distingue la mobilisation des schèmes de pensée, qui ne requiert pas la conscience, et les opérations d'évocation de ces mêmes schèmes, via une représentation, voire un modèle, comme l'est une situation. »

Le professeur est donc conduit à observer les actions des élèves afin d'anticiper les interventions qu'il devra faire lors de la phase de bilan et de validation ; en effet si la situation est bien construite, elle prévoit l'utilisation de connaissances antérieures des élèves, et donc les actions des élèves sont prévues ne pas devoir toutes aller dans le même sens ou ne pas manifester la même connaissance ; donc il y a beaucoup à observer, et le professeur doit avoir un système de classement des observations s'il veut jouer son rôle à ce niveau de la situation ; et plus encore au niveau suivant, où prendront place débat, validation... Il est essentiel que l'enseignant puisse trier les procédures, adapter ses arguments, décider des informations qu'il livrera, à qui il devra donner la parole au bon moment (ni trop tôt, ni trop tard), prévoir les prolongements,... Donc il doit s'organiser s'il veut réussir à gérer la phase suivante. Certes une partie de ce travail fait partie de l'analyse a priori ; mais cette analyse ne se substitue pas au travail effectif dans la classe, elle est seulement un outil indispensable pour que ce travail puisse avoir lieu.

C'est ce que nous signalions dans l'étude du milieu matériel : davantage encore, à ce stade, les actions de l'élève sont **utiles** au professeur. Celui-ci est là pour organiser le rapport des élèves à la situation, et la conformité de ce rapport avec une démarche légitime (rationnelle pour le moins) et pour assurer les conditions qui permettent de rester dans cette légitimité.

Autrement dit, dans le milieu objectif, **les observations du professeur sont organisées et finalisées.** Il serait peut-être bon de se demander si le P-observateur de Margolinas ne devrait pas redescendre au niveau du milieu objectif. En effet il nous semble que c'est à ce niveau qu'a lieu surtout l'observation stricte, ce qui comporte tout de même les composantes que nous avons signalées ci-dessus. Y a-t-il vraiment observation seule en situation de pilotage de l'enseignement ? [18]

[18] Cf là encore Conne 1996.

De plus en plus il nous paraît que le milieu de référence ne peut être l'occasion d'une simple « observation » : le milieu de référence est un milieu pour la validation (cf Margolinas, 1993) ; or celle-ci ne peut s'effectuer simplement « sous le regard » du professeur. Le II.2.4 ci-dessous argumente ce point ; remarquons simplement que l'illusion possible que la validation s'effectuerait par simple « lecture » de la situation par les élèves, sans intervention du professeur, pourrait bien être la source d'un bel exemple d'« effet Diénès » (cf Brousseau, 1986).

Une étude plus complète du milieu du professeur nécessiterait que nous prenions en compte ce qu'il fait pour dévoluer la situation ; c'est à ce niveau de milieu en effet que la dévolution s'amorce. Disons simplement que la dévolution nous paraît effectivement se faire dans l'activité du professeur et de l'élève, c'est-à-dire ce que Conne appelle le « refaire » du professeur (voir citation ci-dessus). En effet l'enseignant, en remobilisant de son côté ce qu'il y a à faire dans la situation, lâche un peu du contrôle dont il était question au II.1.1, en gardant la possibilité de suivre le fil puisqu'il est DANS la situation. Bien sûr une conséquence (une condition ?) est que l'enseignant accroît la marge d'incertitude de la situation, non seulement du côté des élèves mais aussi du sien. On en trouvera un exemple au III en analyse.

II.2.3 Le milieu de référence de l'élève

Si nous voulons identifier le milieu du professeur, il nous semble nécessaire de préciser le fonctionnement pour l'élève de la situation à ce niveau.

Le milieu de référence pour l'élève est finalisé : en effet c'est à ce point d'avancement de la situation qu'apparaît le but explicite de celle-ci (pour l'élève, ce qui diffère bien entendu du but pour le professeur : par exemple dans la situation du puzzle (Brousseau 1987 p. 134), le milieu de référence « pièces construites du puzzle » est finalisé pour l'élève par la nécessité de reconstruire le puzzle avec les différents morceaux, et la recherche des conditions qui peuvent conduire à cette réussite). Autrement dit, le milieu de référence est celui où l'élève prend prise sur la situation, c'est-à-dire celui où ses connaissances se transforment en savoirs (en connaissances utiles), où l'élève saisit ce qu'il y a à comprendre - à ce niveau - de la situation : par exemple pour le puzzle, qu'il existe une méthode (ou des méthodes) qui permet de réussir « à tous les coups », et que cette méthode ne consiste pas à ajouter 3 à toutes les dimensions. Ceci est d'ailleurs fortement lié à la problématique de dévolution évoquée au paragraphe précédent.

C'est à ce stade que commence la problématique de validation : qu'est-ce qui permettra de dire que la méthode trouvée est bien la bonne ? C'est cette **question théorique** qui fonde le travail dans le milieu de référence, et non plus une question matérielle comme précédemment (les pièces du puzzle vont-elles se raccorder de façon satisfaisante ?).

On peut dire encore que l'élève s'engage dans une résolution consciente ; c'est une étape de la dévolution, celle où l'élève prend en charge une recherche (qui peut être systématique) de **savoirs** donnant prise sur la situation. Rappelons en effet que d'après aussi bien (Brousseau 1981) que (Margolinas 1993), le milieu pour la validation ne peut être le milieu matériel ; il s'ensuit que dans une situation comme le puzzle, la problématique de validation ne vient pas de la tâche matérielle à accomplir, mais de la recherche des savoirs permettant d'accomplir cette tâche (et permettant même de le faire en l'absence de cette tâche, c'est-à-dire avec un milieu matériel évoqué).

Dans ces conditions il peut y avoir demande, de la part des élèves, de renégociation du contrat, c'est-à-dire rupture de contrat provoquée par les élèves : on en trouvera un exemple au chapitre 5, les élèves demandant explicitement quels savoirs leur permettraient de distinguer fonctions majorées et fonctions admettant un maximum sur un intervalle. Dans cet exemple le milieu matériel peut être constitué de schémas, représentations graphiques de fonctions; le changement du niveau de milieu s'effectue lorsque les élèves ne travaillent plus simplement sur des exemples (illustrés par des ostensifs algébriques ou graphiques) de fonctions majorées ou non majorées (par exemple les fonctions « simples », x^2, x^3, ...) mais sur la question théorique : « Y a-t-il, dans l'analyse classique, des savoirs qui permettent d'affirmer à coup sûr qu'une fonction est/n'est pas majorée ? qu'elle admet ou non un maximum sur I ? »

Dans cette dynamique des connaissances et savoirs, tous les élèves n'en seront peut-être pas au même niveau : certains ne mettront en oeuvre que des savoirs réfléchis [19] alors que d'autres en sont à la recherche de savoirs savants (tels les élèves souhaitant discriminer le cas des fonctions majorées des fonctions ayant un maximum). Dans cet exemple, ce sont des élèves de Première Scientifique, donc ils ont une certaine expérience des mathématiques, ils savent que les savoirs savants peuvent être un raccourci, éviter de replonger dans la situation à chaque fois en étant obligés de vérifier si on est dans le cas « maximum » ou « majoré »; ou éviter de tâtonner sur les graphiques pour essayer de voir les contraintes par l'expérience. Dans ce cas ce sont les élèves qui demandent une renégociation du contrat, orientée sur la recherche de savoirs. Mais on peut l'observer aussi pour un élève très petit, tel cet élève de maternelle, 5 ans et demi qui ne s'engage dans la tâche de distribution (5 objets pour deux tables, une de 4 et une de 3) donnée par la maîtresse qu'intellectuellement (il ne fait pas d'essais) et lui dit : « maîtresse, on sait bien que tu veux nous faire réfléchir! »,et n'accepte de réaliser la distribution qu'après avoir résolu le problème.

Tous sont à la recherche d'une pertinence de la tâche qui peut s'interpréter en termes de savoirs : le contrat, dans le milieu de référence de l'élève, n'est plus de tâtonner pour y arriver mais de déterminer **pourquoi** et **comment** on y arrive.

Citons *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, p. 174 (Nadine et Guy Brousseau 1987) :

> « Certains élèves n'arrivent pas à envisager une stratégie et ne comprennent pas quelles comparaisons ils peuvent faire. *(Il s'agit du problème qui suit le puzzle, la détermination d'un »optimist » réduit*). Le but pour les enfants n'est pas d'accomplir une tâche, **mais de la déterminer**. »

C'est en ce sens que l'élève maîtrise la situation ; il peut même se poser des questions **sur** la situation et non plus **dans** la situation (savoirs savants comme pour les fonctions majorées, ou la situation de distribution). Rappelons les questions que nous posions ci-dessus :

1) à quel(s) moments(s) l'élève peut-il prendre ce contrôle de la situation ?

2) quelles conditions le permettent ?

Considérant toujours la situation du puzzle, nous sommes alors amenés à la replacer dans son contexte, c'est-à-dire comme étape de la construction des fractions ; rappelons (cf Brousseau 1987 et Margolinas 1993) que le puzzle est introduit à la suite de la situation

[19] Cf Conne 1992.

« Epaisseur des feuilles de papier », pour pouvoir donner du sens au produit de deux fractions, à travers une situation où l'un des nombres considérés a un statut de mesure (comme dans les feuilles de papier) et l'autre un statut d'opérateur sur le premier.

La lecture de l'étude des séances (Brousseau 1987), comme de l'analyse qu'en fait Margolinas (Margolinas 1993, p. 139 à 148), fait bien apparaître que chaque nouvelle tâche « replonge » à nouveau certains élèves au moins dans le milieu matériel, c'est-à-dire un milieu qui ne permet pas la validation, ni le contrôle de l'élève. On pourrait dire la même chose pour les fonctions : certains élèves ne se saisissent pas immédiatement des savoirs sur les fonctions, et cherchent en tâtonnant à construire des graphiques même lorsqu'on peut répondre à la question de manière théorique (en utilisant les savoirs sur les fonctions).

D'où peut venir pour ces élèves la problématique de validation ? A notre sens ce ne peut être que de deux circonstances :

— la nécessité, à chaque étape (modules 1 à 11 dans Brousseau 1987), de se « désolidariser » du milieu matériel pour se placer dans un milieu évoqué, qui lui est régi par des « déclarations mathématiques » ;

— la **succession** des modules, succession qui permet aux élèves de se saisir chaque fois d'un nouveau milieu matériel pertinent par rapport au savoir visé, puis de reprendre et de remettre en jeu les critères de validité déjà établis dans les modules précédents. En accord avec Margolinas, nous pensons que la mise en jeu et l'utilisation de critères de validité est **progressive**. Ceci s'oppose bien sûr à une conception simpliste des situations fondamentales, qui tendrait à les présenter comme un moyen quasi automatique d'apprentissage d'une notion en une ou à la rigueur quelques séances ; ce malentendu a pu se faire jour dans la vulgarisation de la didactique et engendrer quelques quiproquos.

Il apparaît donc que les moments où l'élève peut élaborer des savoirs pour prendre la maîtrise, au moins partielle, de la situation, sont ceux où le milieu matériel est en arrière plan, et le premier plan occupé par des formulations (sur les essais, erreurs, sur les stratégies possibles...) : or le rôle du professeur dans cette phase est bien de gérer les formulations, tant du point de vue de la rationnalité mathématique que de l'efficacité pédagogique. De ce point de vue nous pouvons faire trois remarques :

— le rôle du professeur est souvent minimisé ou peu éclairé dans cette phase (cf Margolinas 93, p. 84 à 90) ;

— ce rôle est déterminant : dans tous les exemples étudiés par Margolinas, soit le professeur est intervenu pour gérer un débat, favoriser l'échange ou la formulation... , soit il y a eu ce que Margolinas appelle une phase d'évaluation (Margolinas 1993 p.29), ce qui de fait a mis un terme à la situation a-didactique. En effet, dans une situation d'évaluation, le professeur s'engage beaucoup plus que sur les déclarations des élèves, en fait il prend à sa charge l'énoncé du savoir ; il en résulte que la caractère a-didactique de la situation ne peut plus demeurer.

— ce rôle du professeur doit pouvoir se caractériser en termes **d'actions** ; c'est à quoi nous nous emploierons ci-dessous.

Nous avançons donc que le milieu de référence de l'élève est un **milieu pour l'action** du professeur.

Nous précisons plus loin ce que nous entendons par là (cf II.3).

Remarque : le milieu d'apprentissage, milieu de la situation didactique, n'est pas pour le professeur un milieu pour l'action ; c'est un milieu pour l'institutionnalisation. Le professeur, selon Margolinas, y est comme Professeur, disons plutôt : Professeur-pour-l'élève (pour enseigner à l'élève, il tient sa position ainsi que le dit Mercier (Mercier 1998a)) ; il n'y exerce pas (ou peu, sur le mode maïeutique) d'interaction avec les déclarations des élèves [20], il déclare le savoir auquel cette phase de la situation a permis d'arriver et l'inscrit dans la mémoire de la classe. C'est un geste professionnel, qui nécessite bien entendu des savoirs et des connaissances ; mais ce n'est pas une phase du jeu a-didactique ; autrement dit le professeur n'est plus lui non plus, à ce stade, en phase a-didactique. Cependant ce sont les connaissances qu'il a mises en oeuvre dans la situation d'apprentissage qui lui permettent d'initier le processus d'institutionnalisation (cf. Perrin-Glorian, 1996, pages 79 à 90).

Nous serons donc conduits à concevoir trois milieux pour le professeur en exercice dans sa classe (en dehors des milieux déjà décrits par Margolinas dans les niveaux sur-didactiques) :

— un milieu d'observation, correspondant au milieu objectif de l'élève agissant ;

— un milieu pour l'action, correspondant au milieu de référence de l'élève apprenant ;

— un milieu pour l'institutionnalisation, correspondant au milieu d'apprentissage de l'élève dans la situation didactique.

II. 2.4 Le milieu de référence pour le professeur : un milieu pour l'action

Le milieu de référence du professeur comprend bien sûr les éléments de référence de la situation ; il comprend aussi tout le travail visible des élèves sur ces éléments : essais, erreurs, réussites, conjectures, formulations, stratégies... Il comporte encore, comme le milieu objectif, une partie non visible directement dans le travail de la classe, ou plutôt visible par le professeur en utilisant ses connaissances mathématiques et didactiques : des **connaissances** des élèves, celles qu'ils manifestent dans leurs actions et leurs déclarations, **à travers** ces actions et déclarations.

Le milieu de référence est donc un milieu où les élèves sont engagés dans la formulation et la validation, c'est-à-dire la recherche de savoirs (sous forme par exemple de critères de validité) donnant prise sur la situation ; c'est-à-dire, de savoirs sur ce que la situation a mis en scène comme expérience et leur a permis de manifester/construire comme connaissances.[21]

C'est donc un milieu où le professeur, s'il n'institutionnalise certes pas encore, ne peut rester neutre par rapport aux formulations et validations proposées : il est **tenu d'agir,** car les tâches qui lui incombent dans ce milieu vont se manifester par des actions (ré-actions par exemple aux actions, formulations des élèves). Sous quelle forme ? C'est ce qu'il convient d'examiner.

[20] Ce qui est curieux, c'est que le "Professeur pour l'élève" existe justement lorsque l'interaction avec les élèves est réduite. C'est donc bien que l'interaction, l'activité mathématique du couple enseignant/enseigné nécessite que le professeur y soit **pour lui-même**.

[21] Sur expérience, cf Conne 1998 : Relations entre savoir mathématique et connaissance : réflexions à partir du contraste entre école maternelle et enseignement élémentaire. *Conférence*, stage national IUFM, Bordeaux.

Faute pour l'instant d'une analyse plus détaillée, en particulier sur la façon dont peut se faire la dévolution[22], remarquons tout de même que les tâches du professeur dans ce milieu de référence contribuent à plusieurs fins :

— poursuivre la dévolution de la situation ;

— permettre et gérer les formulations publiques ;

— engager la problématique de validation (par exemple par des bilans, débats, confrontations sur les résultats des élèves) et la conduire jusqu'à l'obtention ou tout au moins la reconnaissance de critères de validité satisfaisants (visés par le professeur pour leur utilisation dans la phase suivante d'institutionnalisation, d'une part ; et adéquats au travail de la notion à ce niveau, d'autre part ; cf Chevallard, 1988b).

Le milieu de référence est de ce fait propre à la manifestation et la construction de connaissances du professeur. En effet celui-ci devra y prendre des décisions (engager un débat, favoriser une formulation, faire traiter un exemple ou un contre-exemple...), c'est-à-dire anticiper, choisir, mettre en relief une propriété... Or pour effectuer ces choix, ces anticipations, le professeur doit mettre en oeuvre des connaissances **mathématiques** et **didactiques,** pour pouvoir déterminer les conséquences de ses actions :

— conséquences au niveau du savoir mathématique : sur quels objets de ce savoir les formulations ou essais des élèves vont-ils déboucher ? (voir III) ;

— et conséquences au niveau didactique : quels effets sur le déroulement de la situation conformément aux attentes, sur les connaissances de la classe, sur les savoirs possibles à instituer, et sur le temps didactique ? (liste probablement non exhaustive...)

Nous aurons donc bien à examiner, d'une part, les actions du professeur dans le milieu de référence, d'autre part, les connaissances qu'il y met en jeu. Cependant si les tâches et les actions peuvent être décrites par un vocabulaire professionnel général, du moins dans un premier temps, ce qui permet de ne pas les spécifier complètement par rapport au savoir en jeu, ce n'est pas le cas des connaissances ; c'est pourquoi nous traitons ci-dessous (voir III) un exemple de situation d'enseignement du concept de fonction qui nous permet d'illustrer et de justifier nos déclarations théoriques.

II.3 ACTIONS ET CONNAISSANCES DU PROFESSEUR DANS LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

La recherche en didactique a depuis bien longtemps mis le doigt sur la difficulté qu'on rencontre chaque fois qu'on veut caractériser ce que **fait** le professeur dans sa classe, dès qu'on sort du contrat clairement balisé du cours magistral. Les travaux de Chevallard (Chevallard 1996) ont mis en évidence les tâches du professeur ; nous les avons aussi évoquées ci-dessus. Cependant, quand on a défini ces tâches, on n'a pas pour autant réglé le problème de **l'action** du professeur : **que fait-il, pour remplir ces tâches ?**

Si nous reprenons les termes de Margolinas (Margolinas, 19/10/97, exposé au Séminaire National de Didactique, Paris) :

[22] Sur la dévolution, voir Brousseau 1990, p. 324 et suiv. ; Sensevy, 1998, p.64.

« **Questions de vocabulaire** :
Action est un terme générique, que l'on aborde dans la théorie des situations par la détermination d'une situation d'action et des états du jeu. En ce sens, l'action d'un joueur est ce qui modifie les états du jeu.
Le mot *choix* désigne tantôt une décision effective, tantôt l'existence de plusieurs options pour l'action, ou encore de plusieurs issues correspondant à des actions différentes. C'est ce dernier sens qui est privilégié ici.
La *décision* est liée à l'existence de la conscience d'un choix pour le sujet.
L'anticipation garantit le lien entre la décision et l'issue de l'action. Dans une situation d'action, l'apprentissage par adaptation est lié de façon essentielle à l'existence d'anticipation.
Le problème que je me pose est donc de déterminer les choix d'un professeur dans une situation didactique donnée, d'observer les décisions qui sont prises par un professeur dans une situation didactique dans laquelle les choix possibles ont été étudiés, mais également d'évaluer quelles peuvent être les connaissances acquises dans une telle situation, envisagée comme une situation d'apprentissage pour le professeur. »

Bien que cette définition de l'action ne nous paraîsse pas lever toute ambiguité sur ce que recouvre le mot (dans le modèle, et dans le système) nous essaierons de partir de cette formulation, tout en prenant également en compte la méthodologie proposée par Robert. Parmi les axes d'analyse des tâches, introduits par Robert, certains sont aussi centrés sur l'enseignant et nous les reprendrons (cinquième et sixième axe d'analyse d'une situation, côté enseignant : Robert 1998 p. 180 - 181). Remarquons qu'il est difficile de décrire l'action de l'enseignant, ce qui explique qu'un certain nombre de chercheurs y aient travaillé dans différentes directions.

II. 3.1 Remarques sur la difficulté de décrire l'action de l'enseignant

Les difficultés rencontrées lors de cette tentative de caractériser les actions de l'enseignant, nous semblent intrinsèques à la description et la modélisation du rôle du professeur. Ces difficultés sont de deux ordres :

1) le professeur agit certes dans la classe mais ses actions sont de nature diverses (pédagogiques, didactiques) et fortement imbriquées : telle décision pourra s'avérer être de nature didactique (ayant pour effet de modifier le travail et son issue) alors qu'elle est « camouflée » en décision pédagogique (modifier les groupes de travail à cause du bruit, interrompre un type de travail pour des raisons d'organisation, etc...). Le contraire (décision pédagogique transformée en didactique) peut également exister, et on peut envisager tous les niveaux d'imbriquement entre les deux.

Celles qui nous intéressent ici sont les décisions et les actions didactiques (celles qu'on peut considérer comme faisant partie de la situation du professeur); il faudra donc les identifier et les caractériser.

2) nous avons évoqué la difficulté qu'il y a à identifier, en quelque sorte une par une, les actions du professeur. Le niveau de l'action pure est bien sûr trop rudimentaire pour nous permettre d'étudier l'évolution de la situation. Le professeur parle, écrit, se manifeste par une gestuelle... tout ceci pouvant être significatif par rapport à la gestion de la situation, ou pas du tout. La définition ci-dessus donne plus de prise, du moins dans le modèle : il reste à préciser

à quoi tout ceci correspond dans le système, c'est-à-dire à faire fonctionner ce modèle.

Convenons donc que les actions du professeur, dans la situation, sont ses *interventions*, c'est-à-dire bien ce qui modifie la situation, ce que nous allons préciser.

Modifier la situation, ce peut être :

— modifier l'incertitude de l'élève (confirmer par exemple que tel calcul est utile, ou bien engagé, ou au contraire faire bifurquer les élèves car l'enseignant s'aperçoit qu'ils ne vont pas là où il veut les envoyer);
— modifier le jeu (les règles), consciemment (si ça ne fonctionne pas, ou si l'enseignant pense que ça ne fonctionne pas); ou inconsciemment, sous couvert d'une décision mineure en apparence;

Dans tous les cas, nous pensons que ces interventions ne peuvent en aucun cas s'interpréter *en elles-mêmes*, mais qu'il est nécessaire de les rapporter à l'effet qu'elles ont sur l'élève et le milieu de l'élève (celui avec lequel il interagit)[23]; en ce sens, comme dit plus haut, le système antagoniste du professeur est le système *élève- milieu de l'élève*. Autrement dit, les interventions du professeur se repèrent par leur interférence avec le jeu de l'élève, par leurs effets sur la situation de l'élève (en termes de modifications ou au contraire de confirmations).

Ces interventions peuvent donner lieu, de cette façon, à des observables ; en effet nous faisons l'hypothèse que les effets de l'intervention du professeur sont repérables dans le milieu des élèves, et que ces effets permettent de déterminer de quelle nature est l'intervention. Toute intervention du professeur devra être replacée dans cette perspective; en effet, étudier une intervention du professeur « pour elle-même » ne donne guère de renseignement sur cette intervention dans la situation : les exemples sont nombreux, de professeurs ayant cru intervenir sur la situation et qui ont en fait parlé dans le désert; C.Margolinas en a d'ailleurs étudié (cf Comiti, Grenier, Margolinas, 1995). Hache et Robert ont aussi étudié des interventions de professeurs, suivant trois axes (cf Hache et Robert, 1998, p. 119) : la fonction du discours (relative aux décisions didactiques), l'objet du discours (mesurant le degré de décontextualisation) et la teneur du discours (relative aux sollicitations envers les élèves et à la distance entre le vocabulaire employé et le vocabulaire mathématique). Nous nous centrons plutôt sur le premier axe, c'est-à-dire les interventions du professeur et ses décisions d'ordre didactique; et nous tentons :
— d'une part, de situer ces interventions dans le milieu;
— d'autre part, d'étudier l'effet de ces interventions sur la conduite de la situation et sur le maintien (ou non) d'une composante a-didactique.

II. 3.2 Typologie des tâches du professeur

a) Dans le milieu objectif

Le professeur, nous l'avons dit, a plusieurs rôles dans le milieu objectif :
— engager la dévolution;

[23] Par abus de langage nous disons : "milieu de l'élève", "milieu du professeur"; il est clair qu'il s'agit du milieu avec lequel interagit l'acteur concerné, et que ce milieu n'est pas propre (n'appartient pas) à l'acteur, mais est une caractéristique de la situation : c'est le milieu avec lequel l'élève (ou le professeur) se trouve interagir dans cette situation.

— observer : le fonctionnement convenable de la situation de référence, les procédures des élèves, les erreurs, le fonctionnement de la classe (échanges dans les groupes et entre groupes, formulations, oppositions...);

— reconnaître les connaissances des élèves, et en tout premier lieu s'assurer que ceux—ci ont bien à leur disposition les connaissances nécessaires pour s'engager dans le jeu proposé;

— préparer l'étape suivante de la situation, de façon à ce que le jeu des élèves s'avère possible dans la phase de formulation et de validation.

Ces rôles induisent des actes, et nous en avions signalé quelques uns au II.2.2. Ces actions sont notamment celles relatives à l'observation systématique des élèves.

G.Sensevy également a pointé quelques gestes professionnels de l'enseignant dans le milieu objectif. Relevons donc certains de ces gestes :

— l'aide au travail de collaboration dans les groupes;

— la facilitation du dialogue entre élèves, par une aide au niveau du vocabulaire spécifique par exemple;

— la mise en évidence des conflits entre des interprétations contradictoires des élèves;

tâches signalées par Sensevy (Sensevy 1998, p.116 ; voir aussi Sensevy (à paraître), intervention à la Xème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques), auxquelles nous ajoutons :

— le contrôle du bon fonctionnement du milieu objectif;

— la réaction si la situation ne fonctionne pas (a priori ceci ne devrait pas se produire dans une situation a-didactique construite conformément à la théorie, du moins si elle est gérée par un professeur expérimenté, c'est donc un cas qui se présentera surtout pour une situation non contrôlée par cette théorie; cependant même dans une situation éprouvée, il peut y avoir problème si l'enseignant ne s'est pas assuré que les connaissances nécessaires au jeu dans la situation sont bien disponibles chez tous les élèves.);

— le relevé des procédures, essais, erreurs, réussites... des élèves, acte essentiel pour la poursuite de la situation. Ce relevé n'est en aucun cas une simple énumération; le professeur doit pouvoir classer les productions des élèves, et les mettre en correspondance avec des connaissances, des savoirs... ou au contraire y reconnaître un (des) élève(s) aux prises avec une ignorance institutionnelle, ce qu'A.Mercier nomme <u>un épisode didactique</u>..[24] Ce relevé permettra au professeur d'enclencher le processus de validation dans la situation d'apprentissage.

Dans une situation d'enseignement classique, ce relevé n'a pas lieu d'être; il y au moins deux raisons à cela :

— le professeur est par exemple dans un cours dialogué : dans ce cas il réagit *dans l'instant* aux remarques ou questions des élèves; il utilise ses connaissances et surtout ses savoirs mathématiques / didactiques pour ramener toujours le cours — les élèves — dans la direction qu'il souhaite leur voir prendre. A supposer que ce soit un cours magistral, les échanges avec les élèves sont alors réduits au minimum; la question de relever leurs réactions est alors sans objet. [25]

[24] Sur l'importance de la rencontre personnelle, par un élève d'une ignorance institutionnelle, voir Mercier, 1992, 1995; Sensevy, 1998.

[25] Voir Brousseau, 1996, cours à la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques, sur les contrats faiblement didactiques

— la suite du cours *ne dépend pas* des productions des élèves : en effet un cours classique suit, en principe, un chemin presque immuable qui est celui que le savoir a balisé. Il en est bien sûr tout autrement d'une situation a-didactique, où, nous le redisons, les procédures que les élèves pourront engager à la phase de validation dépendront de ce que le maître aura reconnu chez l'élève et dont il aura favorisé l'expression, et ce, d'autant plus que l'élève est jeune.

Ce point nous paraît essentiel; prenons un exemple dans l'enseignement élémentaire : dans la situation fondamentale du dénombrement (aller chercher en une seule fois une collection équipotente à une collection donnée); les enregistrements réalisés montrent l'enseignant interrogeant l'enfant sur sa réussite ou son échec, afin de lui permettre de poursuivre et, comme dans (Brousseau 1987) ci-dessus, de comprendre qu'il y a une question à déterminer. Et pourtant ces deux situations comportent une possibilité de validation matérielle; mais, ainsi que le dit D.Fregona (Fregona 1995) le milieu matériel n'est pas un milieu pour la validation. Validation peut donc signifier validation *à l'aide du milieu matériel*, ou bien validation de *l'action* par le milieu matériel, mais la validation des *connaissances* répond toujours à une question théorique (c'est une question de savoir : savoir réfléchi ou savoir savant), donc elle ne se produit pas *dans* le milieu matériel. Les phases de validation, par exemple sous forme de bilan collectif, jouent bien ce rôle de reconnaissance des procédures des élèves et des avancées du savoir auxquelles correspondent ces procédures.

Dans l'enseignement de la théorie qui nous occupe, l'analyse, le milieu matériel peut, dans certaines situations, n'être qu'évoqué, ou être constitué déjà d'outils sémiotiques, représentants de concepts moins élaboré que celui qui est visé par la situation; voire même d'outils sémiotiques du concept visé, mais provisoirement peu sophistiqués ; on comprend facilement qu'il est d'autant plus important que le professeur soit capable, à tout instant, de repérer où en sont les connaissances, les procédures des élèves; sinon il risque de s'engager seul dans le processus de validation, sans même le recours à un milieu matériel qui aide professeur et élèves à statuer sur les réussites ou les échecs de ces mêmes élèves. Pour ce repérage, le professeur a déjà besoin de connaissances mathématiques et didactiques. Pour engager favorablement la phase suivante, il lui faut de plus savoir *que faire* des connaissances des élèves (et des siennes!). C'est par ce *faire* qu'il met en œuvre ses connaissances dans le milieu de référence. C'est pourquoi nous avons dit que celui-ci est un milieu pour l'action du professeur.

b) Dans le milieu de référence

C'est dans ce milieu que s'exerce de façon privilégiée l'activité mathématique du couple enseignant / enseigné : situation d'apprentissage pour l'élève, situation, comme nous le remarquions ci-dessus, propre à la manifestation et la construction de connaissances pour le professeur. Dans ce milieu le professeur agit (physiquement, verbalement et intellectuellement), ce qui était déjà souligné par Margolinas (1993, p. 36) : « En effet, ce n'est pas le silence du maître qui caractérise les phases a-didactiques, mais ce qu'il dit. »

Les tâches du professeur dans ce milieu sont celles que définit Margolinas (Margolinas 1997) :

— choisir les éléments du milieu à mettre en évidence, voire fournir des compléments au milieu, si nécessaire : sous forme de questions, d'exemples... (voir exemple dans III ci—dessous);

— anticiper les conséquences des actions des élèves, des questions qu'ils proposent au débat, des compléments fournis;

— décider de poursuivre ou d'abréger les recherches des élèves, les débats, les formulations sur tel ou tel point...

Ces tâches sont déterminées par ses objectifs et ses intentions, telles que les pointe Robert (Robert 1998 p. 180) :

« Quels sont les objectifs de l'enseignant : s'agit-il pour lui de familiariser, réviser, introduire, actualiser, organiser des connaissances, créer des liens ? Veut-il faire agir les élèves, veut-il les faire formuler, valider, réfléchir, écouter ? Quel degré de difficulté prévoit-il ? Prévoit-il des décalages ? Quelles procédures sont attendues ? Quelles exigences sont prévues ? Y a-t-il des mises en garde, ou des compléments d'information ou méthodologiques prévus ? »

Ajoutons que dans ce milieu, il continue à trier, classer, les productions des élèves, et à les mettre en relation avec des connaissances (les siennes et celles qu'il peut en inférer chez les élèves).

Mais il peut aussi infléchir la situation, soit en l'enrichissant, soit en la faisant avorter.

Comme nous le disions, c'est en fonction de cette activité dans le milieu de référence que le professeur va pouvoir engager le processus de validation et d'institutionnalisation. Ainsi que le note Sensevy (Sensevy 1998 p.116) cette transition peut s'effectuer à travers deux gestes du professeur :

> « — la légitimation, (...) par exemple par des commentaires appropriés, de productions d'élèves particulièrement fructueuses;
>
> — l'aide à l'établissement, à partir de ces productions, de significations communes (emblèmes) qui puissent s'inscrire dans la mémoire didactique de la classe. »

On peut ajouter qu'il y a, à ce niveau, des questions travaillées dans la classe avec l'aide de l'enseignant, et qui ne donneront pas toutes lieu à une institutionnalisation; mais elles participent à l'élaboration des connaissances des élèves (voir a)), elles font partie du milieu de référence, et en cela elles sont nécessaires à l'entrée dans le processus de validation et d'institutionnalisation. C'est cet ensemble de connaissances, de questions, de productions, de rapports au vrai et au faux, que l'enseignant doit gérer avec ses connaissances.

II. 3.3 Connaissances de l’enseignant

Du point de vue de la théorie des situations, il est admis que ce qui peut provoquer l'apprentissage, donc la construction de connaissances, est l'existence d'un milieu pour l'action, action associée à des décisions; qu'une action n'est associée à une décision que si l'acteur a conscience d'un choix à faire, et que ce choix engage bien des connaissances significatives de la situation proposée. Mais il faut de plus que l'individu engagé dans la situation soit capable d'anticiper les résultats de ses choix; et cette anticipation ne peut venir que de l'absence d'adaptation automatique du milieu, autrement dit de l'impossibilité d'adapter au coup par coup ses actions, pour obtenir le résultat souhaité. Dans ce paragraphe, nous essaierons de définir les modalités de construction des connaissances du professeur d'un double point de vue : didactique et mathématique; dans l'exemple traité ci-dessous (au III) nous montrerons comment ces connaissances fonctionnent en interaction pour la gestion de la situation dans une phase de validation.

a) Connaissances didactiques

Les conditions d'apprentissage ci-dessus énoncées nous paraissent réunies dans le travail du professeur : en effet celui-ci doit anticiper le résultat de ses actions, l'ajustement au coup par coup lui est bien sûr interdit. Une « mauvaise « décision va « tuer » la situation, sans espoir de retour. Qu'est-ce qu'une « mauvaise » décision, dans le contexte d'une situation a-didactique ? A ce niveau d'intervention du professeur, c'est sans aucun doute une décision qui ne permet pas la validation, mais bien au contraire qui transforme l'issue du travail par une décision *d'évaluation* qui clôt la situation. Nous pouvons donc dire que les connaissances du professeur vont lui servir à ne pas s'engager dans ce type de procédure, mais bien plutôt à mettre en jeu, dans le milieu de référence, des critères de validité (Margolinas, 1993, p. 130; pour des critères de validité concernant l'enseignement de l'analyse, cf Bloch, 1995, et thèse à paraître). Le fait de mettre à disposition des élèves de tels critères de validité suppose par contre que l'enseignant soit capable de gérer le débat sur ces critères (cf Legrand, 1991, 1997), de fournir comme nous l'avons remarqué des exemples ou contre-exemples en réponse aux essais des élèves; puis d'engager le processus d'institutionnalisation en fonction des critères éprouvés avec les élèves, c'est-à-dire de gérer de véritables interactions entre connaissances des élèves, critères mathématiques reconnus, connaissances mathématiques de l'enseignant, et le milieu support de la situation. Il est clair que cela exige infiniment plus de connaissances de l'enseignant, que de conduire impertubablement le cours là où il souhaite le mener, en fonction de repères uniquement relatifs au texte du savoir mathématique.

La construction et l'utilisation de connaissances de l'enseignant nous paraissent venir du nombre de paramètres que celui-ci a à contrôler dans son milieu de référence (par rapport au quasi seul paramètre « savoir » que contrôle l'enseignant dans un cours dialogué classique) :

- le milieu de référence des élèves;
- leurs productions (essais, réussites, questions, erreurs, interactions avec la calculatrice ou tout autre instrument outillant le milieu);
- les connaissances des élèves visibles dans leurs productions;
- le contenu mathématique associé au milieu de référence;
- les critères de validité introduits, mis en jeu, discutés;
- les exemples supplémentaires éventuels, ou ceux déjà en place dans le milieu, permettant d'éprouver ces critères de validité, et les possibilités de leur traitement par les élèves;
- le résultat de la prise en mains et de l'essai, par les élèves, de ces critères de validité : en effet, l'engagement dans un processus de validation suppose que les critères de validité puissent être mis à disposition des élèves, ou trouvés par eux, afin que ceux-ci s'en saisissent et les testent; ceci nécessite bien sûr que le milieu de référence soit adéquat - qu'il soit suffisamment résistant à cette opération, et suffisamment riche pour répondre aux questions que se posent les élèves — et cela nécessite aussi un temps suffisant d'épreuve de ces critères.

Le fait que les critères de validité soient à tester par les élèves, sinon même à construire par eux, conduit à penser que, comme l'ont signalé un certains nombre de chercheurs, le professeur ne peut être sûr que la validation conduira bien à des éléments acceptables pour l'institutionnalisation; il devra donc, en fonction des critères construits ou reconnus par les élèves, adapter le processus d'institutionnalisation. C'est effectivement ce qui se produit, mais c'est une contrainte supplémentaire pour le professeur; de plus, s'il ne la respecte pas, on en revient à une situation d'évaluation et la situation ne peut plus vivre comme a-didactique, elle est de fait didactifiée.

De plus, du fait des interactions décrites plus haut, dans une situation a-didactique le professeur se « remobilise » dans l'activité mathématique, ce qui augmente l'incertitude de son propre côté.

Par rapport à ce que gère le professeur dans une situation classique, il y a là un véritable saut informationnel; le milieu du professeur comprend un nombre considérable d'éléments à maîtriser; en rapprochant cette situation du professeur conduisant la situation didactique classique, qui n'est pourtant pas évidente (le professeur gère aussi dans les deux cas toute la relation pédagogique dans la classe) il n'apparaît pas déraisonnable de penser que la gestion des situations a-didactiques s'avère d'une extrême complication pour un enseignant; ceci pourrait être un facteur d'explication au fait que les situations construites par des chercheurs n'aient guère pu être reprises dans des classes « ordinaires ».

b) Connaissances mathématiques

Lors des interactions signalées ci-dessus, le professeur met en jeu des connaissances mathématiques; celles-ci peuvent provenir d'une adaptation et réorganisation de ses connaissances universitaires, bien que cela n'ait rien d'évident (cf Bloch 1997). Cependant nous pensons que pour une part non négligeable, ce sont des connaissances spécifiques qui peuvent être construites et employées dans la gestion des situations, et que les situations a-didactiques, en raison des contraintes nombreuses que nous signalons ci-dessus, sont particulièrement propices à l'élaboration de ces connaissances. En effet les situations d'enseignement traditionnelles n'offrent que peu d'occasions au professeur de s'écarter du savoir déclaratif; cela serait possible lors de la résolution de problèmes, mais cette activité a disparu presque complètement de l'organisation actuelle de l'enseignement secondaire; les sujets de baccalauréat eux-mêmes n'ont plus qu'un très lointain rapport avec ce que pouvaient être autrefois les problèmes d'examens.

La circonstance qui peut favoriser, dans une situation a-didactique, la construction de connaissances mathématiques de l'enseignant, est sans conteste le débat sur les critères de validité. En effet c'est lors de cette phase que les connaissances et savoirs *mathématiques* sont discutés publiquement dans la classe, et qu'ils ont la possibilité d'être éprouvés, confrontés au milieu mis en place par le professeur et régulé par ses soins. Or les élèves doivent disposer de temps, et d'un milieu résistant, pour éprouver les critères; il en résulte que :

— soit le milieu prévu est suffisant, ce qui signifie que le professeur a mis en place, d'emblée, un milieu complexe, suffisamment riche pour être éprouvé et résister aux tests sur les critères de validité; il s'agit donc d'un professeur qui dispose des connaissances nécessaires sur la situation (bien que l'on puisse considérer que ces connaissances vont s'actualiser dans le jeu de *cette* situation);

— soit il s'avère insuffisant, et le professeur devra réagir en adaptant et en complexifiant le milieu, auquel cas cette adaptation lui apportera des connaissances sur la situation.

Mais dans les deux cas, le milieu comporte bien des critères de validité, et un débat possible sur l'efficacité de ces critères. Nous soutenons que là peut être l'origine de l'apprentissage du professeur. A l'inverse, dans un enseignement par ostension, les questions et critères relatifs au savoir ne peuvent venir dans le milieu — ni celui de l'élève, ni celui du professeur — et donc l'apprentissage du professeur risque de ne pas se produire.

Prenons deux exemples pour illustrer cet apprentissage (possible ou non) du professeur :

— i) dans Bloch 1997 (Connaissances de l'enseignant — pour l'enseignement - , in Petit x n° 45) nous étudiions un projet d'introduction de la notion de radian, en classe de Seconde, projet discuté avec des professeurs de lycée et collège stagiaires. Ceux-ci n'acceptaient pas d'admettre, en classe, avec les élèves, que les rapports des longueurs des arcs de cercles concentriques, interceptés par le même angle, étaient les mêmes que les rapports des longueurs des cordes, et que l'on pouvait écrire :

arc A'B'/arc AB = A'B'/AB = R'/R ; ils pensaient devoir le démontrer avec les rapports d'homothétie, sans se rendre compte que le fait qu'une homothétie de rapport $k>0$ multiplie les longueurs par k est un théorème *admis* dans tout l'enseignement secondaire, faute de pouvoir traiter de la rectification des courbes sans l'outil intégrale. Citons la suite de l'article :

> « Que se passe-t-il si l'enseignant n'accepte pas d'admettre ce résultat de la mesure des courbes, et choisit un autre mode d'introduction ?... C'est d'ailleurs ce qui est fait dans des manuels, prenons par exemple le Terracher de Seconde : après quelques rappels sur les angles et le cercle trigonométrique, on trouve des définitions du radian comme : « La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés. L'angle plat (180°) mesure π radians. ». (Terracher, Seconde, Hachette). Suit un tableau de proportionnalité. De même dans Déclic (Hachette). Le manuel de Seconde Pythagore (Hatier) définit 1 radian comme la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale au rayon du cercle, mais sans transition on en revient au tableau de proportionnalité. »

Nous disions alors que le savoir mathématique qui fait du radian une mesure des angles <u>pas comme les autres</u> est ici perdu pour les élèves. Il est clair que le choix fait par les manuels, de faire silence sur le problème fondamental de l'introduction du radian, ne peut permettre au jeune ou moins jeune professeur qui suit cette option d'interagir avec des questions et des critères pertinents vis à vis de ce savoir. Ajoutons que le savoir sur le radian est perdu pour l'élève, mais parfois aussi pour le professeur, qui ne s'est peut-être pas rendu compte, au cours de ses études, que le problème du radian s'exprimait de cette façon dans un environnement « enseignement secondaire ». Et d'autre part il n'est plus possible au professeur de travailler sur un rapport adéquat au savoir « radian » : en effet pour les élèves, une fois que le tableau de proportionnalité est donné, ainsi que des exercices d'application, il n'y a plus RIEN à savoir. Ainsi le contrat ne peut évoluer; Comiti et Grenier (1997) ont fait le même constat pour un professeur qui souhaite introduire les irrationnels mais ne donne à ses élèves que des tâches concernant des racines carrées de carrés de rationnels.

— ii) il y a, dans le programme de Première, une question sur laquelle les professeurs passent ordinairement très vite, et qu'ils ne trouvent guère fructueuse : il s'agit de la notion de fonction majorée, et de fonction admettant un maximum en un point. De fait cette question n'est pas productive, du point de vue des connaissances mathématiques, si l'on ne regarde que des objets donnés à l'avance (fonctions dites de référence par exemple, c'est-à-dire des fonctions monômes ou inverses de monômes, ou la fonction racine carrée) et que le professeur montre que certaines sont bornées, d'autres non, et que certaines admettent un minimum ou un maximum... Dans un tel enseignement par ostension, qui se conduit à l'aide de la représentation graphique dans le contrat institutionnel classique, aucune question mathématique ne peut émerger de la constatation que, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x^2$ admet un minimum en zéro...

Il n'en est plus de même si la situation conduit à la nécessité de construire des représentations graphiques de fonctions répondant à des conditions données; dans ces circonstances, les élèves sont amenés à faire des essais, à chercher quelles sont les contraintes maximales ou minimales, et l'on rencontre des questions comme :

« Quelle différence existe-t-il entre une fonction majorée et une fonction admettant un maximum ? » Cette question était issue d'une question pragmatique : « Lorsqu'on souhaite représenter une fonction majorée, faut-il forcément prévoir un maximum ? »

Cette question a vécu dans une classe de Première scientifique où était conduite une expérimentation pendant plusieurs séances; elle a évolué, devenant non plus une question sur le milieu matériel, mais une question dans la théorie mathématique des fonctions de variable réelle : « Toute fonction majorée admet-elle un maximum sur l'intervalle sur lequel elle est majorée ? et si non, comment se traduit la propriété d'être majorée ? »

Ce faisant le professeur a pris conscience que là résidait bien la question intéressante de cette situation, celle qui amenait à concevoir qu'une fonction continue bornée, mais sans extremum, sur un intervalle non borné, devait nécessairement admettre une limite[26], et que ces questions avaient une forte pertinence du point de vue de la nécessité, interne à la situation, de construire d'autres types de fonctions que celles que les élèves connaissaient déjà. L'enseignant a dû alors utiliser ses connaissances pour ne pas stériliser trop tôt la question; celle-ci s'est encore transformée, devenant : « Que peut-on alors dire d'une fonction non bornée ? » , puis : « Peut-on envisager une fonction non bornée sur un intervalle borné ? » Le but n'était pas de répertorier toutes les fonctions répondant à des conditions données, mais de montrer que le fait d'examiner quelques conditions simples (inégalités) conduisait à imaginer l'existence de fonctions non encore envisagées.

L'extrait de transcription reproduit en annexe et analysé au III ci-dessous montre alors que le professeur a dû mobiliser toutes ses connaissances pour gérer les propositions faites par les élèves pour répondre à cette question, anticiper les conséquences de ces propositions sur les critères de validité qui pouvaient être retenus, et sur l'avancement du savoir de la classe.

Il peut sembler surprenant qu'un professeur, ayant fait des études supérieures, ait besoin de vivre en classe une expérience sur des fonctions simples, pour se rendre compte de la pertinence de cette question, et réaliser où se situait la différence intéressante entre fonction bornée et fonction admettant un maximum. De même, dans l'exemple donné par Margolinas

[26] Démonstration : si l'on démontre qu'une telle fonction est monotone, le résultat est acquis d'après le théorème de croissance majorée. Démontrons donc qu'une fonction continue, sans extremum sur I, est monotone : par l'absurde il s'agit de montrer qu'une fonction continue, non monotone, sur un intervalle I, admet un extremum local. (En effet une fonction continue, non monotone, sur un intervalle I n'admet pas forcément un extremum global, on peut trouver un contre-exemple simple, par exemple 1/x cosx).
Les outils utilisés sont élémentaires, mais il est douteux que la démonstration puisse être trouvée par un élève de Terminale : f n'est pas monotone donc il existe a, b, c tels que par exemple : $a<b<c$, et $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. L'intervalle fermé [a,c] a pour image par f un intervalle fermé [m,M] et f atteint ses bornes : il existe donc $x \in$ [a,c] tel que $f(x) = M$. De plus x n'est égal ni à a ni à c puisque $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Donc f a un maximum local sur [a,c] .

(Margolinas 1997), une stagiaire de mathématiques, Béatrice, prend conscience que la consigne de relier un point et son transformé par un segment, dans des figures géométriques correspondantes, n'est pas adaptée au cas des rotations, ce qui n'a rien qui puisse étonner le mathématicien, même de niveau modeste.

Ceci renvoie à l'actualisation (conversion) de savoirs en connaissances dans une situation particulière (cf Conne (à paraître); Rouchier 1991), actualisation qui n'a rien a priori de plus évident que son inverse, la transformation de connaissances en savoirs; et confirme ce que nous évoquions au I, de la nécessité de remonter la chaîne de la transposition didactique (cf Conne 1994).

<u>II.3.4 L'ostension du point de vue des connaissances du couple enseignant/enseigné</u>

L'étude précédente nous amène à envisager ce qui peut se passer lorsque la situation d'enseignement ne permet pas à l'enseignant d'amener les élèves sur des critères de validité pertinents, c'est-à-dire lorsque le professeur a choisi un enseignement par ostension, comme dans l'exemple i) ci-dessus. Il est clair que dans ce cas, les élèves ne peuvent soupçonner les questions mathématiques que pose la notion introduite; il en est de même à l'exemple ii), si le professeur définit par ostension, sans problématique, les fonctions bornées, puis les maximums, minimums, les asymptotes... sans que des questions pertinentes ne puissent relier ces notions.

De plus le professeur ne peut lui non plus « se rendre compte didactiquement » du lien entre ces notions : mesure des angles et des arcs, dans i), fonction majorée et asymptote, dans ii).

Il en résulte que le professeur n'utilise pas, à supposer qu'il les possède, ses connaissances sur ces notions : il n'a pas à le faire, car *rien dans la situation, ni le milieu, ni les élèves (qui font, rappelons-le, partie de son milieu pour l'enseignement) ne le sollicite.* Il ne les construit bien évidemment pas non plus, si c'était nécessaire.

Le professeur dans ce cas, en fin d'apprentissage, vise exactement l'utilisation, par les élèves et par lui-même, des mêmes connaissances : par exemple dans le cas du radian, une utilisation correcte du tableau de proportionnalité entre mesure des angles en degrés et en radians - et encore, seulement des angles « remarquables », π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$... Pour ce qui est des fonctions, le professeur va demander, en contrôle, sur un graphique de fonction connue algébriquement, de repérer les coordonnées d'un maximum, et de répondre « oui » à la question : « La fonction f est-elle majorée ? », en donnant un exemple de majorant. Une remarque importante est que, dans ce cas, il manque forcément des éléments de validation : ainsi les élèves peuvent répondre pour une fonction majorée ou minorée, et encore, dans le champ de l'ostension présentée (par exemple si la fenêtre du graphique permet de le voir) mais non pour une fonction non bornée; et dans le cas des angles, aucun moyen de validation n'existe lorsqu'on sort du cadre étroit fixé par l'enseignement, c'est-à-dire pour des questions ne se rapportant pas directement au tableau de proportionnalité.

Ainsi des élèves de Première S se sont avérés incapables de répondre à la question : « Si l'unité choisie pour l'axe des abscisses fait correspondre 6 cm à π, par quelle longueur sera représenté le segment unité ?, et incapables d'imaginer une stratégie pour résoudre ce problème. De même, pour un nombre non négligeable d'élèves (et d'étudiants plus âgés), 1 radian s'obtient en reportant, au compas, une corde de longueur égale au rayon à partir d'un point du cercle. Il se peut que les élèves confondent ici le fait de mesurer un arc de cercle de longueur égale au rayon avec le fait de mesurer une corde, cependant les outils de validation sont bien défaillants dans cette question.

Nous pouvons donc dire que l'enseignement par ostension est caractérisé par le fait que l'enseignant ne fait usage, dans la situation, que des connaissances qu'il vise pour les élèves en fin d'apprentissage; si bien que les élèves et le professeur utilisent, durant la progression retenue comme en fin de séquence, les mêmes connaissances, pour traiter les problèmes que donne l'enseignant.

Il se peut qu'il ne soit nul besoin d'un modèle compliqué pour voir que l'enseignant n'a pas à investir beaucoup de connaissances dans un enseignement par ostension; l'intérêt de cette remarque réside, à notre avis , dans les deux points suivants :

— nous fournir un critère pour mesurer la part d'a-didactique dans une situation : pour que l'élève puisse s'emparer de critères de validation et les faire jouer, il est nécessaire que le professeur ait mis dans le milieu suffisamment de connaissances significatives, et que le jeu du professeur se soit bien exercé avec le milieu de référence;

— nous donner au moins un indice sur la part de savoir (analyse mathématique par exemple) qui figure réellement dans la situation. Précisons : si même le professeur ne fait pas d'analyse, pourquoi et comment l'élève en ferait-il ?

L'ostension et les connaissances de l'enseignant nous paraissent liées encore d'une autre façon :

- l'ostension peut être une ostension de ***savoirs :*** c'est ce qui se produisait dans l'enseignement des « mathématiques modernes ». Cela n'est pas forcément si facile à tenir, car le professeur ne peut alors sortir de sa position sur les savoirs : c'est la contrainte qu'impose ce type d'enseignement. Les savoirs ont alors tendance à devenir inflationnistes, sans que les connaissances ne puissent suivre, grâce à des exercices, applications des savoirs enseignés; en effet, dans cette organisation de l'enseignement le savoir prend toute la place, si bien que ne peut survivre d'heuristique de résolution de problèmes. Ainsi des étudiants ont pu se trouver en situation d'apprendre la théorie des formes différentielles, alors qu'ils se trouvaient incapables de résoudre le moindre système différentiel simple [27] ..

- Ce peut être une ostension de ***connaissances mathématiques*** : par exemple, lorsqu'un professeur enseigne l'intégration par parties en classe de Terminale, il montre le savoir (la formule) puis il explique comment s'en servir, sur des exemples de fonctions bien choisis.

- Ce peut être, encore, une ostension de connaissances ***non pertinentes*** par rapport au savoir : c'est ce qui se produit dans le cas du radian; et alors l'enseignant se trouve dans l'impossibilité de réintroduire, dans le milieu, des connaissances plus adéquates (on peut assister alors à des phénomènes de dédoublement de situation, cf Comiti, Grenier et Margolinas 1995, Comiti et Grenier, 1997).

- Ce peut être aussi une ostension de ***connaissances non mathématiques, culturelles*** par exemple : c'est ce qui se produit dans l'enseignement du concept de limite, dans l'enseignement français actuel, où tout repose sur l'intuition de l'infini, faute d'avoir fourni des outils de validation convenables pour apporter une preuve dans les problèmes de limites (cf chapitre 3).

[27] Nous donnons volontairement un exemple au niveau de l'université; il est clair qu'il serait facile d'en trouver à d'autres niveaux de l'enseignement.

Ce sont bien là encore l'enseignant et ses connaissances qui nous permettent d'aller mieux voir ce que fait l'élève (en tous cas ce qu'il a des chances de pouvoir faire) dans le processus d'enseignement / apprentissage.

III CONNAISSANCES DU PROFESSEUR DANS LE MILIEU POUR L'ENSEIGNEMENT : ?TUDE D'UN EXEMPLE EN ANALYSE

L'ingénierie évoquée ci-dessus (fonction majorée et maximum), est construite à partir d'un milieu graphique avec des outils de validation à la fois graphiques et formels.[28] Les élèves ont à leur disposition des feuilles où figurent des repères sur papier quadrillé ou non ; la tâche demandée est, soit de construire une représentation graphique de fonction possédant telle ou telle propriété, soit de prouver qu'une fonction dont la représentation graphique est donnée vérifie bien une propriété.

La validation est d'une part graphique : possibilité de tracer la RGC (Représentation Graphique Cartésienne, selon la terminologie de Chauvat) demandée ; soit, graphique et formelle, par le tracé de *chemins*. Un chemin (aller) part d'un point d'abscisse x sur l'axe des abscisses, est tracé parallèlement à l'axe des ordonnées jusqu'à un point sur la courbe de la fonction f, puis parallèlement à l'axe des x jusqu'à l'axe des y. Le nom d'un chemin est le couple (départ, arrivée) soit ici (x, f(x)). Un chemin réciproque ou retour part d'un point sur l'axe des ordonnées. Les chemins permettent de tracer des composées, des réciproques... et de tester les propriétés ; ainsi un graphique est déclaré fonctionnel si par tout point de l'axe des abscisses on peut mener un seul chemin direct (voir chapitre 5 ; cf. Alson, 1987). Il s'agit d'un fonctionnement *opératoire* du graphique (cf Chauvat 1997).

Ce milieu fournit un support suffisamment riche pour que les élèves puissent s'en saisir et tracer des RGC, éprouver des propriétés des fonctions ainsi représentées et valider ces propriétés ; il permet aussi (par le jeu des contraintes sur les intervalles, et sur les valeurs de x ou de y, qui sont des variables didactiques) de trouver des fonctions non antérieurement connues des élèves ; de tester des composées et réciproques de fonctions, des sommes et produits...

Les variables sont principalement :

— la nature du support (repère seul ou courbe déjà tracée ; sur papier blanc ou quadrillé) ;

— la nature des consignes (point à repérer ou courbe à tracer ; contraintes en termes d'égalités ou d'inégalités ; les inégalités portant sur des valeurs en nombre fini ou sur un intervalle, ce dernier cas exigeant une quantification) ;

— la présence ou non d'écritures formelles et leur complexité.

Les élèves disposent de fiches où sont dessinés des repères ; le but est de construire des RGC répondant aux spécifications données. Les contraintes imposées par la consigne vont croissant : ainsi l'une des premières consignes est : « f n'est pas bornée sur **R** ». Le premier cas (**R** tout entier) n'a pas fait émerger de questions, les élèves se référant à des fonctions connues dès la classe de Seconde. Il apparaît bien là que ce milieu graphique n'est en rien plus producteur qu'un autre lorsqu'il fonctionne de manière ostensive, c'est-à-dire en utilisant des fonctions déjà connues dont on exhibe quelques propriétés.

La transcription ci-dessous concerne la séance correspondant à la consigne :

[28] Pour une étude détaillée, voir chapitres 4 et 5.

« Sur]-2,0[, f est minorée mais n'est pas majorée. » A la séance précédente :

— les élèves ont discuté la possibilité d'avoir une fonction non majorée sur un intervalle borné ; ils sont en Première, donc ils n'ont étudié que quelques fonctions très simples, et pas du point de vue des asymptotes (cette notion ne leur est pas connue, tout au plus, en Seconde, ont-ils vu que si une fonction n'est pas définie pour une valeur de x, on trace une droite parallèle à l'axe Oy pour cette valeur) ;

— ils se sont mis d'accord sur le fait qu'on ne regarde l'intervalle « que d'un côté », c'est-à-dire que l'on décide de ne s'occuper que d'une des bornes ; en effet les élèves ont fait remarquer qu'une fonction non majorée pouvait l'être (ou plutôt ne pas être majorée) n'importe où sur]-2,0[, ce qui rendait le problème général très difficile à traiter. Le professeur a fait alors une intervention pour dire qu'on pouvait restreindre le problème ; qu'il était envisageable d'essayer de répondre à la contrainte « en un point », de dire que f n'était pas majorée d'un côté ou l'autre de l'intervalle par exemple. Les élèves ont alors dit : « On dira que c'est ‘‘en -2’’ qu'elle n'est pas majorée ». Cet échange nous paraît avoir pour but, du point de vue de l'enseignant, de recaler professeur et élèves sur une possibilité de recours à l'ostension graphique : en effet cela permet, sur le repère, de voir « monter » la courbe du côté de -2. Par contre cette décision est sans effet sur les éléments de validation, qui n'en seront absolument pas modifiés : la formulation de la définition formelle : « f n'est pas majorée sur]-2,0[« ne fait intervenir que des quantificateurs, et à aucun moment il n'est précisé *où* se trouve ce x tel que : f(x) > M.

On peut se demander dans quel but le professeur recale de cette façon le problème posé sur une possibilité d'ostension graphique. Il faut, nous semble-t-il, y voir un effet de son inquiétude : il doute très certainement que les élèves soient capables de parvenir à la définition formelle d'une fonction non majorée. C'est un effet (négatif par rapport au savoir) d'anticipation. Si les élèves ne réussissent pas, alors le professeur pourra toujours se rattraper en traçant la RGC d'une fonction ayant une asymptote verticale en -2.

Remarquons cependant que cet échange sort du cadre du contrat didactique habituel, ce qui montre bien l'efficacité de la situation : dans une situation de classe ordinaire, les élèves ne sont pas conduits à prendre en charge ce genre de questions, et d'ailleurs le professeur non plus. Ici le milieu permet de faire émerger des questions qui conduisent à l'introduction de fonctions auparavant inconnues des élèves. Si nous reprenons l'analyse de la séance, nous pouvons voir qu'elle se décompose en deux phases :

— d'abord les élèves sont en train de chercher un ou des critères pour écrire qu'une fonction n'est pas bornée ;

— puis ils éprouvent le critère trouvé sur un exemple fourni à leur demande par le professeur. A l'intérieur de cette deuxième phase on peut repérer également deux moments, le deuxième commençant lorsque le professeur demande des valeurs du majorant M.

Dans chacune de ces phases l'interaction professeur/élèves et l'activité mathématique sont visibles.

III.1 TRANSCRIPTION DE LA SEANCE DU 20/11/96

Remarque : l'observateur ne connaissait pas tous les élèves de la classe, si bien qu'il n'est pas

toujours possible de repérer l'élève qui est intervenu : dans ce cas l'élève est désigné par E et non par son prénom.
01 P : on fait le point sur les fonctions non majorées sur]-2,0[: les problèmes posés par le groupe du lundi... La courbe ne coupe pas l'axe x = -2, pourquoi ?
Si elle coupe x = -2...
02 E : il y a un majorant...
03 P : d'où un premier résultat : si f n'est pas majorée « en -2 », elle ne coupe pas la droite x =-2 *(Remarque : c'est une utilisation implicite de la contraposée par le professeur)*
-2 n'a pas d'image. comment exprimer que f pas majorée ? f majorée ?
04 E : m = f(x) = M
05 P : attention aux quantificateurs ; f majorée sur]-2,0[
06 E : sur]-2,0[il y a un majorant
07 P : écrivez tout ce qu'il faut
08 E : -2
09 E : ssi pour tout x ∈]-2,0[, f(x) = f(-2)
10 E : on ne peut pas dire... le majorant n'est pas forcément égal à -2, c'est M...
11 P : oui, d'où il sort ? ... il y a un majorant, il faut qu'on le mette... f(x) = M, il y a un nombre M tel que « x ∈]-2,0[, f(x) = M
Je vous donne 5 mn de travail personnel, exprimez qu'une fonction n'est pas majorée en essayant d'être rigoureux.
12 E : sur le même intervalle ?
(...Travail personnel des élèves : beaucoup d'essais de dessins, quelques f(x) > ...Le professeur circule dans la classe et relève les productions.)
13 P : qui veut proposer...
14 Claire et Magalie : f(-2) ? f(x)
15 P : c'est pas une formulation de f non majorée, c'est : f n'a pas d'image en -2 ; il faut faire intervenir M. Dis ce que tu avais dit :
16 Claire : y = + 8
(Claire et Magalie ont changé deux fois leur formulation entre ce qu'elles ont dit au professeur et leurs déclarations publiques)
17 P : autre problème...
18 E : f n'a pas d'ordonnée
18 E : + 8 on ne connait pas
20 P : oui, c'est pas un nombre ; on rencontrera ces problèmes dans les travaux sur les limites
21 Sébastien : pour tout x ∈]-2,0[, f(x) = M
22 P : (à mi voix) Waouh! elle va aller loin cette... fonction... *Des élèves tentent en vain de dessiner un graphique répondant à la condition qui vient d'être énoncée.*
(à voix haute) Christian ?
23 Christian : il n'y a pas de M tel que, pour tout x, f(x) = M
24 Sébastien : on prend un M potentiel, on montre que c'est impossible...
25 P : oui, c'est une autre façon de le dire
Quelques minutes de travail puis :
26 Fabien T. et Fabien B. : (ensemble, d'une voix forte et très assurée, pour toute la classe) quel que soit M, il existe x tel que f(x) = M
27 P : Ça, est-ce que ça dit bien ? qu'en pensez-vous ?
28 E : si f n'est pas majorée, f(x) n'est pas forcément supérieur...ça marchait pas tout à l'heure! *(E fait allusion à la condition du n° 21)*
29 E : c'est UN x
30 P : je traduis... si on se fixe M, on dit souvent en maths « aussi grand qu'on veut », on est sûr qu'au moins un des f(x)... aussi grand qu'on veut correspond à quoi ?
31 E : quel que soit M

32 P : oui... Fabien tu veux l'écrire ? (Fabien T. va au tableau et écrit : « $\forall$M, $\exists$ x tel que f(x)>M)
33 E : ça marche, ça ? Comme critère, je veux dire... si on en a une...
34 P : oui...(hésitation) bon, et bien, on va bien voir, hein, si c'est un critère efficace : on prend $1/x^2$ sur l'intervalle]0,1] , essayez de prouver...
(Discussion de l'observateur avec deux élèves : lors de la recherche, l'un avait pris un exemple et n'avait pas abouti.)
35 E : x^2 est aussi petit que je veux ; 1/0 c'est pas possible, c'est l'infini
36 P (au tableau) : ça c'est un raisonnement intuitif...
Essayez on va voir si ça marche... *(Travail des élèves à deux, environ 5 mn)*
C'est quoi un nombre très grand ?
37 E : par rapport à quoi ?
38 Es : 60 ; 10^{98}
39 Fabien T. : 0,2 c'est très grand par rapport à 10^{-99}
40 E : M c'est un majorant ?
(E sur sa feuille : 1/x . 1/x > 60 ; x.x> 1/60)
41 Christian : Prenons 60
42 Fabien : 0,2, j'essaye 0,2
43 Magalie : 10^{98} c'est grand... ça dépasse presque la calculatrice
44 Fabien B. : M, c'est mieux, on aura tout...
45 P : Bon, ben allez, on les fait tous... chaque rangée en fait un!
Le professeur fait faire dans la classe, puis au tableau par quatre élèves pour chacun des cas proposés : 60, 10^{98} , 0,2 et M quelconque.

Pour 60 : Christian au tableau écrit : $1/x^2 > 60$ d'où $x^2 < 1/60$; or x est positif donc x < 1/v60 ; on prend un x dans]0,1] qui est plus petit que 1/v60 et C. conclut.

Pour 0,2 : Alexandra au tableau écrit que $1/x^2 > 0,2$ or x<1 donc $1/x^2 > 1$ donc $1/x^2 > 0,2$

Pour 10^{98} : $1/x^2 > 10^{98} \Leftrightarrow x^2 < 10^{-98} \Leftrightarrow x^2 - 10^{-98} < 0$; une erreur sur $x^2 - 10^{-98} = (x - 10^{-98})(x + 10^{-98})$. Magalie conclut après rectification : si $x < 10^{-49}$ alors $1/x^2 > 10^{98}$

Pour M : Fabien écrit $1/ x^2 > M \Leftrightarrow x^2 < 1/M$ soit comme x est positif : x < 1/ vM . Fabien fait remarquer que l'on n'est alors pas sûr que le x trouvé soit bien dans l'intervalle posé au départ, c'est-à-dire]0,1] .

Il y a alors deux choix possibles : soit dire que l'on prend (x < 1/ vM) $\cap$ x $\in$]0,1] ; soit, et c'est ce que l'élève choisit de faire, de restreindre à M>1 pour être sûr que 0<x<1 ; de toutes façons dit-il, si c'est vrai pour tout M>1 c'est vrai pour tout M. Par contre les élèves qui n'ont pas fait ce calcul ont du mal à comprendre pourquoi l'élève au tableau a décidé que M>1.
46 E : je comprends pas pourquoi... on est pas sûr que M > 1...
47 Fabien *au tableau explique* : si M< 1, alors je prends 1 ; si x $\in$]0,1] , $1/x^2 > 1$; donc ça marche forcément...
On peut remarquer qu'à aucun moment les élèves ne mettent en doute qu'il existe bien, dans l'intervalle]0,1] , des x tels que x < 1/ vM .
48 P (commente ce point M>1 qui fait difficulté pour M littéral) : on a pris M>1, qui peut le plus, peut le moins... par exemple, pour $x = 10^{-49}$, il est clair que $1/x^2$ est plus grand que 1, que zéro, que 120... c'est clair ?

III.2 ACTIVITE MATHEMATIQUE ET CONNAISSANCES DES ELEVES

Notons tout d'abord que la recherche d'une condition pour qu'une fonction ne soit pas bornée, n'est pas une activité habituelle dans l'organisation de l'enseignement de l'analyse, tel qu'il se présente actuellement. Il y a à cela une raison déterminante : l'usage des quantificateurs est presque inexistant dans les classes, le programme précisant bien qu'aucune connaissance de logique n'est exigible des élèves, et qu'aucun cours de logique ne doit être fait jusqu'en classe de Terminale. Or dans l'ingénierie proposée sur les fonctions, certains tracés de graphiques posent d'emblée des problèmes de quantification. En effet les tâches auxquelles les élèves sont habitués consistent à placer f(x) pour quelques valeurs de x (en nombre fini) ; la tâche n'est plus la même si l'on demande que f(x) soit, par exemple plus grand qu'une autre valeur, sur tout un intervalle. Elle peut conduire à des objets non prévus. Ainsi la condition qui peut être donnée : $\forall x \in]a,b[$, $f(a) < f(x) < f(b)$ est interprétée d'abord par les élèves comme équivalente à : f est croissante sur [a,b] ; il faut tout un travail pour justifier qu'il n'y a pas que des fonctions croissantes qui vérifient cette condition.

Dans la classe où cette ingénierie a été expérimentée, les élèves ont donc pris en charge explicitement, à un moment du travail, des problèmes de quantificateurs. Or cette prise en charge est allée suffisamment loin pour que les élèves soient capables de proposer eux-mêmes, et de tester, des propositions mathématiques quantifiées, ainsi au n°21 **« Sébastien** : pour tout $x \in]-2,0[$, $f(x) = M$ » . La proposition faite au n°21 s'avèrant ne pas déboucher, des élèves proposent alors des reformulations tout à fait pertinentes, cf n°23 et 24 :

23 Christian : il n'y a pas de M tel que, pour tout x, f(x) = M

24 Sébastien : on prend un M potentiel, on montre que c'est impossible...

Les élèves se heurtent là à la difficulté d'exprimer logiquement ***qu'il n'y a pas*** quelque chose, et la proposition de Sébastien met bien sur la voix d'une solution ; les élèves manifestent des connaissances de logique. Les deux Fabien proposent ensuite la solution experte (qu'ils n'ont nullement recopiée quelque part, il s'agit d'élèves brillants) et ils la formulent pour toute la classe : ils sont absolument sûrs d'avoir trouvé la solution. Ce faisant ils empêchent le professeur de se situer sur le terrain de l'ostension.

La deuxième phase s'articule à ce moment du travail : si c'est bien un critère de validité, les élèves demandent à l'éprouver ; le professeur propose un exemple, et les élèves ont alors à décider quel « M potentiel » ils vont tester pour la fonction proposée. On voit les limites de leurs connaissances de logique : certains sont bien convaincus qu'en le faisant avec M quelconque, on aura fait tout le travail, mais d'autres ont besoin d'une valeur numérique pour se convaincre.

Ce test joue deux rôles dans la situation :

— on teste la fonction (savoir si elle est non bornée) ;
— mais on teste aussi le critère lui-même.

Les deux tests ne sont pas clairement différenciés par la situation ; implicitement, le professeur et les élèves admettent que si le critère proposé permet de conclure raisonnablement, avec des calculs qui débouchent et qui n'entraînent pas une complication démesurée, ce critère sera déclaré bon [29]. En fin de séance, l'institutionnalisation porte sur la propriété de la fonction $1/x^2$ de ne pas être bornée, et surtout la séance se poursuit sur le tracé d'un graphique représentant une fonction non bornée sur un intervalle borné. Il n'y a donc pas d'institutionnalisation sur le critère trouvé, ce qui est conforme au contrat de Première scientifique selon lequel, comme nous l'avons signalé, ce critère ne fait pas partie des savoirs déclarés à ce niveau.

Le choix de la valeur de M, pris en charge jusqu'à la vérification complète, est un moment important de construction de connaissances pour les élèves ; ce moment est habituellement négligé par l'enseignement : soit, dans les manuels où ce type d'activité est proposé, le choix de M ne fait pas partie de ce qui est à la charge de l'élève ; soit, à un niveau plus élevé, le professeur formalise et donc M joue comme réel quelconque, il n'est pas précisé (cf Bloch, thèse, à paraître).

Les professeurs pensent généralement que tous les élèves ont des connaissances sur l'ordre de grandeur des nombres ; ici il y a plus, le nombre choisi est plus ou moins apte à être représentatif dans une expérience qui emporte l'adhésion des élèves. Pour les élèves, le contrôle de M renvoie à des connaissances d'analyse liées à des connaissances de logique : lorsqu'on dit « quel que soit M, il existe un x tel que f(x)>M », on est surtout intéressé par le fait de savoir non pas que f dépasse 1 ou 2, ce qui est trivial, mais bien tout nombre aussi grand qu'on veut. Toutes les expériences faites en classe à ce niveau montrent que cette connaissance n'a rien d'automatique. Le calcul fait pour 0,2 , dans la séance proposée ci-dessus, a satisfait ceux qui voulaient que le « quel que soit M » ne se trouve pas en défaut, mais il a beaucoup moins convaincu que celui avec 60 ou 10^{98} .

Dans cette phase, le savoir sur les intervalles trouvés lorsqu'on cherche l'image réciproque d'un intervalle par une fonction numérique, fonctionne comme savoir chez le professeur mais comme connaissance pour les élèves.

III.3 ACTIVITE MATHEMATIQUE ET CONNAISSANCES DU PROFESSEUR

Le professeur, dans l'analyse a priori de l'ingénierie, a repéré les principales variables didactiques de la situation et les moyens de validation à disposition des élèves ; il est donc préparé à voir advenir certaines questions des élèves, mais l'articulation du support de l'ingénierie avec le programme de la classe de Première scientifique va néanmoins le mettre parfois en difficulté et être source de questions à résoudre de son côté ; c'est à cette occasion qu'il va devoir travailler ses connaissances.

---

29 Ceci est un exemple de ce que F.Conne entend par "utilité" : c'est un savoir parce que c'est une connaissance utile, qui fait que autant l'exemple permet d'éprouver le critère donné, que le critère permet de trouver un exemple. Telle est l'utilité de la connaissance en jeu. Et ce n'est qu'en regard de ce savoir qu'on peut alors considérer, en général dans l'après coup, que l'on a effectué cette tâche en deux sous-tâches (la seconde ne se définissant que par rapport à la première). Ceci illustre parfaitement l'ambivalence de la transposition didactique, rappelée au I.2 : "cette réalisation n'est pas à prendre pour elle-même (pour *cette* fonction) mais pour l'exemple", c'est bien ainsi que le professeur l'entend.

Dans un premier temps, à la demande des élèves de formuler « fonction non majorée », le professeur hésite pour savoir jusqu'où il doit s'engager dans la gestion de la logique mathématique et de l'utilisation de quantificateurs, ceci pour deux raisons :

1) le programme, comme nous l'avons signalé, précise explicitement qu'il n'a pas à traiter de ce domaine des mathématiques comme d'un savoir ;

2) la formulation de « f est non bornée sur l'intervalle]-2,0[« comprend un enchaînement de quantificateurs, et le professeur ne veut pas s'engager et engager les élèves dans la gestion de propositions formelles qu'ils ne pourront pas contrôler.

L'expérience lui donne tort sur ce point, car les élèves proposent des formulations effectivement très variées mais plutôt pertinentes ; en tous cas elles débouchent sur un critère parfaitement correct. Cependant on peut comprendre la crainte du professeur : on voit à cet instant les connaissances (vraies ou fausses) en jeu dans la situation augmenter considérablement, avec des propositions d'élèves très diverses : de y = + 8 à « f(x) différent de f(-2) » , et « pour tout M et pour tout x, f(x) >M » : le milieu est-il assez résistant pour permettre d'éprouver ces critères ? Le professeur doit anticiper l'effet de ces critères sur le milieu proposé, et les rétroactions du milieu ; c'est ce qui lui permet de savoir si la situation se déroule correctement. Rien ne lui garantit, à ce stade, que les élèves vont bien déboucher sur la bonne formulation quantifiée ; de plus les propositions des élèves évoluant rapidement au fur et à mesure qu'ils essayent de tester en dessinant des graphiques, le professeur doit suivre ce processus en évaluant à chaque instant ses chances d'aboutir. Cependant il accepte la logique de la situation : le milieu proposé (graphiques avec contraintes) est producteur de questions, et il doit permettre d'en éprouver les réponses. Insistons sur le fait que c'est à l'enseignant de réagir (aux propositions, procédures des élèves) pour savoir quel type de graphiques les élèves vont pouvoir construire avec les critères qu'ils essaient, d'où mobilisation de ses connaissances.

Dans la deuxième partie de la séance, deux élèves ont proposé un critère dont ils affirment qu'il est le bon ; la transcription montre alors que le professeur se trouve devant une décision importante : éprouver ce critère. Comme nous l'avons signalé, il y a deux questions que le professeur ne différencie pas à ce moment (mais la situation ne lui donne pas les moyens de le faire) : éprouver la fonction qu'il choisit pour savoir si elle est bornée, ou éprouver le critère même ; il choisit en quelque sorte de vérifier la pertinence du critère par son bon fonctionnement sur une fonction connue de lui, mais bien sûr pas des élèves. Remarquons que ceci reste implicite jusqu'au bout de la séance.

L'enseignant doit décider très vite, il choisit une fonction (qui doit être suffisamment simple pour que les élèves puissent s'en saisir et la traiter). Les élèves sont alors devant un travail qui n'est pas non plus usuel dans le contrat de cette classe : vérifier, sur un exemple pertinent, une proposition formelle. Leur choix porte sur M ; le professeur doit anticiper les conséquences de ces choix, afin, en particulier, de prévoir les difficultés auxquelles les élèves pourront se heurter en termes de valeurs de x, comme chaque fois que l'on cherche l'image réciproque d'un intervalle. C'est cette anticipation qui se fait pratiquement en même temps que la réaction aux choix de M, qui va permettre au professeur de décider lesquels de ces choix il valide, et s'il doit en rejeter certains. L'enseignant hésite d'ailleurs à laisser dans le milieu les quatre propositions formulées pour M ; pour ses connaissances à lui, il est clair que ces valeurs de M ne sont pas toutes pertinentes.

Il se trouve que les élèves résolvent avec beaucoup d'adresse les problèmes qu'ils rencontrent à cette occasion, aussi bien pour 0,2 que pour M quelconque ; cette circonstance n'a pas dispensé l'enseignant de ses anticipations. Il devra également servir de médiateur pour expliquer à toute la classe les raisons des choix des élèves, ce qui implique de reformuler, dans des termes compréhensibles pour tous, les problèmes rencontrés et les solutions retenues (synthèse de la séance, non étudiée ici). Il est à noter d'ailleurs qu'une partie de la structuration est prise en charge par les élèves (intervention des deux Fabien, puis explications sur l'intérêt de prendre M>1) ce qui n'a rien d'habituel ainsi que le remarque Robert (Robert 1998 p. 182).

Il nous paraît manifeste que, dans ce bref extrait d'ingénierie (moins d'une heure de classe), l'enseignant se trouve devant une complexité de décisions à prendre, d'anticipations, sans commune mesure avec ce qu'il rencontre dans un enseignement traditionnel. Comme nous l'avons déjà remarqué, les connaissances présentes dans la situation croissent vertigineusement lorsque l'enseignant a à gérer les choix des élèves sur des formulations symboliques et leur vérification. L'incertitude de la situation [30] augmente aussi de manière considérable pour le professeur : il est sur un terrain non balisé (par l'institution, et par les enseignements / apprentissages antérieurs) : en effet il n'a pas été prévu, ni réalisé dans les problèmes classiques, comme nous le disions, que des élèves de Première scientifique aient à travailler sur des démonstrations d'analyse comportant des suites de quantificateurs. La complexité des outils de validation du domaine de savoir visé n'est donc pas étrangère à cette complexification de la situation du professeur : mais c'est la composante a-didactique de la situation qui en est responsable au premier chef.

[30] Dont parle aussi Mercier dans les situations comportant une dimension a-didactique, cf Mercier 1995.

III.4 DIMENSION A-DIDACTIQUE DE LA SITUATION

III. 4.1 Connaissances et contrôle de la situation

Au début du paragraphe III, nous entendions illustrer la pertinence du critère de Conne relatif aux connaissances et aux savoirs : être ou ne pas être sous le contrôle de la situation. Il nous apparaît clairement que le professeur est bien sous le contrôle de la situation (la sienne, bien entendu, la situation du professeur) lorsqu'il hésite à s'engager dans la formulation d'une fonction non bornée ; il l'est puisqu'il ne *sait pas* si la situation lui permettra de faire déboucher cette recherche de critères. Il l'est également lorsque la demande des élèves le contraint à chercher un exemple, et qu'il n'a pas, dans un premier temps, envisagé les modalités possibles que pouvait prendre l'étude de cet exemple par les élèves. La phrase qu'il prononce à cet instant (n°36 : « C'est quoi un nombre très grand ? ») prouve qu'il n'imagine sans doute pas les difficultés des élèves par rapport à cette question ; et la réponse des élèves : « Par rapport à quoi ? 0,2 est grand par rapport à 10^{-99} « ouvre un éventail de possibles probablement plus grand que ce qu'il prévoyait, en lui montrant des connaissances insoupçonnées chez les élèves. Il n'envisage à ce moment-là que deux types de résolution : M quelconque et un « grand nombre pour la calculatrice », c'est-à-dire 10^{99} ; les choix des élèves le contraignent à prendre en compte des questions difficiles (de l'ordre des conditions suffisantes) qu'il ne souhaitait pas mettre dans le milieu de cette séance. Il y a bien interaction de connaissances : le professeur est obligé de tenir compte de cette « non-naïveté » des élèves en ce qui concerne les nombres « grands », pour continuer la séance, et cela le met quelque peu en difficulté car les élèves font des propositions non habituelles (0,2 ; 10^{-98}).

Il n'est pas sûr non plus qu'il ait prévu, dans l'analyse a priori, d'avoir à vérifier le critère de validité ; il doit utiliser ses connaissances mathématiques pour trouver rapidement une fonction simple, sur un intervalle convenable, dont l'étude soit suffisamment probante pour les élèves. Il s'agit bien d'interaction de connaissances : tout professeur de mathématiques peut exhiber une fonction non majorée, le problème est qu'elle soit compatible avec les connaissances des élèves et leurs possibilités de traitement au niveau de la technique (majorations, minorations, utilisation des quantificateurs).

Par contre la situation est sous le contrôle du professeur lorsqu'il anticipe les conséquences des choix des élèves pour le majorant supposé M, en matière d'intervalles sur l'axe des abscisses. Il fait bien fonctionner là des savoirs mathématiques sur la situation.

Il paraît clair que, conformément à notre analyse théorique, l'apprentissage du professeur se produit durant cette transformation de connaissances en savoirs. Certes un professeur très expert en analyse n'apprend pas grand chose dans cette situation sur les fonctions majorées (encore que... quelques professeurs interrogés sur la démonstration de la propriété évoquée plus haut, à savoir qu'une fonction bornée n'ayant aucun extremum sur un intervalle non borné admettait forcément une limite, ont dû réfléchir). Son apprentissage est par contre didactique : il évalue jusqu'où les élèves sont capables d'aller dans ce milieu, quelles connaissances ils sont susceptibles de construire sur les fonctions, bornées ou non bornées. Il apprend aussi, par l'intermédiaire de l'apprentissage des élèves, que la construction de fonctions plus sophistiquées ne se produira pas dans ce milieu ; il faudrait pour cela une autre problématique, un milieu apte à faire poser d'autres questions.

III. 4.2 Activité mathématique et dimension a-didactique

Du point de vue de l'activité mathématique de l'enseignant et de l'élève, il apparaît bien qu'elles sont conjointes, ou plutôt dépendantes l'une de l'autre : elles s'articulent durant tout le déroulement de la séance, elles s'alimentent l'une l'autre. En ce sens la situation qui n'était pas a-didactique, ménage cependant des moments où les élèves se saisissent du problème ; ils s'en saisissent même si bien que, par leurs questions, leurs procédures, ils contraignent l'enseignant à pousser plus loin qu'il ne le prévoyait son investigation mathématique de la problématique posée ; le professeur fournit quant à lui, des éléments à la réflexion des élèves. C'est bien ce que nous appelons une dimension a-didactique. Nous espérons avoir montré que cette dimension :

— d'une part, est dépendante des connaissances présentes dans le milieu **et** des connaissances que l'enseignant peut y injecter ;
— d'autre part se manifeste par une interaction de connaissances élèves / professeur.

CONCLUSION

Nous pensons avoir précisé quelque peu dans ce chapitre les conditions dans lesquelles des élèves de Première scientifique peuvent se saisir d'objets mathématiques (construction de fonctions non encore connues) et d'outils de validation et les faire fonctionner (écriture et contrôle de définitions comportant une suite de quantificateurs). Notre recherche nous a permis également de déterminer quelques éléments d'un milieu graphique qui offre effectivement aux élèves des possibilités d'interaction portant bien sur les objets visés (ici les fonctions). Enfin nous avons pu identifier quelques questions mathématiques qui s'avèrent productrices, au sens qu'elles permettent d'engager les élèves dans ce travail de production d'objets et d'énoncés, et qu'elles pourraient donner lieu à institutionnalisation de savoirs de l'analyse. Ces questions mathématiques ont également incité le professeur à mettre des connaissances dans la situation, voire à se positionner sur le terrain du savoir, même lorsqu'il ne l'avait pas prévu : elles ont eu pour effet de le déloger de la position d'ostension qu'il choisissait spontanément face à une situation dépassant les savoirs autorisés du curriculum.

Si notre problématique de départ était double : la recherche de situations comportant une dimension a-didactique, pour l'enseignement de l'analyse en fin de lycée, d'une part ; et d'autre part, la recherche d'un modèle permettant d'étudier le milieu avec lequel interagit l'enseignant dans ce type de situation, il nous semble que cette recherche débouche sur quelques résultats qui peuvent être utiles pour l'étude ultérieure des conditions d'enseignement de l'analyse dans le secondaire, et pour la recherche de situations permettant cet enseignement.

L'analyse que nous faisions dans l'introduction et la première partie, de ce que la non existence (de fait, sinon théorique) de situations fondamentales de la notion de fonction ou de limite renvoyait forcément à une étude de l'interaction des savoirs et connaissances du professeur et de l'élève : cette analyse se révèle compatible avec l'étude du modèle du « milieu du professeur » dans la théorie des situations, à condition de prolonger le schéma de structuration du milieu proposé par Margolinas à la suite de Brousseau. Nous proposons donc de modifier ce schéma de la façon suivante, pour tenir compte des situations où un milieu permet une confrontation des connaissances des élèves, mais où ce milieu n'assure pas à lui seul la production de connaissances ou l'introduction de connaissances néanmoins nécessaires.

Le professeur de la situation d'apprentissage est devenu le « Professeur pour l'élève », et le professeur P-1 est le « Professeur en action », conformément à ce qui a été dit du milieu de référence ; le professeur prend alors une place d'observateur en P-2.

Reprenons alors le schéma de Margolinas :

M3 : M - de construction		P3 : P - noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur
M2 : M - de projet		P2 : P - constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : M - didactique	E1 : E - réflexif	P1 : P - projeteur	S1 : situation de projet	tique

La première partie du tableau n'est donc pas modifiée.

M0 : **M - d'apprentissage**	**E0 :** **Elève**	**P0 :** **Professeur- pour-l'élève**	**S0 :** **situation didactique**	
M -1 : M - de référence	E -1 : E -apprenant	P -1 : **P - en action**	S -1 : situation d'apprentissage	a -
M -2 : M - objectif	E -2 : E - agissant	P-2 : **P- observateur**	S -2 : situation de référence	didac
M -3 : M - matériel	E -3 : E - objectif		S -3 : situation objective	tique

Ainsi modifiée, la deuxième partie de ce tableau nous paraît plus adaptée à l'étude de l'activité mathématique conjointe enseignant / élève dans les phases a-didactiques ou partiellement a-didactiques.

D'autre part dans ce chapitre, nous avons évoqué le problème de l'ostension, comme s'il était inutile d'étudier pour elle-même cette organisation (traditionnelle) de l'enseignement. En fait, nous avons à faire à deux modèles de l'enseignement : l'un est le modèle culturel implicite, qui est complètement naturalisé, de telle sorte qu'il arrive effectivement qu'on en parle comme s'il s'agissait d'une *réalité.* L'autre est la théorie des situations. Il nous apparaît, de par l'étude de la situation proposée en analyse en Première S, que ce second modèle est bien celui qui permet de rendre compte, non seulement de de la construction et de l'élaboration des savoirs de l'élève à partir de ses connaissances, mais aussi, tel que nous l'avons prolongé, des contraintes rencontrées par le professeur dans la diffusion des savoirs mathématiques : de fait cette dimension est scotomisée dans le modèle de l'ostension. Or les situations observées dans l'enseignement secondaire, ne comportant souvent qu'une dimension a-didactique restreinte, appellent de façon privilégiée une étude des contraintes de l'enseignant.

Le modèle qui est proposé dans ce chapitre nous semble permettre l'étude de ces contraintes. Dans notre projet de recherche de situations relatives à l'enseignement des notions de l'analyse, nous sommes amenée à envisager aussi bien l'enseignement traditionnel que des situations construites par des chercheurs en didactique. Dans tous les cas, il est nécessaire de disposer d'un modèle permettant d'évaluer :

— le rapport fictif ou effectif des élèves aux savoirs de l'analyse, et par conséquent :
— les connaissances mises en jeu par les élèves et l'interaction avec les connaissances du professeur.

Le modèle ci-dessus nous paraît remplir ce but. Il nous a permis de modéliser le travail de l'enseignant dans des situations d'enseignement au niveau secondaire. Il reste à définir les critères théoriques auxquels doit répondre un milieu pour l'enseignement des concepts de fonction et limite, qui permette la validation. Nous pourrons ainsi définir les situations fondamentales relatives à ces concepts ; ayant alors modélisé le jeu de l'enseignant, et les situations fondamentales, il sera possible d'envisager des réalisations empiriques de situations d'enseignement des fonctions et des limites.

CHAPITRE 3

CHAPITRE 3

L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE : STRUCTURATION DU MILIEU PREUVES ET VALIDATION SITUATIONS FONDAMENTALES

The Art of the Trio (vol 1)
Brad Mehldau

Il n'y a pas de chemin qui mène à l'infini,
pas même un chemin qui n'a pas de fin.
Ludwig Wittgenstein, Remarques philosophiques.

I. LES MILIEUX RELATIFS AUX OBJETS DE L'ANALYSE DANS LE SECONDAIRE

Bien que dans l'enseignement secondaire, nous l'avons dit, on puisse considérer que certains objets d'enseignement préalables à l'analyse ou en faisant partie, comme les nombres irrationnels (sous la forme de racines carrées), sont introduits dès le collège, notre étude portera, à partir de ce chapitre, sur l'enseignement des notions spécifiques de l'analyse au lycée, celles qui sont considérées comme signant l'entrée dans l'analyse : les fonctions et les limites. Considérons de plus que les limites représentent le point sensible de l'analyse au lycée : celui où l'on doit faire une incursion, plus ou moins brève suivant les sections (scientifiques ou non) dans le raisonnement analytique ; il nous paraît alors que l'étude du milieu relatif à l'enseignement du concept de limite nous introduit dans ce qui constitue un des objets de notre recherche, à savoir la spécificité de l'analyse et sa modélisation en termes de situation fondamentale.

I.1 STRUCTURATION DU MILIEU DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : DES PROCESSUS INFINIS AUX PREUVES NUMERIQUES

L'émergence de la théorie de l'analyse est fréquemment associée aux anciens paradoxes et questions sur les limites et l'infini ; de nombreux ouvrages en font état (voir la bibliographie sur histoire et épistémologie des mathématiques). Sans vouloir reprendre ici les questions déjà traitées dans d'autres recherches (voir par exemple Trouche, 1996, p. 85 à 89), il nous semble utile de situer notre projet de détermination d'un milieu pour l'analyse, par rapport à la problématique de l'infini. Il est nécessaire, en particulier, de replacer l'infini par rapport à la structuration des milieux : milieu pour poser le problème (dévolution), milieu pour résoudre le problème (milieu de référence) et milieu pour formuler et valider les résultats.

I.1.1 L'infini dans la dévolution du concept de limite

La limite d'une fonction f en un point où f n'est pas définie, mais admet un prolongement par continuité, n'est plus au programme des sections même scientifiques des lycées. Les limites ne peuvent donc être introduites que pour étudier les branches infinies d'une courbe représentative de fonction : soit lorsque x tend vers l'infini, soit lorsque la courbe admet une asymptote «verticale » en un point a. On peut aussi introduire les limites de suites, soit avant, soit après les limites de fonctions. Les limites de suites sont parfois vues comme plus simples à dévoluer que les limites de fonctions : en effet la variable est discrète, il est donc possible de poser le problème en termes d'infini potentiel ou opératoire (cf. Trouche 1996, p.86).

Les «problèmes d'infini » sont donc généralement à l'origine des questions que l'enseignement pose à l'élève sur les limites (l'ingénierie proposée au chapitre 7 ne fait pas exception à cette règle) : problèmes de suites, de séries... que se passe-t-il si l'on continue indéfiniment... L'infini est un déclencheur de questions d'analyse, car dans un processus de limite de suite, rien de ce qui est dit sur le calcul d'un nombre fini de termes, ne donne de certitudes sur la limite ; il y a donc **nécessité** d'envisager l'infini. Autrement dit, l'infini prend une place de choix du côté de la **dévolution** des problèmes d'analyse.

Cependant on peut se demander quelle sorte d'infini est en jeu dans les problèmes de limites ; et quel rapport l'infini entretient-il avec la preuve en analyse, puisque l'étude de la validation fait partie des objectifs visés dans ce travail. A l'encontre du courant formaliste longtemps dominant, certains mathématiciens invoquent un concept de l'infini qui se construirait à l'aide de nos expériences (incluant les expériences historiques de l'humanité). Citons G.Longo, logicien au CNRS (Longo 1999) :

> « La pratique historique de l'infini, l'ordre selon lequel nous organisons, mentalement ou dans le plan, les nombres et les arbres, si possible infinis, sont le fondement, les racines extrêmement solides de méthodes de preuve qui ne sont pas mécanisables. Ce qui revient à dire que dans ces preuves (…) il faut <u>comprendre</u> le concept d'infini en acte. (…) Mais de telles preuves n'ont aucunement besoin de renvoyer à des miracles ontologiques évoquant 'des vérités mathématiques inaccessibles'. Nous ne sommes absolumment pas contraints de ne raisonner que sur des suites formelles finies codifiables avec des 0 et des 1, ce qui est bien ce que font les ordinateurs, ni de déduire à partir de 'patterns matching' (si l'hypothèse <u>a la forme</u> 'A et A implique B', alors, de la seule forme des hypothèses, on doit déduire mécaniquement 'B'). Notre rigueur n'est pas simplement que formelle / linguistique : nous construisons une pratique de « l'infini » dans différents cadres conceptuels, et nous en faisons un concept mathématique (ou géométrique) rigoureux, un acquis difficile, obtenu après des siècles de travail. Les

mathématiques sont fort belles et fort solides du fait seul qu'elles se constituent dans notre rapport aux régularités du monde et qu'elles s'enrichissent des pratiques historiques du langage, du dessin, et de la rigueur ; et cela, bien au-delà des formalismes linguistiques finitaires, adéquats aux ordinateurs auxquels, certes, cet acquis historique, qui n'est autre que notre concept d'infini, ne suggère absolument rien. » *(Longo, 1999, pages 20-21 ; souligné par l'auteur).*

> *Et p.26* : « Sa solidité conceptuelle tient en son enracinement dans une pluralité de métaphores qui ont permis de concevoir, de proposer et de préciser graduellement à travers l'histoire, l'invariant mathématique. (…) (Mais) l'infini mathématique n'est pas une métaphore, mais bel et bien notre proposition d'un concept invariant construit à partir d'une pluralité d'expériences conceptuelles incluant des métaphores religieuses, des gestes de fermeture à l'horizon perceptif, des pratiques conceptuelles de travail sur des ensembles et des structures mathématiques infinis. »

Ce qu'affirme Longo, c'est que la définition formelle des limites n'est pas suffisante pour donner du sens au concept de limite ; que ce sens est basé sur les expériences d'infini, actuel ou potentiel, que l'individu peut avoir, y compris les expériences non mathématiques ; que le concept d'infini est l'invariant *mathématique* construit historiquement à partir de ces expériences multiples ; que « la stabilité (du concept d'infini) est acquise dans l'intersubjectivité » (Longo 1999 p.15), et que « sa représentation formelle (…) est essentiellement incomplète ».

Historiquement, on peut voir ce « passage » entre les conceptions de l'infini, cette transition entre infini potentiel et infini comme concept, à l'œuvre dans les écrits de C.S.Peirce (Peirce 1898) :

> « Cependant, l'agrégat de *tous* les nombres entiers ne peut pas être complètement décompté. Car le décompte complet supposerait que soit inclus le *dernier* nombre entier, alors qu'il n'existe pas. Mais bien qu'on ne puisse pas complètement décompter l'agrégat de tous les nombres entiers, cela ne nous empêche pas d'avoir une idée distincte de la multitude de tous les nombres entiers. Nous avons une conception de la collection totale des nombres entiers. *(souligné par I.B.)* C'est une collection potentielle indéterminée, mais déterminable. Et nous voyons que la collection totale des nombres entiers a une multitude supérieure à n'importe quel nombre entier.
>
> Pareillement, l'agrégat potentiel de toutes les multitudes abnombrables *(on dirait aujourd'hui le cardinal de P(**N**))* a une multitude supérieure à n'importe quelle multitude. Cet agrégat potentiel ne peut être une multitude d'individus distincts, pas plus que l'agrégat de tous les nombres entiers ne peut être entièrement décompté. C'est pourtant une conception générale distincte — la conception d'une potentialité. » *(Peirce 1898, huitième conférence, p. 318 de l'édition française).*

Il faudrait donc comprendre la recherche de limites de suites « ne se terminant pas » comme une expérience participant à la construction du concept d'infini. Dans cette perspective l'infini prend toute sa légitimité comme élément participant à la dévolution, dans une situation d'enseignement visant l'introduction du concept de limite. De ce fait également la distinction entre infini actuel et infini potentiel peut paraître artificielle, ou du moins peut-on affirmer qu'il y a continuité et non rupture entre ces deux infinis.

L'enseignement de la notion de limite vise cependant ce que C. et R. Berthelot avaient appelé «le *contrôle* des processus infinis » : c'est-à-dire le moyen de passer de la dévolution du problème à la recherche, la formulation, puis à la preuve. Mais la rupture se situe dès la formulation : si l'infini est pertinent pour poser le problème, il ne l'est pas pour le résoudre, du moins avec les méthodes de l'analyse classique. On est donc obligé de sortir du domaine qui a permis de poser la question, pour pouvoir la formuler d'une façon opérationnelle, et pour pouvoir la résoudre.

Ainsi dans l'ingénierie du flocon de von Koch (voir chapitre 6) la question est au début de la recherche (phase de dévolution) : que devient le périmètre de la figure lorsque n grandit indéfiniment? mais elle est transformée ensuite en : le périmètre dépasse-t-il n'importe quelle puissance de dix, pourvu que n soit suffisamment grand? où l'on ne retrouve plus l'infini. Lorsque l'on passe à la phase de validation, on ne traite plus que d'inégalités et de quantificateurs. Autrement dit, le milieu des preuves est détaché des représentations de l'infini, qui continuent, elles, à avoir du sens pour la dévolution. L'infini pourra donc fonctionner comme une **connaissance** attachée à la signification, et non comme un savoir, puisqu'il ne se retrouve pas dans les objets du milieu de référence. Comme l'infini se retrouve ensuite dans les formulations (les symboles — ostensifs — permettant l'écriture et la manipulation opératoire des limites), on peut prévoir une articulation délicate entre les trois phases :

— dévolution et entrée dans la problématique : **avec** un infini potentiel qui ne peut prendre racine que dans le culturel : l'infini est la marque du « sens » dans les problèmes de limite ;

— formulation et validation : **sans** l'infini : on donne la définition formelle (pour les mathématiciens formalistes, on passe aux choses sérieuses) ;

— usage opératoire des symboles servant à travailler sur les limites : **avec** l'infini : on réintroduit l'infini massivement dans les symboles, MAIS on ne dispose pas, actuellement, à ce niveau de l'enseignement, de **règles opératoires** sur l'infini, et on est dans une phase de formulation, validation, algébrisation des limites. Il y a là un *obstacle épistémologique*.

Il faut s'attendre à des symptômes rendant compte de cet obstacle : soit des raisonnements « infinis » non valides et conduisant à des contradictions (auquel le milieu devrait pouvoir apporter un démenti), soit, lors de la dernière phase, une manipulation « en aveugle » des symboles de limite et d'infini, non assise sur une validation. Il n'est pas sûr que le milieu de référence puisse pourvoir à tout, c'est-à-dire empêcher ces deux obstacles de se manifester ; et ce d'autant plus qu'il ne fait pas, explicitement, référence à l'infini. Les problèmes de l'articulation entre les connaissances sur l'infini, et les savoirs servant à la validation, ne pourront peut-être pas trouver un milieu où être traités.

I.1.2 Le milieu de référence : questions numériques

Dans la théorie des situations, le milieu de référence est celui du niveau -1 (voir chapitre 2 ; cf. Margolinas 1994), c'est-à-dire le milieu de la situation d'apprentissage, milieu des formulations et du début du processus de validation. Il s'ensuit que la milieu de référence ne doit pas permettre simplement de *parler* des limites, mais de formuler le problème en termes mathématiques contrôlables ou du moins destinés à être contrôlés. Nous avons déjà vu (chapitre 1) que la théorie mathématique de l'analyse classique s'était stabilisée sur des formulations faisant appel aux nombres réels.

Si donc la problématique de l'infini est dans le milieu de dévolution des limites, le milieu de référence est constitué d'éléments calculables ; or l'infini n'entre pas dans ces éléments : il n'y a pas de règle de calcul sur l'infini (voir ci-dessous I.2.). Plus encore, les calculs supposés «continués indéfiniment » conduisent à de nouveaux paradoxes, comme par exemple :

1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) +...

ou (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...

L'infini disponible n'apportant pas de moyen de contrôle des calculs, l'analyse classique a donc contourné ce problème en construisant des outils de contrôle numérique. Les concepts de fonction et de limite se sont stabilisés avec la construction des réels, sur une base numérique : H. El Bouazzaoui (El Bouazzaoui 1988, p. 66 à 103) a étudié l'évolution du concept de continuité depuis les Grecs (conception globale et géométrique, statut paramathématique), en passant par Euler (conception globale arithmétique, statut encore paramathématique) et Bolzano, Cauchy (conception locale et arithmétique, statut mathématique) jusqu'à la conception actuelle, topologique, due à Hausdorff.

La conception de Weierstrass, si elle n'est pas encore la conception topologique, est celle qui est opérationnelle pour les fonctions de variable réelle et qui a été conservée aujourd'hui. Trois remarques s'imposent à propos de cette définition de la continuité et des limites :

1) les efforts des mathématiciens du XIXème siècle ont tendu à débarrasser la définition de la continuité des infinitésimaux et de l'infini, c'est-à-dire à l'établir sur une base **numérique** dont le fondement est constitué des réels et de leurs propriétés ;

2) les outils de preuve ainsi construits ont abouti à une définition du concept de continuité et de limite complète et satisfaisante du point de vue de la validation, puisqu'ils permettent aussi bien de définir le concept de discontinuité que celui de continuité ; le concept de discontinuité ne prend d'ailleurs un statut mathématique qu'au début du XXème siècle. Les entrées par les paradoxes infinis ne permettent, pas eux de définir une fonction discontinue, non plus qu'une suite n'ayant pas de limite ;

3) ce sont les transformations du concept de fonction (cf. Youschkevitch 1981, El Bouazzaoui 1988), et la découverte par Weierstrass de fonctions continues non dérivables en tout point, qui entraînent cette évolution dans le concept de continuité ; or les nouvelles définitions données, tant pour les fonctions que pour les limites ou la continuité, supposent l'usage des **quantificateurs** : «arithmétiser » l'analyse, c'est renoncer aux *infiniment* grands et petits, mais c'est obligatoirement passer par des nombres «aussi grands » (ou «aussi petits ») que l'on veut.

Il s'ensuit que l'enseignement de l'analyse classique devra se baser sur ces éléments numériques quantifiés ; la détermination d'un milieu pour l'analyse, en particulier un milieu permettant la validation, suppose de déterminer quels sont les éléments incontournables qui doivent être retenus pour figurer dans ce milieu. Le milieu de référence que nous étudions comprend donc des formulations qui vont permettre de déboucher sur la validation : comme signalé au paragraphe précédent, les situations comme le flocon de von Koch (voir chapitre 6) manifestent une rupture entre la dévolution du problème, qui se fait en termes d'infini, et les premières questions «numérisables » qui vont conduire à la conclusion d'existence ou non de limite du périmètre et de l'aire du flocon.

I.2 UN MILIEU POUR LA FORMULATION ET LA VALIDATION EN ANALYSE : LES NOMBRES

I.2.1 « Représentation par un voisin »

L'analyse, par rapport aux «théories » antérieures des nombres, théories se basant toutes plus ou moins sur la mesure, a ceci de nouveau qu'elle considère les nombres non plus seulement comme <u>ce avec quoi on mesure</u>, mais également <u>comme objets qu'on mesure</u>. Ce nouveau point de vue sur les nombres s'est accompagné, historiquement, d'une formalisation des définitions des ensembles de nombres, et de la construction rigoureuse de l'ensemble **R**. En ce sens on peut penser qu'une connaissance insuffisante des nombres réels pourrait être un obstacle à l'enseignement de l'analyse ; cependant, bien que ce soit probablement exact, l'option prise par l'enseignement actuel est de ne pas consacrer de temps ni d'activités spécifiques à l'apprentissage de la notion de nombre réel, même à l'université. La construction de **R** n'est abordée qu'au programme de l'agrégation de mathématiques. Les rationnels n'ont pas beaucoup plus de place dans l'enseignement : les fractions et décimaux sont introduits comme mesures à l'école primaire ; au collège leur statut de nombre n'est pas clairement identifié ; A.Bronner parle de «vides didactiques » dans les choix transpositifs de l'institution, au sujet du passage des nombres décimaux aux réels (Bronner 1997).

Faute de disposer de connaissances solides sur les nombres, il faut bien que les élèves s'engagent dans la construction de l'analyse avec les outils numériques dont ils disposent ; et il est impossible de faire dépendre la construction d'une ingénierie didactique sur les fonctions ou les limites, d'un apprentissage préalable approfondi de la notion de nombre réel, pour des raisons évidentes d'ergonomie. Il faut donc faire le pari que ces connaissances numériques pourront au contraire être récupérées comme conséquences de savoirs de l'analyse. Si l'on prend l'exemple du nombre π , qui n'est pas vraiment vu comme un nombre (cf. chapitre 2) lorsqu'on le prend comme échelle ou comme mesure de la longueur du cercle, on peut penser qu'il pourra acquérir le statut de nombre comme somme d'une série, lorsque toutes les «limites » auront été récupérées ; ainsi plus tard dans la construction des savoirs de l'analyse, on peut dire que : «les nombres sont des limites » au lieu de : «les suites ont une limite » .

On peut penser que l’existence, autrefois, de montres analogiques (à aiguilles) d’usage très répandu, pouvait induire une vision de la topologie des nombres implicite et concrète, par l’avancée régulière des aiguilles et du temps. Dans les montres numériques, l’avancée du temps est devenue discrète. Cependant lorsqu’on demande à des élèves de Seconde de donner un phénomène continu, ils citent le temps (cf. Bloch 1995). Reste à savoir si ce continu du temps est lié pour eux au continu des nombres.

Autant qu’à un phénomène culturel, ce qui a peut-être pu infléchir ou déterminer le rapport personnel des élèves aux nombres peut être dû à l’approche des nombres imposée par l’enseignement depuis les années 80 : une problématique algébrique (quotients, règles opératoires et algébriques sur les « nombres » - sans spécification - et travail sur les « écritures » décimales ou fractionnaires), pas de prolongement de la problématique arithmétique / mesure qui était la règle au primaire, et pas d’identification de nouveaux nombres, ni de questions sur la nature des nombres trouvés, y compris les racines carrées. [31]

Ce qui peut être considéré comme caractéristique du travail sur les réels et les suites convergentes, en analyse, est la situation des suites adjacentes : supposons par exemple qu'on cherche la solution d'une équation $f(x) = 0$, dans un intervalle donné où l'on sait que cette solution existe ; ne connaissant pas f, ou f n'étant pas algébriquement simple, on cherche à encadrer la solution dans des intervalles emboîtés. Ceci revient à considérer l'intersection d'une infinité d'intervalles emboîtés ; et la théorie dit alors que, sous certaines conditions, cette intersection se réduit à un point. Cet exemple illustre ce que l'analyse a de spécifique, et aussi l'impasse que l'on peut rencontrer si l'on tente de se baser sur l'intuition : chacun des intervalles considérés ayant une infinité d'éléments, on peut penser que leur intersection en comporte également une infinité ; ou bien, que l'intersection d'une infinité d'intervalles emboîtés ne peut être que vide. Ici encore, les connaissances sur l'infini ne fournissent pas les outils de contrôle et de validation dont la théorie a besoin pour conclure. Remarquons que le savoir sur les suites adjacentes faisait explicitement partie du savoir dans les programmes jusqu’en 1970, qu’il s’est maintenu en classe de Terminale jusque dans certains manuels de 1983[32], et qu’il a disparu ensuite.

Les «règles du jeu » qui permettent de conclure dans le cas des suites adjacentes sont bien différentes de celles de l'algèbre élémentaire ; en algèbre une part importante du raisonnement s'appuie sur la reconnaissance de structure dans les énoncés, et sur la dénotation (cf. Drouhard, 1996) : on remplace un nombre connu par un symbole, par exemple une lettre, le but étant de faire des déclarations sur des nombres sans avoir à les spécifier. Mais la règle de remplacement est simple : tout symbole (lettre) figurant une expression algébrique peut être substituée par un nombre correspondant au domaine de validité de la dite expression, ou par une autre expression algébrique. Ceci autorise des niveaux successifs de remplacement, mais ne suppose, comme propriétés des ensembles de nombres, que celles que Y.Chevallard

[31] cf. Bronner (1997) pages 151 et suivantes ; Chevallard 1989.

[32] cf. Audirac et alii (1983), Terminale C, Analyse, page 224 (éditions Magnard). l’exemple des suites adjacentes est donné dans les applications traitées dans le cours.

note comme étant celles des systèmes de nombres (Chevallard, 1989), à savoir les structures algébriques.

En analyse, le but est de faire des déclarations sur du non calculable, comme dans le problème présenté ci-dessus (recherche d'une solution d'une équation non résoluble algébriquement). L'approche d'une situation fondamentale est donc celle de l'approximation d'un nombre inconnu par des nombres connus, aussi proches que l'on veut du nombre inconnu. Cette situation conduit à un type de raisonnement que nous appellerons : **règle de représentation par un voisin**. En effet en analyse on est conduit à travailler avec des nombres qu'on ne peut pas exhiber, et le travail consiste à manipuler des ostensifs qui renvoient à des nombres «proches » du nombre évoqué. Ce style de travail comporte des conséquences, au niveau de la théorie qui s'est construite pour contrôler cette règle, au niveau des ostensifs utilisés, et au niveau de la nature logique des énoncés.

En effet :

— cette règle oblige à postuler **R** séparé ; de plus le problème posé ci-dessus en termes d'intersection d'intervalles emboîtés conduit à poser **R** complet, afin que l'intersection ne soit pas vide ;

— la théorie a construit les règles de contrôle de cette représentation par un voisin ; ceci oblige en particulier à **contrôler la mesure des écarts**, d'où l'importance des outils comme la **valeur absolue** et les **inégalités** ; d'où aussi la place prise par les **intervalles**, et le débouché de cette problématique sur les voisinages et la topologie ;

— les quantités «infiniment grandes » ne sont pas traitées directement ; elles le sont donc par l'intermédiaire de l'axiome d'Archimède, ou plus généralement des majorations ou minorations, d'où l'importance des **inégalités**. Un autre outil est l'axiome d'induction, qui rend valide la récurrence (récurrence qui, rappelons le, a quasi disparu des programmes du secondaire en 1991) ;

— les quantités «infiniment petites » sont régies par la règle de représentation par un voisin et la majoration des écarts, mais **la quantification est indispensable** pour assurer l'approximation aussi loin qu'on veut ; on peut remarquer que cette quantification devient obligatoire dès qu'on admet qu'entre deux réels, il en existe toujours un troisième (densité) ; et que la situation des suites adjacentes débouche bien sur l'existence d'UN réel (complétude).

I.2.2 Algèbre et analyse

En algèbre la quantification existe bien entendu, mais elle ne joue pas le même rôle : elle est, en quelque sorte, en «chapeau » des démonstrations, pour indiquer le domaine de validité de celle-ci ; ou bien on l'emploie pour exhiber un élément d'un groupe, d'un espace vectoriel. De plus, les éléments de quantification, en algèbre, sont souvent isolables ou séparables, sans que la partie de phrase de logique ainsi isolée ne perde son sens. Ainsi on peut dire :

$\forall a \in \mathbf{R}, \forall b \in \mathbf{R}, \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

et si l'on ne garde que l'une des quantifications, la relation $\forall a \in \mathbf{R} \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ continue d'avoir un sens, bien que l'on ne sache pas quelle valeur prend b, ou qu'on puisse penser que la relation est quantifiée implicitement. D'ailleurs dans l'enseignement secondaire, actuellement, les quantificateurs ont disparu de tout le travail algébrique jusqu'à la Seconde ; ils ne sont réintroduits qu'en Première et surtout Terminale scientifiques, à un moment où le fait d'avoir posé **R** comme *« un fourre-tout contenant les nombres rencontrés jusqu'à présent »* [33] dispense de s'interroger sur la nature des nombres ainsi quantifiés (cf. Bronner 1997 page 154).

[33] L'expression est du manuel Hachette de Seconde, qui commente ainsi l'introduction de la notation **R** : *« L'ensemble **R** est quand même autre chose qu'un fourre-tout contenant les nombres rencontrés jusqu'à présent »* !

En algèbre les quantificateurs peuvent aussi changer le statut d'un objet, par exemple transformer une variable en paramètre ou en indéterminée ; mais l'expression algébrique continue d'avoir un sens même si on l'isole de ses quantifications. D'ailleurs Woillez (Woillez 1999) fait la même remarque :

> « En algèbre élémentaire le choix des inconnues, les quantificateurs seront traités de manière implicite et l'écriture des termes, la transformation des termes et les relations entre termes seront explicites. »

Il n'en est pas de même en analyse, où les phrases de validation ne peuvent souvent être isolées sans perdre leur sens. Ainsi l'expression «f(x) a pour limite L, quand x tend vers a » a un sens ; séparées, les deux phrases : «f(x) a pour limite L » et «x tend vers a » n'en ont aucun.

De même en algèbre, pour prouver que a = b, on peut par exemple prouver que a = c et b = c, pour prouver une inégalité, a < b, trouver c tel que a < c et c < b ; en analyse, si l'on prouve que a = b en prouvant que : $\forall \varepsilon$, $|a - b| < \varepsilon$, on utilise un répertoire qui n'est pas pertinent pour l'algèbre.

En algèbre, on peut spécifier les lettres, c'est-à-dire référer à des valeurs de vérité en arithmétique, ou encore à du calcul propositionnel ; ou bien il est plus facile d'instancier les énoncés [34]. En analyse, l'usage du calcul des prédicats est incontournable, car on manipule des énoncés quantifiés, implicitement ou non ; et des énoncés où les lettres peuvent représenter des variables, des éléments génériques, des éléments fixés (cf. Durand-Guerrier, 1996, p. 151 à 160 pour l'analyse logique d'items relatifs aux suites et fonctions dans un questionnaire posé en DEUG A).

Le plus important est qu'en analyse l'usage des quantificateurs **change les objets**. En effet en analyse le contrôle de la véracité d'une déclaration n'est pas ponctuel, dans la mesure où l'on manipule des objets, comme les suites ou les fonctions, qui réfèrent automatiquement à un ensemble continu, dense et complet. Ce contrôle comprend donc nécessairement le recours à des **intervalles**, des écarts, des voisins... comme nous l'avons noté ci-dessus. Il en résulte que la variation des quantificateurs permet **d'engendrer des objets différents** : autrement dit l'usage des quantificateurs est une variable cognitive pour l'analyse ; si donc nous pouvons construire une ingénierie où cette variable est accessible, ce sera une **variable didactique de la situation**. On trouvera au chapitre 5 des exemples de variation contrôlée de cette variable, dans l'ingénierie que nous avons choisie pour travailler sur les fonctions.

Ceci met encore l'accent sur le fait que le répertoire numérique discret (arithmétique) n'est pas pertinent pour l'introduction de l'analyse ; le répertoire algébrique s'avère lui aussi inadéquat, en raison de sa limitation quand aux objets sur lesquels peut s'effectuer le travail. En effet l'usage des quantificateurs et des nombres réels ouvre un champ quasi illimité aux possibilités de construction d'objets comme les suites et les fonctions ; il est clair que limiter ce champ aux seules fonctions obtenues comme des expressions algébriques de la variable serait se priver de la plus grande partie de l'analyse moderne. Même en restant dans ce champ, on se trouve vite empêché (non pas théoriquement, mais pragmatiquement, au niveau de l'enseignement secondaire) de construire d'autres objets que les objets initiaux, à cause de la très grande complexité que revêt très vite cette construction : envisager de traiter, par les seules méthodes de l'algèbre, des fonctions polynomiales ou rationnelles, ou à radicaux, conduit à des calculs vite très complexes. Le domaine algébrique ne jouit donc pas de cette propriété fondamentale, qui est de permettre d'engendrer (avec des connaissances raisonnables) des objets de l'analyse et de les traiter avec des méthodes adéquates au savoir de l'analyse. Il faut donc faire jouer ce rôle à un autre domaine de représentation, possédant des propriétés plus satisfaisantes par rapport aux objets de l'analyse et à leurs caractéristiques.

[3434] Nous parlons d'algèbre élémentaire. Il est clair qu'à un niveau plus élevé, l'imbrication des structures et des dénotations ne rend plus cela possible.

Ce que les mathématiciens n'ont pas jugé adéquat pour leur travail a cependant été introduit dans l'enseignement, où l'on a tenté en 1985 de construire les fonctions et les limites à l'aide des fonctions de référence (voir ci-dessous pour une étude plus détaillée ; voir aussi Artigue 1993).

Cette spécificité relative aux méthodes de preuve en analyse, et signalée dans d'autres recherches (cf. Legrand 1991), fait partie de ce que nous avions nommé le Système Spécifique de Preuve de l'Analyse (cf. Bloch 1995) ; c'est ce qui nous permet de caractériser le **milieu des preuves** pour l'enseignement de l'analyse. Bien que l'étude faite aux chapitres précédents nous ait amenée à élargir ce que nous pouvons considérer comme la théorie de l'analyse, dans ses différents aspects, nous garderons ce nom de **SPA** pour désigner ce milieu des preuves de l'analyse.

Dans cette optique, la règle énoncée ci-dessus (représentation par un voisin) et ses conséquences au niveau des outils nécessaires à la preuve en analyse, nous paraissent fondamentales pour la construction d'un milieu propre à la validation. Ce milieu devra donc comporter au moins une partie des éléments mentionnés ci-dessus, afin de jouer son rôle dans le jeu de la situation.

I.3 LE MILIEU DE LA SITUATION DIDACTIQUE

Dans la situation didactique, le professeur introduit un milieu d'écritures formelles qui permet de parler des limites et de les manipuler, moyennant des règles de type algébrique : on parle d'ailleurs à ce sujet d'algèbre des limites. Ces écritures formelles sont des **ostensifs** particuliers de limites, situés dans un certain registre de représentation : le **registre formel**, que nous étudierons au chapitre 4 pour les fonctions. Or ces ostensifs sont en partie constitués d'abréviations («lim ») et en partie de nombres et de symboles, dont le symbole « ∞ » . L'infini avait donc disparu du milieu de référence, et des phases de validation ; on le retrouve à ce niveau.

I.3.1 Ostensifs de limites et infini

En effet, alors que la validation en analyse ne se sert pas directement de l'infini (ne prend pas l'infini comme objet de calcul, comme outil de contrôle), les ostensifs de l'analyse, eux, renvoient fréquemment à l'infini : que l'on songe aux limites, aux ? , aux ? ; aux intégrales ... le symbole ∞ est utilisé comme «raccourci » de l'écriture d'une limite, que celle-ci soit limite d'une suite, d'une série, d'un produit, d'une intégrale... On pourrait dire que les ostensifs de l'analyse ont gardé la trace des anciens paradoxes de l'infini, même bien après que ces paradoxes aient été résolus ou éliminés.

Ceci entraîne une difficulté de l'enseignement : en enseignant l'analyse, on ne parle pas DE l'infini mais on parle AVEC l'infini, alors que l'infini n'est pas un concept mathématique, qu'il ne reçoit donc pas de définition.

L'infini n'est, en effet, pas pris dans des relations mathématiques, du moins pas à ce niveau de l'enseignement (début de l'enseignement de l'analyse). Certains travaux ont tenté de formuler les règles mathématiques de manipulation de l'infini, comme les **o** et les **O** de Bourbaki ; au niveau qui nous occupe, on ne peut pas écrire + 8 -8 , ou 8^2 par exemple ; mais on écrit lim (x →+ 8) f(x). Il n'est pas sûr que ces écritures formelles ne soient pas interprétées par les élèves comme des règles mathématiques sur l'infini ; d'ailleurs une des écritures les plus fréquemment rencontrées chez les élèves, est celle que l'on trouve dans l'étude des formes indéterminées : 8 / 8 .

Comme le note également Trouche (Trouche 1996), les ostensifs avec lesquels on manipule le concept de limite portent la trace des étapes qui ont marqué son émergence : de même que le symbole 8 , on trouve aussi des formulations dynamiques («tend vers ») et des formulations (dynamiques ou non) d'approximation : «quand x se rapproche de 3, f(x) se rapproche de L » ; «si x est suffisamment proche de 3, f(x) est aussi près que l'on veut de L » .

Bien que le concept de limite, historiquement, se soit stabilisé dans une formulation numérique, ces autres formulations sont reprises tour à tour dans l'enseignement ; elles participent aussi de ces moyens de médiation dont dispose le professeur pour commenter le discours mathématique, et au nombre desquels on compte aussi les représentations graphiques (or peut-on *dessiner* une limite, ou une fonction qui tend vers une limite?). Cependant les formulations dynamiques, temporelles, ou d'approximation, des limites, tout en restant du côté des moyens d'enseignement dont dispose le professeur, se trouvent écartées de la formalisation des résultats de l'analyse, ce qui ne leur donne pas le même statut que les formulations recourant à l'infini : si celles-ci sont moins dans le discours (les commentaires) elles sont par contre dans le symbolisme.

I.3.2 Obstacles relatifs au traitement de l'infini dans l'enseignement

Ceci peut être source de difficultés importantes, surtout à l'étape des débuts de l'enseignement de l'analyse. Suivant nos observations, les professeurs ne consacrent pas un temps important à l'explicitation du sens de ce symbolisme, lorsqu'ils en parlent, ce qu'ils ne font pas tous. Des travaux (Cornu 1983, Berthelot 1983, Advanced Mathematical Thinking 1991) ont étudié certaines conceptions des élèves sur les limites ; ces conceptions sont fortement influencées par le vocabulaire employé à propos des limites, et par le sens usuel de ce vocabulaire, deux constatations qui n'ont en soi rien d'étonnant.

On emploie donc, pour parler des limites, un vocabulaire et surtout un symbolisme qui font appel à l'infini, lequel n'est **pas (encore) un outil pertinent** pour la validation de ces mêmes limites. De plus la difficulté liée à ce double usage de l'infini (usage pour la dévolution, usage dans les ostensifs) et à ce manque d'usage dans la validation, cette difficulté n'est pas systématiquement prise en compte dans l'enseignement. C'est un phénomène qui reste le plus souvent implicite dans le discours de l'enseignant ou dans les manuels (voir II.1 ci-dessous).

Il s'ensuit que l'élève use des symboles de l'infini ($+\infty$, $-\infty$) dans des situations où le référent est perdu de vue, ce qui est normal ; il en use aussi pour la validation, ce qui ne convient plus. Ainsi lorsque nous demandons, dans le questionnaire (voir chapitre 7) posé à des élèves de Première, de justifier une limite, nous obtenons des réponses comme :

«car u_n tend vers L » ; ou : «car lim u_n (n→ +8) = L ». On tourne en rond dans des formulations équivalentes, plus ou moins approximatives, de la limite, où les écritures formelles prennent la place de la justification. Pour les élèves, il y a certainement une référence au sens, c'est-à-dire aux situations qui ont permis la dévolution. Mais la référence au milieu des preuves est perdue, alors même qu'on demande une justification.

On peut donc penser que si l'enseignement base l'apprentissage des limites sur l'infini, c'est-à-dire sur une intuition qui fonctionne comme une aide à la dévolution et comme une connaissance, cela amènera des obstacles : en effet ce que le milieu des preuves nécessite, ce sont des procédures numériques.

I.4 CONNAISSANCES ET SAVOIRS DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE LIMITE

Dans les objets mathématiques mentionnés plus haut comme étant des ostensifs de limites, ou des composantes du milieu de référence, ou des éléments du SPA, il est nécessaire d'identifier plus précisément ceux qui vont fonctionner comme des **connaissances**, et ceux qui feront partie des outils de validation ou des savoirs institués, et qui fonctionneront donc comme des **savoirs**. Cette distinction nous permettra d'étudier l'équilibre des uns et des autres dans l'enseignement, actuel, passé, et dans les ingénieries ou scénarios proposés par les chercheurs. Bien sûr il peut paraître paradoxal de prétendre identifier des connaissances ; cependant sans aucunement prétendre à l'inventaire exhaustif, cette liste n'a comme but que de nous permettre de reconnaître les connaissances que nous rencontrons et d'analyser les scénarios proposés pour l'enseignement des limites. Du reste certaines de ces connaissances sont *publiques*, et elles sont donc partie prenante du travail mathématique de la classe. Les connaissances envisagées le sont de plus dans un milieu non instrumenté par des calculatrices graphiques et logiciels de calcul formel. Un milieu instrumenté met en jeu, non seulement les connaissances repérées ci-dessous, mais des connaissances spécifiques à l'instrument utilisé (voir II.2.1).

I.4.1 Les connaissances

a) Exemples de connaissances préalables

1. Les nombres entiers, en particulier les «grands » nombres entiers.
2. Les ordres de grandeur et les relations entre eux : si un nombre est «grand » , son inverse est «petit » ; si un nombre est «grand » et positif, son opposé est «grand » et négatif ; l'inverse d'une puissance de dix d'exposant positif est une puissance de dix d'exposant négatif.
3. Les raisonnements de type arithmétique :

pour tout n, $n + 3 > n$; pour tout n plus grand que 2, $2n > n + 1$; ils se distinguent des raisonnements algébriques en ce sens qu'ils ne renvoient pas à une logique d'équation à résoudre mais de condition suffisante et d'induction (si c'est vrai pour un nombre entier, c'est vrai pour le suivant) ; c'est à partir de ce type de connaissance que se construit aussi l'intuition de l'infini opératoire.

4. Les fonctions, les majorations.
5. Les connaissances graphiques.
6. Les connaissances relatives à l'emploi de la calculatrice graphique.

b) Exemples de connaissances à construire

1. L'inverse d'une suite / fonction qui tend vers l'infini est une suite / fonction qui tend vers zéro, et réciproquement mais il y a un problème de signe.
2. Plus généralement, les limites et les signes sont dépendants d'une certaine façon : une suite positive a une limite éventuelle positive ou nulle, et réciproquement une suite qui a une limite positive est positive à partir d'un certain rang.
3. L'emploi de «$\rightarrow$ » et le contrôle de cet emploi.

Différences par exemple avec le signe «$\rightarrow$ » : «$\rightarrow$ » n'est pas symétrique, ne permet pas la transposition, le terme à gauche de la flèche est une fonction (donc il comprend des variables), le terme à droite est un nombre, mais le fonctionnement n'est pas celui d'une équation ; on ne peut donc pas transposer une partie fonctionnelle du terme de gauche vers la droite, ...

4. Si 1/n tend vers zéro, alors $1/(n-1) \rightarrow 0$, $-2000/(n+19) \rightarrow 0$, etc...

Cette connaissance sera institutionnalisée plus tard, et généralisée, sous la forme : une fraction rationnelle est équivalente, quand $x \rightarrow +\infty$, au quotient des termes de plus haut degré.

5. $\lim n^2 - n = +\infty$, autrement dit c'est n^2 qui «l'emporte »
6. Connaissances relatives à la «représentation par un voisin » : manipulation des quantificateurs et des inégalités, dans des phrases formelles complexes qui comprennent à la fois succession de quantificateurs, variables, fonctions, inégalités...
7. Connaissances relatives aux tâches de type : recherche de l'existence d'un nombre (la détermination algébrique n'est en général pas possible, d'où recherche par des théorèmes d'existence et/ou approximation par un voisin).

I.4.2 Les savoirs

En dehors des définitions, théorèmes, ... les savoirs comprennent des démonstrations, et donc des règles de démonstrations, voire des régularités repérées : par exemple, dans la démonstration de la limite d'une somme de fonctions, le fait de «couper ε en deux » , est un moyen de démonstration classique dans les calculs de limites, et qui fonctionne comme un savoir dans le champ de l'analyse. On peut citer aussi toutes les **techniques** de majoration des restes de séries, de découpages d'intégrales... Ces techniques ne demeurent pas à l'état de connaissances ; c'est leur usage généralisé qui les fait passer au rang de savoirs. Dans la classification de Conne (Conne 1992) elles prennent place au rang de savoirs réfléchis, voire même, si elles sont systématisées à un niveau d'enseignement supérieur, de savoirs savants.

La fonction d'organisation des connaissances, que prennent les savoirs, est visible dans cet exemple : des connaissances sur les nombres, les limites, l'usage du signe $\rightarrow$, la représentation par un voisin... se trouvent contrôlées par les savoirs : ces savoirs répondent à la question : «Comment on fait systématiquement pour ... » ... pour représenter un nombre par une suite de décimaux, pour trouver le bon ε dans une démonstration de limite, pour majorer un reste....

Relevons dès maintenant l'importance que prennent les signes qui matérialisent le travail sur les limites. Nous avons noté l'usage de l'infini et des signes qui le représentent ; du langage des limites ; des quantificateurs ; des inégalités, des intervalles ; de l'usage des flèches... Il apparaît que les **ostensifs** disponibles dans le travail de l'analyse, jouent un rôle important, qu'il faudra préciser.

A ce stade il est intéressant de regarder, à la lumière des considérations qui précèdent, comment le problème d'introduction de l'analyse est envisagé et éventuellement résolu, d'une part dans l'enseignement traditionnel, et d'autre part dans d'autres travaux concernant ce champ de savoirs.

II. ETUDE DE QUELQUES PARADIGMES D'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET RECHERCHES SUR L'ENSEIGNEMENT

II.1 LE MILIEU DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DEPUIS 1965

Nous avons évoqué au chapitre 1 l'instabilité de l'enseignement de l'analyse dans l'enseignement secondaire, et les nombreuses réformes qui ont vu apparaître puis disparaître la définition formelle de la limite, apparaître puis s'atténuer les fonctions de référence et le recours aux majorations, minorations... Nous sommes maintenant en mesure d'analyser ces fluctuations avec nos outils théoriques : SPA, savoirs, connaissances et niveaux de milieux.

II. 1. 1 Les années soixante

Les années soixante voient l'introduction des définitions formelles des limites de suites et de fonctions, en classe de Mathématiques Elémentaires (actuelle Terminale). Cependant les suites occupent une place réduite, et sont traitées comme un cas particulier des fonctions, dans le même chapitre. L'étude d'un manuel très utilisé (Cagnac et Thiberge, éditions Masson, 1963 ; pages 25 à 36, voir annexes) fait apparaître les caractéristiques suivantes :

a) Structure du manuel

Le manuel présente un exposé de cours, avec quelques exemples, et des exercices. Pas de travaux dirigés ; peu de schémas ou de graphiques. Ce n'est qu'à partir de la réforme de 1971 qu'il est recommandé de faire appel aux *représentations graphiques*. Ce terme ne figure d'ailleurs pas dans les manuels des années soixante.

Le cours est décomposé en paragraphes, numérotés de 1 à 292 du début à la fin du tome Analyse. Les démonstrations sont faites dans le corps du texte (à moins bien sûr qu'il ne s'agisse d'un résultat admis, ce qui est signalé dans son énoncé).

La typographie est serrée : petits caractères, et remarques en caractères encore plus réduits, insérées dans le texte.

b) Contenu

Toutes les définitions sont données en gras, et complètement : définition d'une fonction ayant pour limite L en x_0, limite à droite et à gauche ; extensions des notions de limite (limites «infinies ») ; asymptote. Ces définitions sont d'autre part abondamment *commentées*, par des remarques, exemples ; il y a quelques rares schémas étiquetés «interprétation graphique » ou «interprétation géométrique » .

c) Introduction de la problématique, validation

Les limites sont introduites par les définitions en ε et α, il n'y a donc pas à proprement parler de milieu pour la dévolution. Il y a bien un milieu pour la validation : c'est celui des preuves, à savoir le SPA, tel que nous l'avons précisé plus haut. Il y a aussi un milieu de référence qui ne se réduit pas à celui des preuves, c'est-à-dire un milieu pour parler des objets mathématiques dont on s'occupe : on le trouve dans les nombreux exemples, remarques, commentaires, insérés dans le texte.

d) Connaissances et savoirs

Tous les savoirs correspondant à ce niveau d'enseignement sont présents, par des définitions et démonstrations quand elles sont prévues.

Les commentaires maintiennent dans l'ouvrage un équilibre entre connaissances et savoirs (voir page 27 : *emploi du signe* $\rightarrow$; page 27 toujours : *remarques sur la définition précédente* ; page 30 : *question de terminologie, abus de langage* ; page 32 : *problème pratique, comment mettre f(x) sous la forme souhaitée*).

Par rapport à la classification que nous avons donnée au I.4.1 :

— les «connaissances préalables » de 1 à 4 sont présentes ; la connaissance 5 (fonctions, majoration) est présente mais en partie à construire ; 6 (graphique) est peu utilisée ; 7 (calculatrices) est évidemment absente ;

— les «connaissances à construire » de 1 à 6 sont présentes ; 7 est évoquée dans des théorèmes, mais la recherche d'un nombre par un algorithme de suites convergentes (un point fixe par exemple) ne fait pas partie des tâches habituelles demandées aux élèves ; on ne la trouve d'ailleurs pas dans les sujets du baccalauréat.

Commentaires

L'impression générale est d'un exposé complet, mise à part l'absence de situation d'introduction pour la dévolution. Il y a la formulation du problème, les définitions, les démonstrations (les savoirs), les ostensifs, et des indications sur la façon de s'en servir (les connaissances qui peuvent être rendues *publiques*). Il y a donc les objets, les outils de contrôle de ces objets, et les connaissances publiques relatives à ces objets et aux savoirs sur ces objets. Reste à l'élève à construire des connaissances *privées*. Un élève qui *veut savoir* ce qu'est une limite, comment ça se démontre, comment manier les ostensifs, trouve tout ceci dans cet ouvrage.

Que reste-t-il à faire au professeur dans cet environnement? aider à la résolution des exercices, en signalant le bon théorème, la bonne façon de prendre l'intervalle...

On pressent que l'étude des manuels ultérieurs risque de nous montrer que le rôle du professeur a profondément évolué : en effet il se pourrait bien que tout ce qui figure dans ce manuel, comme connaissances publiques, soit à la charge du professeur dans l'enseignement des années 80-90.

<u>Remarque</u> : Un autre manuel (Pochard, Terminale C,D,T, 1967, éditions Gauthier- Villars, Paris) présente également un exposé de cours ; la structure ressemble à celle du précédent, mais, et la différence est de taille, les commentaires en forme de connaissances publiques sont absents. A notre sens ce manuel amorce la transition avec les mathématiques formelles des années soixante-dix.

Identification du contrat :

Alors que le Cagnac et Thiberge peut être considéré comme un contrat faiblement didactique de type **direction d'études** (cf. Brousseau 1995, p.21) , le contrat instauré dans Pochard serait plutôt de type **dogmatique** (idem, p.19).

II. 1. 2 Les «maths modernes » dans les années soixante-dix

Le manuel choisi est Aleph $_0$ (1971) , Terminale CDE, Analyse , éditions Hachette.

a) Structure du manuel

Le manuel présente un exposé de cours, avec quelques exemples, et des exercices (en nombre assez réduit dans le corps du texte, et de nombreux exercices et problèmes récapitulatifs en fin de chapitre). Pas de travaux dirigés ; les exemples sont souvent donnés sous forme de graphiques, ou illustrés par des graphiques. La typographie est nettement plus aérée que dans le manuel précédent.

b) Contenu

Les théorèmes et définitions importants sont en gras, avec une indication en majuscules dans la marge («THEOREME »). Les démonstrations sont données intégralement. Certaines pages (voir par exemple pages 16-17) ne contiennent que des définitions et théorèmes.

c) Introduction de la problématique, validation

La continuité est introduite avant les limites, par les voisinages. La définition d'une fonction non continue en un point est donnée. Pour les exemples, la démonstration est faite à l'aide de voisinages (intervalles ouverts de **R**). Les théorèmes sur les fonctions continues sont énoncés et démontrés.

Le manuel définit ensuite les points d'accumulation d'un ensemble, et la limite d'une fonction en un point d'accumulation de son domaine de définition. L'équivalence, pour une fonction numérique, de la définition en ε et α est donnée, ainsi que de nombreux exemples. Pour les exemples, les démonstrations sont faites en prolongeant la fonction par continuité ; ou, dans le cas de discontinuité, en exhibant un voisinage de $f(x_0)$ dont l'image réciproque n'est pas un voisinage de x_0. L'unicité de la limite est démontrée.

Les «limites infinies » sont introduites à l'aide de la droite achevée $\underline{\mathbf{R}}$. A cette occasion les règles d'écriture des symboles + 8 et - 8 sont énoncées. On trouve par exemple des formules comme : $\forall x \in \underline{\mathbf{R}^*}$, $|x|/0 = +8$

Il n'y a pas de milieu pour la dévolution : aucune notion n'est problématisée. Par contre le milieu pour la validation existe bien. Les ostensifs sont peu commentés, le manuel déclarant même «évidentes » à plusieurs reprises des notations d'intervalles et de voisinages, et d'images réciproques de ceux-ci (page 51 par exemple).

d) Connaissances et savoirs

Il s'agit clairement d'un enseignement basé sur le savoir, et où les connaissances ne sont pas identifiées, voire même déclarées inutiles (puisque l'usage des ostensifs et des savoirs est évident). Suivant la classification du I.4.1 :

— pas de connaissances préalables répertoriées ; d'ailleurs une ambition des programmes de 1971 était de bâtir un exposé mathématique rigoureux et autonome par rapport aux apprentissages antérieurs ;

— connaissances à construire : 1,2,4,5 dans le cours ; les sujets du baccalauréat ne font appel qu'à des limites de fonctions (cf. Trouche, 1995, p.103 et suiv. pour les sujets de 1972) et les définitions vues en cours n'ont pas à être utilisées dans les sujets ; ceux-ci se traitent avec les théorèmes sur les limites et les fonctions connues.

On peut donc dire que du point de vue de l'utilisation des savoirs, les sujets d'examen privilégient l'algèbre des limites et l'utilisation de fonctions étudiées en cours ; et ceci malgré l'ambition formaliste des programmes.

Commentaires

Le rôle du professeur qui pratique cet enseignement risque lui de ne pas être évident : en effet, pour faire faire ensuite aux élèves ce qui est exigé d'eux dans les problèmes et exercices, il va se heurter à des problèmes de choix des bons voisinages, de fonctions non uniformément continues... toutes choses bien évidemment passées sous silence dans l'exposé de cours.

Contrat :

Il s'agit ici d'un contrat dogmatique.

II. 1. 3 La réforme de 1982 - 1985 : approximations et fonctions de référence

Le manuel étudié est le Gautier et Thiercé de Première Scientifique, 1986, chez Hachette, l'un des plus utilisés concurremment avec les manuels de Nathan. L'allure du manuel et son contenu diffèrent relativement peu de ceux du manuel de 1982 chez le même éditeur. Cependant la rupture avec le style d'enseignement des années soixante-dix est nettement marquée, alors que le Gourion de 1973, Terminale C, chez Nathan, marque encore la continuité de l'enseignement très formel précédent.

On lit dans le préambule : (insérer citation)

On mesure la distance avec les principes des années soixante-dix à la lecture de cette phrase : «Le langage des limites est abordé par l'intermédiaire de règles de comparaison *en liaison directe avec l'intuition*. » (C'est nous qui soulignons).

Les suites et les limites sont au programme de Première. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux chapitres 5 (Suites usuelles) et 6 (Suites. Langage des limites). Le chapitre consacré aux limites de fonctions reprend pour l'essentiel le schéma que nous mettons en évidence pour les suites.

a) Structure du manuel

Le manuel présente, au début des chapitres exposant des notions nouvelles :
— une demi-page de remarques historiques et de présentation de la notion ;
— des **activités préliminaires** destinées à problématiser la notion introduite (5 activités dans le chapitre 5 intitulé «Suites usuelles » : pâte feuilletée, feuille de papier coupée en deux puis encore en deux... , intérêts simples et composés, nombre de grains de blé sur un échiquier, allusion aux jeux mathématiques où l'on demande de compléter une suite. Trois activités préliminaires sont proposées au chapitre 6 : voir ci-dessous).

Le cours est ensuite présenté de façon très classique : définition, théorèmes, un exercice résolu, quelques exercices d'application. Une «activité » est encore insérée au début du paragraphe «Calcul de la somme des termes » et une autre au début de «l'étude pour les grandes valeurs de n » .

Ensuite figure une rubrique «**Travaux pratiques** » , qui est fournie : 7 travaux pratiques pour le chapitre 5, à savoir : placements, multiplicateur de crédit, contrats, prix et salaires, croissances diverses, datation, somme des puissances des termes d'une suite arithmétique. Cette rubrique représente trois pages et demie, écrites en italique serrée.

Enfin vient la rubrique exercices (trois pages, plus aérées que les précédentes).

b) Contenu

Le manuel traite les suites, puis les limites de suites, avant les limites de fonctions.

Les définitions des notions introduites sont données, ainsi que des théorèmes relatifs à ces notions ; certains sont démontrés, d'autres sont admis et c'est précisé. Des démonstrations sont données dans le corps du texte : par exemple, dans le chapitre 6 («Suites. Langage des limites ») après avoir admis la convergence vers zéro de la suite de terme général $1/\sqrt{n}$, le manuel propose une «activité » pour démonter que la suite de terme général $1/2^n$ converge vers zéro. La différence avec les manuels des années 70 se situe peut-être dans le fait qu'il y a un peu moins de définitions et de théorèmes ; mais ce n'est pas flagrant, au contraire : 10 théorèmes et 2 définitions dans le chapitre sur les limites de suites en 1986, contre 2 définitions - il est vrai ensuite commentées et redonnées sous une autre forme - et 8 théorèmes en 1971. Les travaux pratiques sont détaillés, et toutes les démonstrations sont demandées ou initiées dans le manuel.

Les dérivées sont introduites par la recherche de la meilleure approximation affine d'une fonction donnée. Le chapitre correspondant ne propose, et on le comprend, presque pas d'activités autonomes pour les élèves : tout est guidé par le manuel ou le professeur. La notion devient opérationnelle dans le chapitre suivant sur les fonctions dérivées, où les théorèmes sur dérivée d'une somme, d'un produit, ... sont démontrés, et des tâches classiques de calcul de fonctions dérivées données aux élèves, préludes à d'autres tâches d'étude de fonctions à l'aide du signe de la dérivée.

c) Introduction de la problématique, validation

Par rapport au manuel précédent, une différence importante est que celui-ci propose un milieu pour la dévolution : activités préliminaires posant des problèmes numériques, d'approximation... Si nous analysons ces activités, nous voyons qu'au chapitre 6 elles consistent à faire majorer des suites convergeant vers 0 par 10^{-p} , où p prend la valeur 2, 3 ... 8 ; minorer des suites tendant vers l'infini par 10^p , avec p prenant également des valeurs comprises entre 2 et 8 (une valeur demandée pour chaque suite, par exemple, chercher n tel que $2^n > 10^5$). L'infini prend sa place dans ce milieu (il est dit qu'on se préoccupe du comportement des suites «pour les grandes valeurs de n ») mais l'accent n'est pas mis de façon insistante sur ce problème.

Ces activités étant introductives, aucune définition n'est donnée ; il n'y a pas, dans le manuel, d'institutionnalisation au plan général des propriétés des suites particulières démontrées dans les activités introductives.

Par contre le cours ne donne aucune définition de la limite d'une suite, et ce qui est donné, sous l'intitulé «Théorème 1 » , c'est la propriété admise : la suite de terme général $1/\sqrt{n}$ converge vers zéro. Ensuite vient le «Théorème 2 » : une suite dont la valeur absolue est majorée par une constante multipliée par une suite convergeant vers 0, converge également vers 0.

Remarquons que le cours ne reprend donc pas les éléments de validation qui étaient proposés dans les activités introductives, mais s'oriente vers une validation d'un type complètement différent, à savoir la comparaison avec les suites «connues » convergeant vers zéro.

A la suite de ce théorème 2, le manuel propose trois remarques en italique et en petits caractères, pour signaler : 1) que la suite à laquelle l'on compare sera une suite de référence à termes positifs ; 2) que certaines suites, comme la suite de terme général $1/\sqrt{\sqrt{n}}$, ne pourront pas être étudiées avec cette méthode ; et 3) que le recours systématique à la suite $1/\sqrt{n}$ rendant les raisonnements lourds, il conviendra de réaliser un **répertoire** de suites de référence pour faire des démonstrations plus simples. Ce répertoire n'est pas réalisé dans le manuel ; on peut supposer que le professeur s'en charge, afin de pouvoir conclure sur les limites dans un nombre de cas suffisant. C'est en effet suggéré dans le Théorème 4, mais tous les cas sont regroupés sous deux étiquettes générales : suites $1/n^p$ et suites $1/b^n$ (pour $b \geq 2$ ....). [35]

Dans les «Travaux pratiques » les propriétés données en cours sont à appliquer. Ces travaux pratiques sont abondants : 6 pages au chapitre 6 sur les limites de suites. Leur contenu : approximations d'un réel, développements décimaux, approximations de $\sqrt{p}$, le nombre π , résolution d'équations (méthode par dichotomie, par interpolation linéaire, par itération), aires et volumes, Achille et la tortue. C'est donc un champ d'applications riche et varié de la notion de limite ; ceci dit, on peut douter qu'il puisse être traité par le professeur dans un temps compatible avec l'avancement du temps didactique.

d) Connaissances et savoirs

Le **langage** des limites a remplacé la **définition** des limites. Effectivement on ne trouve pas de définition d'une limite, ceci est conforme au programme. Les éléments de validation qui étaient introduits dans les activités préliminaires ne sont donc ni institutionnalisés, ni réinvestis, puisqu'on ne les retrouve pas dans les exercices et travaux pratiques : dans ceux-ci comme ceux-là on demande d'utiliser les critères de comparaison avec les suites de référence, construites dans le répertoire suggéré après le théorème 2. Le milieu pour la dévolution contient donc des éléments de validation, éléments du type : étant donné $\varepsilon = 10^{-p}$, chercher n_0 tel que, si $n > n_0$, $u_n < 10^{-p}$. Ces éléments sont absents du milieu prévu pour la validation ultérieure. On observe donc une rupture entre le milieu pour la dévolution (comportement d'une suite pour les grandes valeurs de n, et recherche de n tel que u_n soit plus petit que 10^{-p}) et le milieu de référence, qui n'est constitué que de problèmes de comparaison aux suites de référence.

Ainsi page 129 (exercice résolu) on se propose d'établir la convergence de la suite de terme général : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; pour ce faire on encadre d'abord u_n par (2n - 1)/(n - 1) et (2n + 1)/(n -1). Comme (2n - 1) / (n - 1) - 2 = 1 / (n - 1) , on est ramené à l'étude de cette suite 1 / (n - 1) . A l'aide par exemple des critères donnés dans les activités introductives, on démontrerait sans peine que :
$1 / (n - 1) < 10^{-p}$ pourvu que $n > 10^p + 1$. Là, le manuel propose une décomposition (non évidente pour un élève de Première!) de 1 / (n - 1) :
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Comme pour tout $n \geq 4$, $\sqrt{n} - 1 > 1$, on conclut que $1 / (n - 1) < 1 / (\sqrt{n} + 1) < 1 / \sqrt{n}$ et d'après le «Théorème 1 » , et le «Théorème 2 » , la suite 1 / (n - 1) converge vers zéro. Remarquons au passage que le manuel ne va même pas jusqu'au bout de sa logique, puisque : (2n + 1)/(n -1) - 2 = 3/(n - 1) , et le manuel conclut que 3 /(n -1). converge vers 0, alors qu'aucun résultat n'a été établi concernant la limite du produit d'une suite convergeant vers zéro par un réel. Lors d'observations de classes, il s'est trouvé des élèves pour effectivement mettre en doute que si la suite de terme général u_n converge vers zéro, il en est de même de la suite $k u_n$, où $k \in \mathbf{R}$.

[35] Dans un autre manuel (Istra, IREM de Strasbourg, 1988, éd. Casteilla, Paris) les suites de référence sont données d'emblée.

Par ailleurs, le traitement de $\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ est particulier : il semblerait logique, dans la logique tout au moins des connaissances publiques que nous avons signalées plus haut, de mettre sur le même plan $\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$: ces deux suites convergent vers zéro, étant toutes deux du même ordre que $\frac{1}{\sqrt{n}}$; or ici, la première se trouve majorée par un réel, tandis que la deuxième est majorée par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. On voit que la logique de majoration, poussée jusqu'à ce point, conduit à une absurdité du point de vue des connaissances : traiter de façon complètement différente deux expressions qui, du point de vue de la limite, se comportent exactement de la même façon. Il y a peu de chances que les élèves puissent entrer dans ces subtilités de procédures... et guère de pouvoir rendre publiques des connaissances aussi difficiles à justifier.

Cet exemple met bien en évidence que ce choix des critères de validation est extrêmement coûteux au niveau de l'équilibre savoirs / connaissances. En effet tout ce qui concerne ce que l'on a coutume d'appeler l'algèbre des limites passe du côté des connaissances, c'est dire que la gestion par le professeur en devient peu évidente, voire difficile à négocier. Par ailleurs essayons de regarder quels sont les savoirs récupérés : seules quelques règles de majoration / minoration par des suites de référence font partie des savoirs institutionnalisés. Or ces règles ont un inconvénient majeur : la façon dont elles s'appliquent dépend, à chaque exercice, de la fonction et de son expression particulière. Il en est certes de même de l'application de la définition en ε et α : mais la trame de départ est toujours la même dans la définition de Weierstrass, alors qu'ici se pose un problème de choix des fonctions «encadrantes » , lequel choix ne peut être fait que si l'on sait au départ quelles sont les chances de réussite de l'encadrement. Dans l'exercice présenté ci-dessus, il fallait largement anticiper la résolution globale pour majorer de façon aussi différente les deux termes concernés, alors qu'une résolution de type algorithmique, donc sans mobilisation démesurée de connaissances, donnait facilement la solution.

Suivant notre classification :

— les « connaissances préalables » 1 et 2 deviennent inutiles ; n°3,4 et surtout 5 prennent une grande importance mais ont été peu travaillées dans les classes précédentes, car trop difficiles ; 6 est minime.

— parmi les connaissances à construire que nous avons pointées au I.4.1 , il en est certaines qui deviennent très difficiles à mettre dans le milieu ; ce sont les connaissances du type 4 : si 1/n tend vers zéro, alors aussi 19/(n+3), -2000/(n-5) , etc... De même les connaissances relatives à l'emploi du signe $\rightarrow$, qui reposent implicitement sur l'algèbre des limites. Même la connaissance n°1 devient peu opérante ; 2 n'est évoquée que pour mémoire ; 3 n'est que l'aboutissement d'un long et pénible travail de majoration, il y a peu de chances qu'elle puisse trouver une place pour fonctionner ; 5 est du même ordre que 4 ; 6 a été supprimé, et 7 n'apparaîtra qu'en Terminale.

Nous avons vu que ces connaissances font partie des connaissances publiques dans le travail sur l'analyse. Reste donc, au professeur et à l'élève, pour fonctionner, les connaissances privées de l'élève ; et du professeur, sur les majorations et encadrements, mais qu'il aura bien du mal à faire passer dans le travail public de la classe, car il ne dispose pas de milieu adéquat pour le faire.

Ce qui concerne les contre-exemples est également éliminé du milieu, pour cause de validation impossible : l'analyse ne fonctionne, dans un tel environnement, que par condition suffisante pour qu'une fonction soit continue, admette une limite... Dans ces conditions, le statut des énoncés est flou, malgré les dénominations comme «définition » ou «théorème » . [36]

On peut remarquer aussi que ces choix didactiques conduisent à une avancée du temps didactique assez irrégulière : un temps très long sera consacré à la recherche heuristique de départ, pour ce qui est des limites ; et la notion de limite ne devient jamais vraiment opérationnelle dans ce milieu. Du reste c'est un milieu qui est (relativement) efficace pour démontrer qu'un nombre L est limite, mais pas pour déterminer une limite a priori inconnue. De même l'introduction des dérivées passe par une phase très longue où les élèves ne sont pas autonomes (recherche de la meilleure approximation affine) avant que le professeur ne puisse leur donner une tâche réalisable sans aide (calcul de fonctions dérivées).

Or on sait bien que dans ces conditions l'avancée de la classe et du temps didactique est rendue très complexe ; en effet le professeur se trouve contraint d'avancer pendant une longue période sans pouvoir organiser d'évaluation du travail des élèves, puisque ceux-ci ne sont pas en mesure de produire un travail autonome. Ceci rend très difficile la négociation de l'apprentissage de ce savoir non évaluable [37] ; le professeur risque de devoir invoquer continuellement le temps (auquel il doit aspirer lui-même!), où tout ce qu'il est en train d'examiner avec les élèves portera enfin ses fruits. Il peut aussi prendre l'option de ne considérer que comme un prétexte ce travail de départ, et passer rapidement sur les notions non opérationnelles pour arriver plus vite aux savoirs évaluables. C'est peut-être ce qui advient de l'enseignement de ce programme, une fois que les professeurs ont expérimenté la difficulté à le mettre en oeuvre de la façon prévue. Cette négociation dépend aussi probablement du niveau de la classe concernée, une «bonne « classe ayant sans doute droit à l'intégralité des préliminaires, et une «mauvaise » voyant abréger ses souffrances et celles du professeur.

Nous en concluons donc que ce manuel (conforme au programme) propose une introduction des limites où le milieu de référence est extrêmement complexe : peu de savoirs utilisables, nécessité de beaucoup de connaissances difficiles à mettre dans le travail public de la classe ; la négociation du contrat didactique dans ce milieu risque de s'avérer ardue.

<u>Commentaires</u>

L'approche des limites proposée dans ce programme présente par ailleurs deux caractéristiques :

— alors que l'ambition des promoteurs des programmes de 1982 et 1986 était de restaurer l'analyse comme recherche d'approximations, il est assez frappant de constater que tout ce que nous avons appelé «représentation par un voisin » a disparu du milieu pour la validation.

— le milieu didactique s'est considérablement appauvri, en tous cas en ce qui concerne les ostensifs disponibles dans le travail des limites : peu de quantificateurs, pas d'ε et α, pas d'algèbre des limites, pas de signe $\rightarrow$ ... Le professeur risque d'avoir quelques problèmes au niveau de la validation (les connaissances pour valider ne seront accessibles qu'à lui, et pas aux élèves, en tous cas ces derniers seront dans l'incapacité d'anticiper l'existence ou non d'une limite, et si oui laquelle) et du processus d'institutionnalisation car il disposera de peu d'ostensifs et d'éléments du discours de médiation ; et ceci d'autant plus qu'il ne pourra avoir recours aux éléments présents dans le milieu pour la dévolution. Les possibilités d'action du professeur dans un tel milieu de référence sont aussi entravées par cette incohérence des différents milieux. Comment organiser une situation avec une phase a-didactique étant

[36] cf Artigue (1993) page 128 et suivantes.
[37] cf Chevallard et Feldmann (1986).

donnée l'autonomie réduite des élèves ; comment faire valider par les élèves, alors que les critères donnés ont un statut flou... [38]

Le contrat

Basé sur l'heuristique avec des présupposés constructivistes (activités d'introduction, recherche numérique...) : c'est un contrat **d'ostension** mais pas d'ostension du savoir : ostension d'un milieu de recherche, des propriétés de certaines fonctions de ce milieu. Ce contrat, nous l'avons dit, ne repose pas sur la recherche d'outils universels de validation, mais sur l'utilisation de certaines connaissances et de conditions suffisantes sur des fonctions «simples » . A ce titre la dérive empiriste le menace. Cependant la présence de nombreux théorèmes, de démonstrations (même si ultérieurement ces démonstrations ne seront pas exigées des élèves) recentre le contrat, du moins dans la partie qui sera contrôlée par le professeur, sur la rigueur mathématique. Mais la dévolution de cette rigueur aux élèves s'avère quasi impossible, donc tout, de ce point de vue, est à la charge du professeur : on peut penser que, dès que les élèves seront en travail autonome, les difficultés apparaîtront. La recherche du contrat, dans ces conditions, peut se stabiliser sur le rôle heuristique des outils de départ (fonctions de référence, recherche à la calculatrice...) et l'introduction plus ou moins clandestine d'une algèbre des limites au moins minimale, en particulier pour traiter les problèmes de dérivation. C'est ce qui prévaudra ; remarquons qu'au passage, l'effet obtenu est inverse de celui qui était visé : le seul savoir qui surnage, relativement à la validation, est l'algèbre des limites, utilisée cependant presque clandestinement et surtout dans le chapitre sur la dérivation, par le biais du calcul de la fonction dérivée d'une somme, d'un produit, ... ; ce qui fait les caractéristiques du SPA (représentation par un voisin, inégalités et intervalles, quantificateurs...) a disparu comme nous l'avons noté. Insistons encore sur la difficulté à tenir ce contrat : ce qui est visible, du dispositif didactique, concerne des connaissances, non exigibles de surcroît dans la suite du travail en analyse ; et les savoirs utiles ne sont surtout pas institutionnalisés et restent dans la clandestinité.

II. 1. 4 Evolutions récentes : depuis 1991

En 1991, les programmes ont été modifiés, notamment l'algèbre des limites a été réintroduite. Les «excès de majoration » entraînés par les fonctions de référence ont été gommés, au profit de «l'intuition » . Nous allons voir ce que cela signifie.

Les manuels choisis sont :
— en 1991, Mathématiques Première S-E, éditions Magnard, Paris ; Nouveau Transmath, éditions Nathan, Paris. Ces manuels seront désignés par MA et TR.
— en 1995, Terracher 1ère S et Déclic, Première S, tous deux chez Hachette. Ils seront désignés par TE et DS. Chez Bordas, nous étudions le Nouveau Fractale de Première S, désigné par FR, et chez Belin, le manuel de Première S sera désigné par BE.

a) Structure des manuels

Plusieurs manuels comportent un «point d'histoire » de longueur variable (de un court paragraphe à une page) ; tous prévoient des activités d'introduction de la notion de limite ; cependant le Terracher traite les exemples issus de l'histoire dans les exercices et problèmes, dans certains chapitres : il n'en figure pas dans le chapitre sur les limites. Les manuels traitent tous le cas des fonctions avant les suites ; celles-ci sont considérées comme un cas particulier des fonctions pour ce qui est des limites, et comme relevant de techniques de calcul spécifiques pour ce qui est des calculs sur les suites arithmétiques et géométriques.

[38] Pour une analyse générale des programmes d'analyse de 1985, voir Artigue (1993).

Le cours proprement dit est réduit ; il est suivi et/ou précédé de tests, QCM, ou exercices résolus, puis de travaux pratiques, ou modules ; enfin d'exercices et/ou de problèmes.

Tableau 3. 1:

Manuel	Histoire	Activités introductives	Test/QCM préalable	Cours	TD,TP, modules	Test, point méthode	Exercices Problèmes
MA 91	x*	x	•	x	x	x	x
TR 91	•	x	•	x	•	x**	x
TE 95	•	x	•	x	x	x***	x
DS 95	•	x	x	x	x	x	x
FR 95	x	x	•	x	x	x**	x
BE 95	x	x	•	x	x	x**	x

Légende : x lorsque le contenu est présent, • lorsqu'il est absent.
* : dans le Magnard, on trouve une «étude historique » de 10 pages, avec problèmes de recherche pour les élèves, en début de manuel.
** : sous forme d'exercices résolus.
*** : sous forme de vrai/faux.

Par rapport à la génération précédente des manuels (celle des années 80), on peut constater que la structure est modifiée en profondeur : ceux de 90 comportent beaucoup plus de rubriques qu'on pourrait ranger dans la dévolution du problème (activités introductives) et dans les «aides à l'étude » (savoir-faire, tests, travaux pratiques ou dirigés, exercices résolus).

b) Contenu

Les manuels diffèrent au niveau de l'ordre de présentation des notions : la limite d'une fonction en $a \in \mathbf{R}$ est associée à la dérivation, mais parfois traitée avant le chapitre sur les limites d'une fonction ; ce dernier est alors considéré comme une étude des branches infinies, ayant lieu une fois que la fonction a été étudiée à l'aide de sa dérivée et de son tableau de variations.

Le chapitre sur les «limites et branches infinies » est traité en premier lieu dans MA91, TR91, TE95 et DS95 ; le chapitre «dérivation » est traité en première place dans FR95 et BE95.

Remarques :
*Le chapitre «Notion de limite. Dérivation » est traité en première place dans le Belin, et le chapitre sur les limites et branches infinies s'intitule : «Limites de fonctions » . De quoi donc étions-nous en train d'étudier la limite au chapitre précédent?
**Le Fractale intitule le deuxième chapitre : «Représentations graphiques. Asymptotes » .

Du point de vue de l'organisation du savoir et des déclarations qui s'y réfèrent, aucun manuel ne propose, conformément au programme, de définition de la notion de limite. Ce qui est plus remarquable, et M.Artigue l'avait déjà noté dans son article sur les fonctions de référence (Artigue 1993), c'est que la dénomination «Théorème » a quasi disparu des manuels. on trouve des **affirmations**, ainsi dans MA 91 : «Les fonctions de référence sont les fonctions $(x \to x)$, $(x \to x^2)$, etc.. » et des **conventions** : plus loin, encadré en rouge sur fond jaune : «Nous conviendrons de dire que les fonctions $(x \to x)$, $(x \to x^2)$, etc... ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$. »

De même dans le TR 91, nulle définition, mais un paragraphe intitulé : « Sens de l'écriture : $\lim (x \to +\infty)\ f(x) = +\infty$ » . On retrouve du reste ce terme «écriture » dans tout le chapitre. Le mot «Théorème » n'apparaît que deux fois, après le titre du paragraphe 4 : «Opérations sur les limites » . Le sous-paragraphe 4.1 s'appelle «Théorèmes sur les limites » et le 4.2 : «Exemples d'utilisation des théorèmes » . Il est dit par ailleurs que les résultats, présentés dans un tableau, sont «intuitifs et faciles à retenir » et nulle mention de démonstration de ces résultats n'est faite, même par allusion. Qu'est-ce donc alors qu'un théorème? un résultat sur lequel on veut insister? un résultat qui fournit un moyen algorithmitisé de calcul? En quoi un théorème se distingue-t-il des affirmations précédentes, et pourquoi lui attribuer un nom différent? Le statut du mot «théorème » ici n'est certes pas celui auquel sont habitués les mathématiciens.

Le manuel TE 95 utilise bien le mot définition, mais, c'est pour définir un mot : le mot asymptote. En fait la définition ne porte pas sur des mathématiques, mais du vocabulaire, puisque la définition est celle-ci : «lorsque lim ($x \to +\infty$) $f(x) = L$, la distance mM tend vers zéro quand $x \to +\infty$ On dit alors que la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale à la courbe** C. » (En gras dans le texte). Plus loin, le mot théorème est utilisé : un paragraphe s'intitule «Théorèmes de comparaison » . De même les énoncés sur la somme, le produit... de limites sont appelés «théorèmes » ; il est dit qu'ils sont admis, et sont qualifiés de raisonnables : «ce sont ceux auxquels on est en droit de s'attendre » .

Dans le DS 95, aucun résultat ne porte le nom de définition ou de théorème. Les résultats sont encadrés sur fond jaune, aucune mention de démonstration possible, ici admise, n'est portée. Cependant page 134, au paragraphe 3 «Opérations sur les limites » , il est écrit que «les points d'interrogation figurant dans le tableau désignent les cas où les théorèmes ne permettent pas de conclure » . L'élève doit donc comprendre que les résultats de ce tableau ont le statut de théorème. Ces résultats sont suivis d'une rubrique «Utilisations » , puis de «Travaux pratiques » , puis de «Savoir-faire » , puis de «Tests » ! on peut dire que les auteurs de ce manuel n'ont pas une confiance excessive dans l'utilisation spontanée que fera l'élève des résultats présentés, et qu'ils préfèrent s'entourer de nombreux garde-fous.

Le FR 95 donne les résultats (encadrés sur fond jaune) comme des «Propriétés » , en signalant qu'elles peuvent avoir été rencontrées sur des cas particuliers et qu'elles sont admises dans le cas général.

Enfin, le BE 95 donne également des «propriétés » , sur fond vert clair, et des «définitions » , sur fond bleu clair : mais comme dans le TE, les définitions ne sont que des définitions de vocabulaire, elles ne portent pas de vrai contenu mathématique (ni validation, ni moyen de reconnaissance de propriété). Un seul théorème est énoncé et démontré : celui sur l'équivalence des deux définitions du nombre dérivé d'une fonction en un point, par limite du taux d'accroissement ou par développement limité.

c) Introduction de la problématique, validation

Nous rencontrons donc deux cas de manuels : ceux où la limite est introduite d'abord en $a \in \mathbf{R}$, comme préalable à la dérivation, et les limites «infinies » ensuite, dans l'étude des branches infinies des courbes (FR, BE) ; et les manuels (TE, DS) où les limites sont introduites en premier lieu, par l'étude des fonctions de référence (limites en zéro, en $+\infty$, $-\infty$), et les dérivées traitées ensuite.

i) Limite et dérivée

Dans les manuels qui adoptent cette introduction, le problème des limites en un nombre réel *a* est traité par des déclarations sur la limite en zéro des fonctions usuelles - fonctions de référence - après «observation [39]« de celles-ci (en fait des calculs) ; puis par des

[39] Observation est le terme employé par le manuel FR. BE renvoie à l'activité 1: calcul de valeurs de ces fonctions pour des valeurs de x de la forme 10^{-p}

équivalences d'écritures, entre lim f(x) lorsque x tend vers a, et lim f(a+h) lorsque h tend vers zéro. Les théorèmes de l'algèbre des limites sont donnés (admis) ; une fonction est dite dérivable en *a* si elle admet en *a* un développement limité ; les manuels BE et FR démontrent l'équivalence avec la définition par limite du taux d'accroissement (FR dans un exercice). Les deux manuels consacrent un paragraphe aux tangentes à une courbe (tangente présente également dans les activités introductives pour les deux manuels). Puis la fonction dérivée est introduite, et les applications au sens de variations d'une fonction sont données, ainsi que les théorèmes sur les extremums (deux intitulés «théorème » dans BE, sur le sens de variations de f et sur l'existence d'un extremum en *a* si la fonction dérivée s'annule et change de signe en *a*).

Remarquons que, pour un seul chapitre, le menu est copieux : limite en zéro, limite en *a*, théorèmes sur les limites, développement limité, nombre dérivé, tangentes à la courbe, fonction dérivée, sens de variation de f, extremums : de la page 56 à 74 chez BE, sans compter les exercices mais en incluant les savoir-faire ; de 83 à 98 chez FR, plus la page 155 pour le sens de variation des fonctions, et la page 160 (un TP) pour les extremums.

On pourrait dire que la suppression de la définition en ε et α a créé un vide qu'il faut combler...

Pour les deux manuels concernés par cette approche, la notion de «limite infinie » est reprise ensuite sans qu'il y ait appui sur ce qui a déjà été fait (par exemple on pourrait imaginer que l'on signale la parenté de la nouvelle problématique avec les limites étudiées au chapitre d'introduction de la dérivation : ce serait possible si par exemple les outils de validation donnés étaient communs, mais dans une progression sans outils de validation, effectivement il est difficile de voir la parenté des notions).

ii) Les limites infinies

Pour introduire les limites infinies, tous les manuels s'appuient sur :

1) les grands nombres, les petits nombres, l'intuition sur la croissance des fonctions et l'infini ;

2) les courbes, dont on trouve de nombreux exemples dans le cours.

Le TE propose de plus, dans les activités introductives, un problème fonctionnel posé sous forme géométrique ; mais on demande à la première question de calculer la forme algébrique de la fonction, ce qui décourage toute approche purement géométrique, à supposer qu'elle ait pu exister.

La démarche des manuels est celle qui suit :

<u>1) Pour les nombres et l'infini</u>

- proposer de calculer les fonctions de référence pour des x «grands » . Ce calcul est proposé de différentes façons : tableau de valeurs pour $x = 10^2$, $x = 10^5$, $x = 10^8$ ...par exemple. On trouve aussi des questions comme : «Comment faut-il choisir x pour que $\sqrt{x} > 5$? pour que $\sqrt{x} > 10^8$? » Suivent des questions analogues sur l'inverse des fonctions de référence.
- un résultat encadré est donné : «les fonctions de référence $\sqrt{x}$, x , x^n (n>1) tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ « .
- cette définition, propriété,... (suivant les manuels) est commentée par une phrase donnant en français la définition du résultat précédent, par exemple dans BE :

«**Plus généralement**, lorsque f(x) peut être rendu supérieur à tout nombre réel A strictement positif pour x suffisamment grand, on dit que f(x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou encore que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ ce qu'on écrit : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ «.

Le «plus généralement » est en gras dans le texte, ce qui souligne la fonction qui est attribuée par les auteurs à cette «mise en forme » : permettre de généraliser les résultats pressentis sur les fonctions de référence.

Dans le TE, la généralisation existe, elle suit ce qui s'appelle : «Exemples fondamentaux » (les fonctions de référence) ; dans le FR, on trouve : «Limites en l'infini, limites infinies : fonctions usuelles » , puis : «Limites en l'infini, limites infinies : cas général » . Dans le DS, le cas général est donné avant les fonctions usuelles.

2) L'usage des graphiques

Les résultats précédents sont illustrés par des graphiques, souvent présents d'ailleurs dès les activités introductives, et même le terme «asymptote » . Ainsi que le dit Terracher en remarque après l'activité 4 : «Les courbes représentatives de ces fonctions, en particulier les hyperboles, serviront de point d'appui dans l'interprétation graphique de certaines limites : nous préciserons notamment la notion d'asymptote » .

Certains manuels vont plus loin que d'autres dans l'exploitation des courbes. Certains proposent une «interprétation graphique » (FR) ou «illustration graphique » (TR) des limites données ; le MA donne systématiquement une courbe en regard des résultats écrits en langage symbolique, mais sans commentaire. Le TE donne peu de courbes, malgré l'annonce précédente. Le DS est celui qui va le plus loin dans l'exploitation du graphique, en proposant des fac-similés d'écran de calculatrice graphique dès les activités introductives, avec la consigne : «Reconnaître chacune de ces fonctions à partir de leur comportement » (les expressions algébriques sont données).

Dans les exercices, le manuel franchit un pas supplémentaire avec par exemple l'exercice 3 page 145 : «Chacune des courbes suivantes représente une fonction f. Trouver, par simple lecture graphique, l'ensemble de définition de la fonction f, puis les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. » (6 courbes données par fac-similé de l'écran d'une calculatrice graphique).

d) Connaissances et savoirs

On note que cette approche, comme nous l'avions dit, donne à l'infini un rôle privilégié pour la dévolution des limites. En effet ce qui ressort de l'étude des deux manuels qui «définissent » la limite en 0 et en *a* avant les «limites infinies » , c'est qu'ils ne le font pas avec une problématique de limite : ils affirment après «observation » (selon le terme de FR) que les fonctions de référence ont une limite nulle en zéro. Cette observation pourrait tout aussi bien se réduire, pour l'élève, à constater que ces fonctions prennent la valeur zéro en zéro : rien, dans le travail proposé à l'élève, ne permet de distinguer cette propriété f(0) = 0 de la propriété d'avoir une *limite* nulle. La connaissance qui pourrait être véhiculée par le travail demandé, serait que si x se rapproche de zéro, f(x) se rapproche de zéro. Tout en ne constituant pas une base sur laquelle asseoir une définition correcte de la limite, cette connaissance pourrait constituer un point de départ. Mais aucun milieu permettant de mettre cette connaissance à l'épreuve n'est fourni à l'élève.

Ce qui doit, d'après cette analyse, en ressortir pour l'élève, peut s'énoncer ainsi :

— les fonctions de référence s'annulent en zéro ;

— on note cette propriété avec des notations nouvelles : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; si on demande la limite en *a*, on écrit f(*a* + *h*) et on «fait » *h* = 0 puisque $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Dans certains cas (c'est d'ailleurs expliqué dans les manuels) il faut simplifier avant de pouvoir remplacer *h* par zéro.

En termes de connaissances, il y a des connaissances relatives à l'emploi correct d'un nouveau répertoire de symboles (nouveaux ostensifs formels) ; les autres connaissances en jeu sont de type **algébrique** : calculer f(*a*+h) où f n'est en général pas linéaire ; simplifier après avoir mis une puissance de h en facteur. Aucune des connaissances **d'analyse** que nous signalions au début de ce chapitre n'apparaît dans ce type de travail : même pas la plupart de celles que nous avions mises dans les connaissances préalables pouvant figurer dans le milieu.

La dévolution des limites est donc renvoyée, par tous les manuels, à la charge des «limites infinies » . Voyons la pertinence de ce choix et de la façon dont il est exploité.

Nous avions signalé au début de ce chapitre que l'infini pouvait être exploité dans un milieu pour la dévolution ; les problèmes culturels, paradoxes, contre-exemples ... dont il est porteur peuvent contribuer à ce rôle. Les élèves ont certes des connaissances sur l'infini, le continu... En DEA (Bloch 1997) nous avions proposé à des élèves de Seconde trois petits problèmes pouvant mettre en jeu la continuité et l'infini, et constaté que les intuitions (connaissances privées) des élèves n'étaient pas dépourvues d'intérêt.

Mais ces connaissances ont une caractéristique : ce sont des connaissances **culturelles**, élaborées dans le milieu de la «société civile » , et non pas dans un milieu **mathématique** (la boîte de Vache qui rit par exemple... exemple bien évidemment quelque peu caricatural ; mais aussi ce que les élèves ont pu lire, voir, entendre, sur l'espace infini, le temps,... dans les émissions scientifiques ou revues de vulgarisation). Ainsi que le dit Chevallard (Chevallard 1988c) :

> « La tâche essentielle (du contrat didactique) consiste tout simplement à faire passer l'élève d'une culture «profane » , celle dans laquelle nous évoluons dans nos activités ordinaires, et la seule que l'enfant rencontre spontanément (c'est-à-dire antérieurement au processus d'acculturation scolaire), à une culture que j'appellerai, en un sens large nécessairement, scientifique.
>
> Entre les deux cultures, il y a une discontinuité radicale, que l'on peut schématiser ainsi : dans la culture ordinaire, l'enfant se pose (et pose aux adultes) des questions pour lesquelles il reçoit ou non des réponses ; dans la culture «scientifique-scolaire » , l'enfant va rencontrer des problèmes (qu'il ne se pose pas spontanément, car leur caractère même de problèmes procède d'une façon de voir les choses à laquelle, sauf exception, il n'a pas un accès spontané et autonome) ; et à ces problèmes il va alors apprendre à apporter des solutions. »

Ce passage de l'élève d'une question culturelle à un problème scientifique-scolaire, nécessite une transformation de connaissances, ou une autre affectation de ces connaissances : ce que Brousseau appelle une **conversion de connaissances** (Brousseau et Centeno, 1991, pages 192-193). Les connaissances étant des instances de contrôle d'une situation,

> «Un sujet apprend lorsqu'il change ses instances de contrôle d'une situation. Et un apprentissage va donc se manifester par des changements de connaissances, par des mises en mémoire et par des changements de contrôle dans les décisions. Par exemple : un sujet peut s'adapter à une situation et passer - par rapport au contrôle qu'il de celle-ci — d'une décision prise au hasard à une décision prise par une connaissance ; il peut passer d'un savoir communiqué par la société à une connaissance personnelle formulable et reconnue par l'institution scolaire. Ces transformations ou «conversions » de savoir en connaissances peuvent se faire par une adaptation à une situation a-didactique ou peuvent être produites avec l'aide du maître dans une situation didactique. »

Rouchier a pointé dans sa thèse (Rouchier 1991, pages 36-37) la nécessité de l'institution pour la confrontation de connaissances à une situation ; la situation est elle-même institution, puisque c'est par elle que la connaissance peut se confronter aux objets symboliques ou matériels, et que peut «s'ouvrir la longue chaîne des conversions qui vont conduire au savoir » (Rouchier 1991 p.37).

Or l'enseignement des limites qui est proposé ici ne tente pas d'inscrire la connaissance «infini » dans une situation / institution scientifique - scolaire, ni dans une situation a-didactique, ni directement dans une formalisation de savoirs. On prend au contraire les connaissances d'une institution donnée, la société «naturelle » , et on essaye de les faire fonctionner directement dans le contexte d'une autre institution (les mathématiques, fussent-elles scolaires) sans passer par l'institution de savoirs, ni par des situations où ces connaissances pourraient agir. De plus en important ainsi des connaissances non mathématiques, sans les faire transiter par une situation, il est à craindre que l'on ne récupère aussi d'autres connaissances culturelles sur lesquelles on sera dépourvu de tout moyen de contrôle, qui resteront même complètement ignorées, et qui vont parasiter l'usage qui sera fait des premières.

Revenons à notre classification pour essayer de voir ce que cet enseignement peut récupérer au niveau des connaissances :

— pour les connaissances préalables :

1. Les nombres entiers, en particulier les «grands » nombres entiers : utile.
2. Les ordres de grandeur et les relations entre eux : utile, car tout repose sur l'intuition.
3. Les raisonnements de type arithmétique : peu sollicité (sert surtout à la validation).
4. Les fonctions, les majorations : utilisé dans les activités introductives.
5. Les connaissances graphiques : supposé acquis, en particulier dans DS.
6. Les connaissances relatives à l'emploi de la calculatrice graphique : supposé acquis, en particulier dans DS.

Cependant 5 et 6, qui concernent les graphiques avec ou sans calculatrice, sont fortement sollicitées mais jamais explicitées. Aucun discours n'est fourni sur ce qu'on peut voir (ou non) sur un graphique ; ni sur un graphique fourni par la calculatrice (voir ci-dessous).

— pour les connaissances à construire, faisons une analyse détaillée :

<u>Tableau 3.2:</u>

1. L'inverse d'une suite / fonction qui tend vers l'infini est une suite / fonction qui tend vers zéro, et réciproquement mais il y a un problème de signe	Oui, sur les exemples des fonctions de référence. Le professeur pourra généraliser sur les fonctions quelconques, par exemple après avoir admis les théorèmes sur l'algèbre des limites, mais ces théorèmes ne donnent pas le moyen de valider dans ces deux cas. Donc validation absente, on reste sur l'intuition de l'infini.. * *cf. remarque*.
2. Plus généralement, les limites et les signes sont dépendants d'une certaine façon : une suite positive a une limite éventuelle positive ou nulle, et réciproquement une suite qui a une limite positive est positive à partir d'un certain rang.	Pas mentionné ou pas utilisé (connaissance servant à la validation dans la théorie ; or ici la validation est peu présente).
3. L'emploi de «→ « et le contrôle de cet emploi. Différences par exemple avec le signe «=« : «→ « n'est pas symétrique, ne permet pas la transposition, le terme à gauche de la flèche est une fonction (donc il comprend des variables), le terme à droite est un nombre, mais le fonctionnement n'est pas celui d'une équation ; on ne peut donc pas transposer une partie fonctionnelle du terme de gauche vers la droite, ...	Mentionné comme une convention d'écriture. Le statut des objets figurant dans ces «écritures » n'est pas évoqué. On peut concevoir qu'un élève écrive $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ sans faire le rapport avec le comportement d'une fonction, et sans savoir ce qu'il peut modifier dans cette écriture pour qu'elle reste conforme du point de vue de la syntaxe.

4. Si 1/n tend vers zéro, alors 1/(n-1) → 0, 2000/(n+19) → 0 , etc... Cette connaissance sera institutionnalisée plus tard, et généralisée, sous la forme : une fraction rationnelle est équivalente, quand x $\to +\infty$, au quotient des termes de plus haut degré.	Récupéré après l'algèbre des limites. Cela fonctionnera d'abord comme un savoir, puisque le milieu proposé pour la dévolution ne permet pas de le travailler autrement que comme une «intuition » . Un travail est donc nécessaire pour que ce soit converti en connaissance ; en attendant, on risque de devoir se livrer à de laborieuses vérifications à chaque cas «nouveau » . * *cf. remarque*.
5. lim $n^2 - n = + \infty$, autrement dit c'est n^2 qui «l'emporte »	Idem.
6. Connaissances relatives à la «représentation par un voisin » : manipulation des quantificateurs et des inégalités, dans des phrases formelles complexes qui comprennent à la fois succession de quantificateurs, variables, fonctions, inégalités...	Abandonné dans le programme actuel.
7. Connaissances relatives aux tâches de type : recherche de l'existence d'un nombre (la détermination algébrique n'est en général pas possible, d'où recherche par des théorèmes d'existence et/ou approximation par un voisin).	Repris en Terminale, de façon très rituelle («montrer » , en appliquant le «théorème » de la valeur intermédiaire, qu'il existe un nombre *a* tel que f(*a*)=*a*, puis montrer qu'une suite donnée converge vers *a* en majorant par une suite géométrique : voir en particulier, sur les sujets du baccalauréat, APMEP 1998).

*** *Remarque*** : cette connaissance ne se déduit pas des théorèmes sur les limites, qui concernent les limites finies ; rien dans le milieu proposé ne pose le problème de l'inverse d'une fonction ayant une limite nulle, ou infinie. Notons que ceci reste entièrement implicite : les manuels, et le professeur, font «comme si » c'était une conséquence de l'algèbre des limites. Du reste le professeur ne dispose que d'une alternative : revenir à l'intuition sur l'infini.

Commentaires

Le système s'attend manifestement à ce que les élèves soient capables, à partir de l'intuition sur l'infini et des règles sur les fonctions de référence, de récupérer les connaissances mathématiques sur les limites infinies de fonctions «quelconques » , ainsi que de transférer ces connaissances, au moment de l'étude des dérivées, à des calculs de limites finies. Or dans ce schéma d'enseignement, aucune connaissance **mathématique** ne se dégage, dans la mesure où aucun énoncé ne reçoit de statut bien défini. Ce qui surnage, une fois évacué le discours «intuitif » de la dévolution, ce sont donc des procédures, des algorithmes : le glissement méta-cognitif est flagrant, on enseigne des recettes, faute de pouvoir appuyer l'enseignement sur des situations porteuses de connaissances mathématiques, faute d'avoir des savoirs à institutionnaliser.

Arrêtons nous un moment sur le milieu graphique proposé par le manuel Déclic Première S pour trouver des ensembles de définition et des limites. DS demande aux élèves de **déterminer une limite** sur un écran de calculatrice ; l'expression algébrique de la fonction n'étant pas donnée, quel critère permet à un élève de dire que f a pour limite zéro, ou 1, ou 0,00002... par lecture directe de l'écran? pourquoi affirmer que ce qui se passe en dehors de la fenêtre est la continuité de ce qu'on voit? Est-on bien sûr que ces connaissances-là sont acquises par l'élève? par quels procédés/apprentissages antérieurs? Plus grave : quel est leur fondement épistémologique? l'objectif de leur utilisation? comment fonctionnent-elles et quel bénéfice en attend-on? [40] Les conditions de fonctionnement d'un tel milieu seront analysées aux chapitres suivants ; une première approche du milieu tel qu'il est présenté laisse voir que :

— les réponses attendues ne peuvent être données par l'élève qu'en conformité avec ce qu'il croira deviner des attentes du professeur : en effet il n'y a aucune raison pour que la fonction présentée ait comme limite zéro plutôt que 1 (l'échelle ne permet pas de les distinguer) ou 0,0002 ou... pas de limite du tout ; de plus il n'y a pas de validation, ni même d'indice de ce qu'on «voit » bien une limite (à quoi ça ressemblerait s'il n'y en avait pas?) ;

— les implicites sur le graphique sont à la base de ce type de tâche demandée aux élèves ; rien ne garantit que ces implicites, a) sont bien les mêmes pour le professeur et pour l'élève, et b) ont bien fait l'objet d'un apprentissage antérieur. De fait l'enseignement traditionnel ne prévoit pas de place pour examiner la nature particulière des ostensifs graphiques et leur fonctionnement (cf. Duval 1994, Lacasta 1995, Chauvat 1997, Maschietto 1998). Une référence plus ancienne (Rogalski 1984) met en évidence plusieurs points qui seront développés au chapitre 4, à savoir les caractères réducteurs et producteurs des graphes, tenant au fait qu'un graphe est majoré (il n'est pas possible de «voir » au delà de la fenêtre) et qu'il est minoré (il n'est pas possible de distinguer des points «trop proches »).

En introduisant ce milieu graphique comme une évidence visuelle, le manuel Déclic ne prend évidemment aucun recul par rapport aux possibilités de son fonctionnement effectif ; remarquons qu'il contribue de ce fait à répandre l'idée d'une utilisation «naturaliste » des calculatrices graphiques. Cette idée est bien entendu contredite par toutes les études de didactique sur le sujet (cf. Trouche 1996) ; cependant nous pouvons penser que pour l'enseignant, il y a là une fois de plus un ensemble de connaissances laissé implicite ou déclaré évident : ce que nous relevons de l'enseignement des années 1990, du point de vue de l'enseignant, c'est que non seulement les **savoirs** nécessaires à la gestion de l'enseignement ont été enlevés du milieu ; mais de plus, le système déclare évidentes (au point de ne même pas en discuter quelque part) les **connaissances** qui se sont substituées (plus ou moins bien) à ces savoirs. On aurait pu, en effet, imaginer que le manuel (un des premiers sur le marché à introduire des copies d'écran dans ses pages) présente les schémas assortis de quelques recommandations et mises en garde, comme «Il n'est pas toujours possible de distinguer deux limites à l'infini très voisines » , ou : «Pour conclure à partir de la représentation graphique donnée par la calculatrice, il est nécessaire de s'assurer qu'il ne se passe rien de remarquable pour la fonction en dehors de la fenêtre choisie, et que l'échelle choisie permet bien de voir tous les phénomènes importants » . Or il n'en est rien : tout ceci est à la charge du professeur (ou des élèves ?). On peut lire dans Trouche 1996, p.127 et suivantes, une étude des contraintes du milieu «calculatrices graphiques et symboliques » . Bien que cette étude ne porte pas spécifiquement sur le rôle du professeur, il est facile d'en inférer que celui-ci, s'il veut prendre en compte les particularités du nouveau milieu, va devoir faire appel à des connaissances qui ne recouvrent pas celles qu'il utilisait pour une gestion sans machine (voir II.2.1 ci-dessous).

Mais nous savons bien, les études de didactique l'ont prouvé, que le professeur ne gère pas forcément l'utilisation que les élèves font de leur calculatrice : sauf dans des cas spécifiquement organisés comme tels, les élèves font un usage privé de leur calculatrice, et le professeur ne gère qu'à la marge cet usage. Il est invité ici à le gérer d'une façon qui confirme l'ostension visée, en laissant de côté les (nombreux) phénomènes «accessoires » susceptibles de parasiter l'usage prévu. On peut douter du succès d'une telle entreprise.

[40] En ce qui concerne l'étude d'un milieu graphique pour l'enseignement des fonctions, voir chapitre 4.

Contrat :

Il s'agit d'un contrat d'ostension, mais ostension de quelques résultats portant sur des fonctions particulières, en tentant de baser ces résultats sur des connaissances culturelles non mathématisées (l'infini pour l'introduction ; l'usage privé des calculatrices pour l'application des concepts...). La présence de l'algèbre des limites permet cependant ultérieurement de stabiliser le contrat, avec des exercices d'entraînement en nombre suffisant. On peut douter que sans cela, le travail sur les limites ait pu exister dans la classe. Au final, entre une dévolution «culturelle » et une application de type algébrique, ce qui apparaît c'est bien **l'absence de l'analyse**. En effet rien du SPA ne survit dans cet enseignement, puisque la validation n'intervient que dans la partie algébrisée du processus.

II.1.5 Perspectives

En conclusion de ce paragraphe, nous pouvons faire un bilan de l'évolution de l'enseignement de l'analyse dans l'enseignement secondaire, telle qu'elle se dessine depuis 1965.

Tableau 3.3:

	savoirs/validation	connaissances	dévolution	contrat
1965	oui	oui	non	direction d'études
1971	oui	non	non	dogmatique
1986	difficiles à identifier	oui	oui	ostension de connaissances mathématiques
1991	non	culturelles	oui	ostension de connaissances culturelles

Les problèmes que nous avons soulevés plus haut (disparition de l'analyse de l'enseignement effectif en classe de Première et Terminale, survivance d'un reliquat algébrisé servant d'alibi) et au chapitre 1 (notamment les problèmes posés par les sujets du baccalauréat) apparaissent dans la presse spécialisée (bulletin de la SMF, n°75), la littérature des IREM, et les publications des associations de spécialistes : ainsi l'APMEP a publié, en mars 1998, un fascicule intitulé «Bac mathématiques - Horizon 2000 » , sous titré : «Contribution du groupe de travail de l'APMEP Prospective bac » et où il est dit en introduction :

> «Chacun s'accorde à reconnaître et à déplorer que l'épreuve de mathématiques aux différents baccalauréats ne corresponde plus aux voeux et aux objectifs des enseignants de la classe Terminale. En même temps, il est fait reproche que les élèves dans les classes ultérieures ne sachent plus démontrer, les programmes préconisant d'admettre, les plus souvent, les théorèmes. Trop souvent réduite à une suite de questions guidant l'élève pas à pas vers un résultat juste (ou erroné), réduisant son activité principale à l'utilisation d'algorithmes, infléchissant en rétroaction bien souvent le contenu et les méthodes développées au cours de la dernière année de lycée, l'épreuve ne mesure que rarement les démarches et les capacités considérées majeures pour une formation scientifique en général, mathématique en particulier : esprit critique, imagination créatrice, modélisation, réinvestissement, etc. De plus la probabilité de la réussite, obtenue en se limitant à

> l'apprentissage de standards définis par les annales, réduit l'enjeu de l'épreuve et démobilise les compétences supérieures. »

Le groupe Prospective Bac de l'APMEP conseille, face à cet état de choses, de promouvoir d'autres méthodes de travail et d'autres types d'évaluation. Quand on connaît un peu les contraintes du système d'enseignement, il est raisonnable de penser qu'aucune modification en profondeur ne verra le jour rapidement, et qu'il y a peu de chances qu'un tel changement prenne sérieusement en compte les études de didactique.

II.2 APPORTS DE QUELQUES ETUDES SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Nombre d'études sur l'enseignement de l'analyse ont vu le jour ces dernières années ; ces recherches se sont positionnées de façon différente par rapport au problème que nous posons ici, de construction d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse : soit en le contournant, en abordant l'enseignement de l'analyse d'un point de vue différent (c'est le cas des recherches de langue anglaise) ; soit en examinant le cas de l'enseignement instrumenté par des calculatrices, ce qui conduit à un milieu différent ; soit en posant le problème à un niveau différent de milieu (milieu «méta » , modélisation). Pour une étude synthétique, on peut se reporter à Artigue 1998, Artigue 1996. Nous n'examinerons ici que les recherches qui nous ont amenée à préciser nos propres options, en nous différenciant de celle des auteurs.

II.2.1 Le milieu dans l'enseignement instrumenté par des calculatrices et logiciels de calcul formel

Depuis le début des années 90 est apparu en France un champ d'études en didactique des mathématiques sur l'enseignement de l'analyse à l'aide de calculatrices graphiques et/ou de logiciels de calcul formel (citons par exemple Chauvat 1997, Trouche 1996, Artigue, Drouhard et Lagrange 1994). Sans vouloir bien évidemment résumer toute une recherche en quelques lignes, on peut noter quelques points significatifs :

1) le milieu «papier/crayon + théorie » et le milieu instrumenté entrent parfois en conflit dans la résolution de problèmes d'analyse, en tous cas on est loin d'une certaine idée «naïve » de départ, du type : » le logiciel va soulager l'élève des tâches calculatoires et lui permettre de se consacrer à la conceptualisation » ;

2) le milieu instrumenté est porteur de connaissances et de savoirs spécifiques, qui peuvent parfois se substituer aux connaissances et savoirs de la théorie ; ou du moins l'interaction entre savoirs et connaissances liés à l'environnement informatique, et savoirs et connaissances de la théorie mathématique, est beaucoup plus complexe que ce qui pouvait être envisagé par les pionniers : ce n'est pas la théorie qui contrôle et le logiciel qui applique :

- le logiciel permet en effet des réalisations qui donnent elles-mêmes des aperçus sur ce qui est valide ou non dans la théorie ;
- le contrôle de la théorie est parfois défaillant pour les élèves, car leur connaissance de cette théorie est insuffisante pour qu'ils puissent s'expliquer certains phénomènes troublants observés dans le fonctionnement du logiciel ; dans ce cas leur confiance dans le logiciel ou dans le graphique fourni par la calculatrice peut s'avérer supérieure à leur confiance dans les mathématiques théoriques, et à la confiance qu'ils portent aux affirmations du professeur ;

3) les savoirs et connaissances relatifs à l'instrument (calculatrice et/ou logiciel) doivent être pris en compte dans le milieu, concurremment avec les autres connaissances et savoirs de l'élève ;

4) enfin, les élèves utilisent le logiciel ou la calculatrice de façon différente suivant le

rapport qu'ils ont avec ce type d'instrument (et avec les mathématiques et la vérification mathématique), ce qui introduit un facteur personnel non négligeable (cf. Trouche 1996).

L'étude de L.Trouche sur le milieu instrumenté par calculatrice graphique et symbolique, fait donc apparaître des connaissances spécifiques, nécessaires au professeur comme aux élèves, pour maîtriser le fonctionnement de la calculatrice ; ces connaissances sont, à notre sens, associées à ce que Trouche décrit comme les *contraintes* de l'environnement informatique. Il paraît particulièrement intéressant d'examiner quelques connaissances relatives aux nombres et aux représentations graphiques de fonctions, puis celles relatives à la recherche de limites.

a) Les nombres

La calculatrice ne travaille que sur une petite partie des nombres décimaux : un intervalle borné, et sur cet intervalle, seulement les nombres de 14 chiffres au maximum. Il en résulte qu'un nombre et sa valeur approchée sont confondus, mais aussi deux nombres distants de moins de 10^{-13} , au mieux (ceci dépendant de la partie entière). Ainsi (exemple donné par Trouche) la calculatrice veut bien calculer lnln $(1+ 10^{-13})$, mais pas lnln$(1+ 10^{-14})$ où elle indique «erreur domaine » .

On peut penser à deux situations différentes, suivant les connaissances de départ de la personne qui utilise alors la calculatrice :

— soit (c'est le cas bien sûr du professeur) les savoirs et connaissances théoriques préexistent à l'utilisation de la calculatrice, et ils servent alors d'outil de contrôle et d'explication des phénomènes constatés ; dans ce cas, il y a prise en compte des nouvelles connaissances relatives à la calculatrice, sans bouleversement des connaissances antérieures ; le système théorique de l'expert tient le coup, et il intègre des aménagements relatifs à l'outil (possibilités nouvelles de validation par exemple) ;

— soit (pour l'élève) les savoirs et connaissances sur les nombres ne sont pas encore construits ; dans ce cas, il n'est absolument pas sûr que l'élève distingue l'univers théorique (mathématique) de l'univers instrument, et que les connaissances construites lors de la résolution de problèmes ne soient pas un mélange de contraintes machine et de propriétés des nombres eux-mêmes, ces dernières étant elles-mêmes parfois mal identifiées (cf. Bronner 1997).

b) Les fonctions et les graphiques

Les outils informatiques offrent de très nombreuses possibilités de maniement d'ostensifs variés de fonctions, choisis dans des répertoires sémiotiques différents (ostensifs graphiques, algébriques, numériques, formels...). Ces possibilités sont soulignées par les utilisateurs et les didacticiens ; elles s'accompagnent d'un certain nombre de difficultés :

— interpréter les ostensifs nécessite une double expertise : mathématique et informatique, parfois sous-estimée (l'expression est de M.Artigue, dans Artigue 1995, p. 98) ;

— les allers-retours écran - papier/crayon n'ont rien d'évident : comment choisir leur occurrence?

— l'image peut révéler des phénomènes comme elle peut en cacher. L'exemple donné par G.Kuntz (Kuntz 1996, p.76) est celui d'une fonction prolongeable par continuité en zéro : le graphique machine ne montre pas de singularité en zéro, ce qui peut, soit mettre l'utilisateur averti sur la voie du prolongement par continuité, soit ne rien montrer du tout à l'utilisateur naïf, qui ne soupçonnera même pas une singularité ;

— le même phénomène peut se traduire par des images très différentes : la modification de la fenêtre peut suggérer des réponses complètement opposées à la même question, par exemple de nombre de solutions d'une équation ;

— l'écran peut inhiber les capacités à mobiliser des connaissances théoriques (pourquoi chercher une raison théorique à ce qu'on *voit*?). Interroger l'ostensif, c'est lui dénier le droit à *être* l'objet qu'il représente ; ainsi que le dit Régis Debray [41] : «Penser, c'est dire non. Bon gré mal gré, la télé dit *oui* au monde tel qu'il va. » (p.440) et plus loin : «La preuve par l'image annule les discours et les pouvoirs. (...) Mais l'effet de réalité, optimal sur l'écran, est piégé. Car sans cause. Devant ces images en direct et en temps réel, je passe spontanément de l'autre côté de l'écran, dans le réel enregistré. L'image alors s'abolit comme image fabriquée, la présence pseudo-naturelle se nie comme représentation. Là est la mystification : l'arbitraire se présente comme nécessaire, l'artifice comme nature. » (idem, p.480-481).

Bien sûr R.Debray parle ici de la télévision et de l'actualité ; mais cette analyse nous paraît pertinente dans une certaine mesure pour l'écran de la calculatrice. Pour un élève, dire «non » à l'image, pouvoir l'interroger , c'est d'abord pouvoir *imaginer* qu'il peut y avoir *autre chose* à la place de cette image : une autre image, un ostensif appartenant à un autre registre de représentation, ou un ostensif différent du même registre ... Or ce n'est possible que si l'élève a d'autres outils de contrôle que l'image elle-même ;

— un des problèmes rencontrés est la sélection d'informations, au delà de leur véracité : une image (graphique ou expression algébrique) offre de nombreuses informations, dont certaines sont exactes et d'autres trompeuses ; mais aussi dont certaines sont utiles pour le problème posé et d'autres sans objet. Il est donc nécessaire de trier les informations fournies par l'image ; sur quels critères? C'est un problème que nous retrouverons lors de la mise en place d'un milieu graphique pour l'étude des fonctions (voir chapitre 4).

c) Les limites et les dérivées

On retrouve globalement les mêmes phénomènes que pour les représentations graphiques ou algébriques de fonctions. Ainsi un même résultat peut se traduire de façons très différentes suivant les images sélectionnées. Kuntz (Kuntz 1996, p.76) donne l'exemple de la tangente obtenue comme limite des sécantes, dans le cas de la fonction sinx/x qu'il s'agit de dériver en zéro : selon que l'on représente les sécantes ou la fonction «coefficient directeur » des sécantes, on ne voit pas la même chose ; dans le premier cas on ne *voit* pas grand-chose... sauf que, *heureusement* dit l'auteur (!) dans un premier temps la droite est horizontale (la dérivée cherchée étant égale à zéro au point O). On peut aussi demander au logiciel de tracer directement sinx/x, auquel cas la singularité en zéro ne se voit même pas, et l'allure de la courbe au voisinage de zéro est celle d'une droite horizontale... Dans le deuxième cas, on donne au logiciel la fonction $t(x) = (\sin x - x)/x^2$, et la courbe passe par l'origine... comme nous l'avons signalé, le logiciel occulte les singularités de ce type. Seule la confrontation avec les outils de validation classiques permet de comprendre ces phénomènes. C'était d'ailleurs déjà une des conclusions de M.Artigue (Artigue 1995).

Le très intéressant article de M.J.Perrin (Perrin 1999) met en évidence que les phénomènes perturbants relatifs à l'approximation d'une courbe par sa tangente, observés avec le logiciel Géoplan, ont des explications **non triviales**, ici les successions de quantificateurs et le sens de l'expression «meilleure approximation » suivant la norme choisie ; cet article nous paraît mettre l'accent sur le problème crucial de l'utilisation de ces outils dans les classes du secondaire : on ne peut espérer minorer les difficultés de l'analyse en la présentant à l'aide des logiciels, étant donné que les difficultés ou manifestations surprenantes, rencontrées dans la manipulation des outils informatiques ne peuvent s'expliquer sans le support de la théorie. Le but des utilisateurs n'est d'ailleurs pas de contourner des problèmes incontournables, mais de construire un milieu qui permette à l'élève de rencontrer ces problèmes en disposant d'outils pour les résoudre.

[41] Régis Debray, "Vie et mort de l'image", Gallimard, 1992, Paris.

La pratique récente tend à s'orienter vers des allers-retours logiciel/théorie, qui sont certainement susceptibles de donner du sens à l'image et de permettre à l'élève de mettre des images mentales sur des formulations théoriques (cf. Kuntz 1998) ; cependant le logiciel risque de dépasser rapidement les possibilités d'explication théorique à ce niveau. On assiste alors à des pertes de sens, signalées par tous les chercheurs ; ces pertes de sens se traduisent par des comportement de «pêche à la ligne » , l'élève essayant de trouver au hasard la solution en faisant appel à toutes les fonctionnalités du logiciel ; ou par des comportements «aberrants » , par exemple d'élève «faisant tendre k vers zéro » en lui donnant successivement les valeurs 1,2,3,4,5...

La problématique connaissances / savoirs pourrait être une aide à la clarification des situations proposées aux élèves, des difficultés rencontrées, et des résultats obtenus : quelles sont les connaissances mathématiques que l'on récupère avec cet apprentissage? quelles sont les connaissances sur le logiciel et la calculatrice qui sont indispensables pour s'aider de la calculatrice pour entrer dans la situation, pour formuler le problème, pour valider? certaines de ces connaissances (tracé de courbe à l'écran à l'aide de pixels, mode de calcul exact / approché, ...) doivent-elles être enseignées comme des savoirs? Si oui, faut-il enseigner, sur les nombres par exemple, d'abord le savoir mathématique, puis sa transposition informatique, ou faut-il entrer d'emblée dans le mode informatique et donner une explication mathématique des phénomènes constatés? Il semble que ce soit cette dernière solution qui ait été choisie jusqu'à présent par les expérimentateurs, pour des raisons évidentes de contraintes de programmes scolaires.

Quelles sont aussi les connaissances mathématiques minimales qui permettent d'user de l'environnement informatique d'une façon pas complètement aberrante? (cette question rejoint la précédente). Il se pourrait que les différences individuelles de comportement face à l'environnement informatique, constatées par Trouche (Trouche 1996) s'estompent dès que l'élève possède un bagage mathématique plus solide ; Chauvat n'en fait d'ailleurs pas état avec des étudiants d'IUT (Chauvat 1997). De façon plus précise, peut-on faire le tri entre connaissances mathématiques et connaissances relatives au logiciel? Ceci serait une des conditions de la reproductibilité : se lancer en aveugle dans un enseignement à l'aide de logiciels ou calculatrices graphiques, nécessite au minimum de savoir quel milieu sera disponible, quelles connaissances seront nécessaires et devront être mises dans le milieu ou enseignées comme savoirs... quelles validations seront possibles.

II.2.2 Le milieu «méta »

La recherche d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse se heurte, comme nous l'avons vu, au problème de complexité de ce champ de savoirs, complexité déjà mentionnée au chapitre 1 (voir chapitre 1, p.16 et suivantes) et que mentionnent tous les travaux sur l'enseignement de l'analyse. Rappelons les difficultés signalées au chapitre 1 : difficultés dues au savoir (rupture arithmétique / algèbre ; prérequis sur les nombres décimaux et idécimaux) ; difficultés institutionnelles (non-stabilité des concepts de l'analyse dans l'enseignement secondaire ; articulation des programmes : nombres / fonctions linéaires/ fonctions quelconques) . Cette complexité est un argument pour la recherche d'autres paradigmes d'enseignement de l'analyse. Jusqu'ici nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie «analyse mathématique » , en jouant le jeu des connaissances et des savoirs à l'intérieur des programmes du secondaire.

Certains chercheurs, cependant, font état de cette complexité pour justifier le recours à des moyens d'enseignement **externes** à la théorie mais intégrant un discours sur celle-ci : enseignement de méthodes, discours méta. En effet selon eux la complexité de la théorie enseignée et le niveau où l'enseignement est envisagé interdisent la recherche d'un milieu fournissant des rétroactions suffisamment riches à l'élève, pour que celui-ci puisse entrer dans la théorie et participer à la construction de ce savoir. C'est le principe d'un discours «méta » comme aide à l'enseignement d'une théorie complexe.

Citons en effet Robert et Robinet (1996), p.148 :

> «Pour faciliter l'acquisition de certains concepts particuliers, comme la convergence des suites ou les espaces vectoriels, pour lesquels il n'y a pas forcément de bonnes activités introductives du niveau des étudiants, pour des raisons d'ordre épistémologique notamment, on est amené à remplacer ces activités préparatoires manquantes par *une réflexion sur ces concepts*, dernière facette de ce que nous allons mettre sous ce vocable (méta). Cette réflexion n'est d'ailleurs pas sans rappeler l'activité des mathématiciens qui ont introduit ces concepts. » (Souligné par les auteurs).

Ces déclarations ne peuvent manquer de nous interroger ; un des objets de notre travail est justement d'étudier de «bonnes activités introductives » pour l'enseignement du concept de fonction ou de limite, et surtout de préciser en quoi ces activités peuvent être considérées comme «bonnes » , c'est-à-dire introduisant un rapport au savoir que ne permet pas l'enseignement ostensif traditionnel.

La citation ci-dessus appelle cependant trois remarques :

1) les exemples que donnent Robert et Robinet, de construction d'une ingénierie à l'aide du méta, font apparaître le souci de proposer des situations problèmes pertinentes pour le savoir visé, avec un jeu de variables didactiques propre à orienter l'étudiant dans la direction souhaitée (voir par exemple Dorier et al., 1997, p.185 à 209) ; il y a donc une situation, sinon a-didactique du moins problématique, se référant à un contenu précis, où le discours méta est considéré comme une aide à la médiation vers le savoir, et non pas comme un substitut à celui-ci ;

2) le niveau où l'ingénierie est testée est un élément important, ainsi que le déclarent d'ailleurs Robert et Robinet, de la décision d'utiliser le méta ; au niveau considéré par ces auteurs (fin du lycée et surtout début de l'enseignement à l'université), un enseignement qui ne comprendrait pas des éléments théoriques, est exclu ; il en résulte que l'une des questions qui nous intéresse, à savoir la possibilité (ou non) de concevoir l'enseignement d'une théorie sans son système de validation, et les conséquences de ce choix, n'a plus lieu d'être. En revanche, pour notre étude l'enseignement secondaire est intéressant car c'est bien au lycée que l'on tente actuellement d'enseigner l'analyse sans ses éléments de preuve ;

3) Robert et Robinet mettent l'accent sur un discours de l'enseignant, ce que nous appellerons les **moyens de médiation** dont dispose l'enseignant pour mettre l'élève en rapport adéquat au savoir, plutôt que sur la richesse du milieu construit pour mettre l'élève en interaction avec ce savoir. Il ne s'ensuit pas que la question de situations a-didactiques pour l'introduction de l'analyse ou de l'algèbre soit forclose : c'est une autre question, qui d'ailleurs a été posée et résolue différemment par d'autres chercheurs, par exemple Legrand par son ingénierie sur l'intégrale de Riemann (cf. Legrand 1997, voir III ci-dessous).

Ces deux questions en effet (utilité du discours méta et construction d'une situation a-didactique) ne se posent pas **au même niveau de milieu**. La question du méta se pose, ainsi que le disent bien Robert et Robinet, au niveau du professeur P_0 — tel que défini dans le schéma de Margolinas, et repris au chapitre 2 — et à un niveau d'enseignement (premier cycle universitaire) où de toutes façons, **la théorie est présente avec des critères de validation** ; tandis que la question de l'existence, ou non, d'une situation fondamentale de l'analyse (ou tout au moins de la notion de fonction, de limite ou d'intégrale), est posée dans le milieu de référence de l'analyse. Or le fait même de répondre affirmativement à la question de situation a-didactique, si c'est possible, ne résout pas pour autant, selon nous, la question du professeur P_0 ; construire une situation a-didactique relative à un concept ne dispense pas de considérer ce que l'enseignant devra faire au niveau P_0 . C'est ce que nous entendons examiner. Mais l'inverse est également vrai : privilégier le professeur dans son rôle de médiation vers le savoir, et nous dirons même vers le savoir institué, ne permet pas *de facto* d'écarter la possibilité de construction d'un milieu convenable pour l'apprentissage de ce savoir.

Même si les travaux récents des chercheurs qui travaillent sur le «méta » concernent plutôt l'algèbre (cf. Dorier 1997), ce qui apparaît par exemple dans le travail de Robert (1982), c'est que les situations proposées prévoient bien un milieu pour la dévolution : les suites numériques ; les étudiants peuvent s'appuyer sur leurs connaissances antérieures (intuition de l'infini, de «termes qui se rapprochent de la limite » ...). Si l'introduction du discours méta se fait au niveau P_0 , on peut supposer que ce discours pourra faire un lien entre les connaissances (le milieu de la dévolution) et les preuves (le milieu de la validation). Insistons encore sur le fait que les outils de validation ne sont pas absents à ce niveau de l'enseignement. Le mode «méta » apparaît donc comme un mode possible de traitement du lien entre le milieu de la dévolution, le milieu des preuves et le milieu didactique P_0 avec l'utilisation des ostensifs de limites. En disant cela, nous ne préjugeons en rien de la réussite de ce mode de traitement. Il y a certainement des conditions à énoncer, sur les modalités de ce discours, pour qu'il réussisse effectivement à faire le lien prévu, c'est-à-dire pour que cela se manifeste du côté des connaissances et des savoirs des étudiants.

II.2.3 Le point de vue «advanced mathematical thinking »

La recherche en éducation, en langue anglaise, s'est développée autour de thèmes privilégiant l'étude des conceptions des élèves et des étudiants, relativement aux objets (concepts, symboles...)du travail mathématique. Nous ne dirons que quelques mots des recherches conduites dans ce cadre, bien que le volume et l'importance en soient certains ; on peut se reporter aux articles publiés sur ce sujet (Artigue 1998, Artigue 1996, Artigue 1992). Ces approches, de type essentiellement cognitivistes, visent à différencier plusieurs niveaux de connaissances existant dans le travail sur les objets mathématiques, et à étudier le niveau correspondant requis ou possible chez les étudiants.

Traditionnellement, dans les pays de langue anglaise, les curriculums se découpent en «calculus » (débuts de l'étude des fonctions et dérivation, correspondant à peu près à la Première et Terminale françaises) et analyse mathématique (problèmes de limites, différentielles, intégrales, à l'université). Un des niveaux de connaissance ou d'usage des concepts mathématiques, repéré par les chercheurs en éducation, correspond au calculus : le premier niveau, celui de l'action, serait lié aux premières intuitions sur les objets du calculus, par exemple la vitesse ; le niveau «proceptuel » (cf. Tall 1996, Tall 1994) correspondrait au calculus élémentaire. Le dernier niveau, formel et conceptuel, correspond aux mathématiques supérieures, c'est-à-dire à l'analyse mathématique au niveau universitaire.

M.Artigue (Artigue 1998, p.242) met en évidence les apports de ces recherches :

> «Les approches en termes de processus/objet ont sans aucun doute eu et ont toujours une productivité certaine dans le champ de la didactique de l'analyse. Elles ont permis notamment :

- d'identifier des types de changements qualitatifs dans les rapports aux objets de l'analyse (fonctions, limites, dérivées... ;
- de comprendre certains dysfonctionnements de stratégies d'enseignement ne ménageant pas un espace suffisant pour le développement de la dimension «processus » des objets de l'analyse ;
- de construire des produits d'enseignement exploitant de façon cohérente les analyses effectuées. »

Cependant ces recherches ne tentent pas une approche systématique d'un point de vue didactique ; de plus dans certains cas, elles ont pour effet de limiter la problématique à la recherche de conceptions d'étudiants, sans qu'il apparaisse forcément une pertinence de ces conceptions par rapport au savoir mathématique d'une part, ni par rapport au traitement didactique possible (cf. par exemple Romero y Chesa et Azcarate Gimenez, «An inquiry into the concept images and the continuum » , Actes du 18ème congrès de PME, 1994). Traquer des «conceptions » privées d'étudiants sur le continu nous paraît relever plus parfois d'une enquête sur des phénomènes culturels que de prémisses raisonnables à la construction d'une ingénierie didactique pour l'introduction de l'analyse mathématique. Nous l'avons dit, l'infini (et l'infiniment petit, donc le continu) constituent une base culturelle pour la dévolution des problématiques d'analyse ; il n'apparaît pas jusqu'à présent, qu'on puisse tabler sur cette base pour obtenir une entrée *mathématique* dans les concepts de limite ou de continuité. Il semble plutôt que ce soit une méthode pour tester la capacité des étudiants à entrer dans une théorie sans passer par le champ de problèmes. Ce peut être aussi une sous-estimation du rôle de l'heuristique de la résolution de problèmes dans la construction de connaissances et de savoirs ; des trois façons d'aborder une théorie, par le savoir formel, par la résolution de problèmes, par les «conceptions » dérivées de l'expérience sensorielle ou culturelle, pourquoi retenir en priorité la dernière?

Cette approche ne nous aide donc pas à mettre en oeuvre notre méthode de recherche ; pour situer notre méthodologie par rapport aux travaux relevant de «Advanced mathematical thinking » , disons simplement que le SPA recouvre le niveau formel identifié par les chercheurs, niveau qu'ils réservent à l'Université, le calculus étant plus élémentaire et algébrisé. Notre projet est justement de chercher comment le SPA pourrait prendre place, ne serait-ce que de façon rudimentaire, au niveau précédant l'Université.

Nous retenons cependant des indications qui peuvent être intéressantes sur des procédures et connaissances publiques d'étudiants. Les dernières orientations de ce type de recherches s'intéressent d'ailleurs à l'aspect sémiotique des symboles utilisés pour représenter les concepts et objets mathématiques ; en ce sens elles rejoignent la didactique qui se préoccupe des répertoires et environnements dont dispose l'enseignement pour parler d'une notion. De ce point de vue, ayant à discuter d'un milieu pour l'enseignement du concept de fonction, nous reprendrons au chapitre 4 certains résultats des recherches évoquées (cf. Schwarz et Dreyfus, 1995).

II.2.4 La recherche de situation fondamentale par le biais de la modélisation du monde physique : la situation du pétrolier (M.Legrand)

Certaines recherches ont évoqué la modélisation du monde physique comme possibilité pour obtenir l'entrée des élèves dans une problématique d'analyse. Ainsi M.Legrand et des chercheurs de Grenoble ont mis au point et testé dans des classes scientifiques une situation pour l'introduction de la notion de limite en classe de Première.

a) La situation

La situation du pétrolier est détaillée dans Legrand (1991) et Di Martino (1992) ; il s'agit d'étudier la situation d'un pétrolier en panne à 200 milles d'un port ; le capitaine tente de regagner le port avec une vitesse maximale de 10 noeuds, sachant qu'il ne peut aller plus vite sans accroître les avaries, et qu'il a à traverser des zones de courants contraires, sur environ la moitié des 200 milles à parcourir. Le capitaine prévoit de s'arrêter une heure sur deux pour répartir l'eau embarquée pendant la marche. Les élèves doivent jouer le rôle de l'ingénieur de la compagnie, et donner un conseil au capitaine, en fonction de ses chances d'atteindre le port :

— conseil A : votre stratégie, consistant à vous arrêter une heure sur deux et à ne pas dépasser une vitesse de 10 noeuds, est bonne et il est inutile d'appeler des secours ;

— conseil B : demandez du secours, car vous avez très peu de chances d'arriver au port avec une telle stratégie.

La situation prévoit deux modèles qui vont fonctionner successivement :

Premier modèle (L-L) : chaque zone de courants contraires, de largeur L milles, alterne avec une zone de non courants, de largeur L milles, et $L \leq 5$; le bateau traverse ces zones avec une vitesse de : 10 noeuds lorsqu'il n'y a pas de courant ; de +/- 5 noeuds dans les zones de courant.

Deuxième modèle (L-L-M) : le modèle précédent est valable pendant 24 heures ; la vingt-cinquième heure, le bateau entre dans une zone de grandes turbulences et son déplacement d_n au cours de la 25ème heure semble suivre la loi mathématique M :

$$(M)\ d_n = \frac{3250}{n^2} - \frac{(-1)^n 180}{n}$$

Dans ce dernier modèle, la première étape consiste à calculer la distance parcourue par le pétrolier pendant les 24 premières heures ; puis les distances d_n parcourues au cours des 24, 25, ... 30èmes heures.

La deuxième étape consiste à déterminer le comportement de la suite d_n , pour n>30, et à essayer de déterminer la limite de la série Xn somme des (d_i) (de i=1 à i=24) et de terme général d_n , pour n>30. On peut envisager plusieurs réponses à la question de départ («Que conseiller au capitaine? ») suivant que la limite de cette série est supérieure ou inférieure à 200. Remarquons que la série oscille autour de sa limite, ce qui fait que la solution du problème posé ne dépend pas exclusivement de la limite, mais, cette limite étant connue, de la réponse à la question : existe-t-il un nombre n tel que Xn > 200?

Pour cela, on calcule le reste Rn de la série ; les élèves sont invités à dire ce que représente ce reste, et le professeur donne une majoration de Rn si n est pair et n>24 :

$$\frac{3340}{n+2} < Rn < \frac{3340}{n-1}$$

Si l'on montre de plus, en utilisant l'encadrement précédent pour n=4000, que la limite X8 de la série Xn est comprise entre 200,3 et 200,4 , alors on peut prouver que le bateau sera arrivé au port au bout de 11 132 H mais pas au bout de 8351 H.

Pour Legrand, cette situation se définit comme une **expérimentation fondamentale**, c'est-à-dire comme «la conception, la réalisation et l'analyse d'un groupe de situations susceptibles de constituer une métaphore fondamentale pour les élèves » (Legrand 1991). Toujours dans le même article, Legrand pointe :

— d'une part, l'impossibilité de faire entrer progressivement les élèves dans une problématique d'analyse, par des questions ou problèmes allant du plus simple au plus compliqué ;

— d'autre part, la nécessité du recours au discours méta-mathématique pour que les élèves puissent «changer de niveau de rationalité » et qu'ils puissent saisir la composante unificatrice des concepts qui leur sont présentés. Legrand note aussi l'inadéquation de la réalisation d'un jeu avec des gains à des élèves ou étudiants de plus de quinze ans ; et il pointe le discours méta-mathématique comme étant ce qui permet au professeur d'entraîner les élèves plus loin dans le savoir visé, par appui et référence à une situation de départ (le pétrolier) porteuse d'un fort contenu épistémologique, c'est-à-dire d'une image forte des problèmes pouvant être résolus par l'analyse, avec ici, de plus, un contexte de réalité important et mémorable.

Ce fort contexte de réalité fait pencher la situation du côté de la modélisation ; on constate d'ailleurs qu'une partie non négligeable des questions des élèves se déplace sur ce pôle (cf. Di Martino 1992, p.73 - 74). La situation était d'ailleurs orientée dans ce sens, ainsi que le dit Di Martino dans l'introduction :

> « Il ne s'agit pas pour nous de trouver 'la ou une bonne situation' qui forcerait les élèves à entrer dans le concept de limite et à l'utiliser de façon incontournable (...). Nous cherchons donc plutôt un système de contraintes suffisant qui nous semble pouvoir amener, accompagner et favoriser l'acquisition d'une connaissance

> scientifique élaborée, comme peut l'être le concept de limite, et qui fonde de façon essentielle toute la partie des mathématiques que constitue l'analyse. » (Di Martino 1992, p.5).
>
> «Le concept de limite, bien que s'appuyant sur des raisonnements internes aux mathématiques, possède une pertinence externe : il peut, via une certaine modélisation, fournir des renseignements valables sur le monde physique. La reconnaissance de cette pertinence passe par une représentation adéquate du fonctionnement des sciences, et ne saurait advenir sans une certaine idée sur la nature du réel traité par un modèle (ou une théorie) et une certaine compréhension de ce qu'est et de ce que n'est pas un modèle. » (Di Martino 1992, p. 9).

Ce qui est pointé ici, c'est non seulement l'utilité mais plus encore, la **nécessité** du détour par la **modélisation** pour introduire le concept de limite, et plus généralement les concepts de l'analyse.

b) La modélisation

On retrouve cette nécessité dans le compte rendu de l'atelier animé par Di Martino, Legrand, Pintard à la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques :

> «La compréhension du jeu de modélisation est un préalable à la compréhension scientifique des concepts fondamentaux de chaque science, son approfondissement «doit » donc être explicite et (pour le moins) concomitant à l'enseignement de ces concepts » (Di Martino, Legrand, Pintard, 1995).

Dans ce même texte, les auteurs pointent bien une difficulté de ce «jeu de modélisation » dans la situation du pétrolier : si théoriquement, dans ce nouveau contrat, l'un des rôles de l'élève est de formuler des hypothèses, ici les modèles successifs sont fournis par l'enseignant. La modélisation peut donc n'apparaître, aux yeux de l'élève, que comme un habillage de la situation, destiné à fournir un prétexte d'entrée dans l'analyse. Si néanmoins l'élève accepte de jouer le jeu, il est amené à faire des calculs, des prévisions... ces calculs et ces prévisions devant déboucher théoriquement sur des formulations et des validations permettant d'entrer dans l'analyse, c'est-à-dire comportant au minimum des éléments du SPA.

Afin de mieux comprendre comment une situation fortement référée au réel peut amener à l'entrée dans une théorie, rappelons ce que dit Dupin de la modélisation :

> «Les didacticiens ont été bien entendu amenés à s'intéresser à la question de la modélisation dans l'enseignement puisque la modélisation est l'activité principale du domaine savant. (...) C'est aussi parce que des travaux de psychologie cognitive portant sur les activités de construction de connaissances chez les individus ont montré un cousinage très proche avec celles de modélisation. » (Dupin, 1995 p.251).
>
> «De nombreux travaux ont été faits dans ce domaine, en didactique des mathématiques comme de la physique, qui ont pu montrer l'intérêt de ces démarches. (...) . Quoiqu'il en soit, dans tous les cas, de telles procédures n'échappent pas aux contraintes didactiques pesant sur tout acte d'enseignement. » (Dupin, 1995 p.253).

Dupin insiste ensuite sur les difficultés qu'on peut rencontrer lors du processus d'institutionnalisation : les connaissances créées lors d'une situation de modélisation sont très contextualisées, or lors de l'institutionnalisation il s'agit de se mettre d'accord sur ce qui important, et sur ce qui est en conformité avec le savoir reconnu socialement. Le modèle produit, d'intérêt le plus souvent local, n'est donc pas forcément ce qui va être institutionnalisé ; c'est alors le processus qui est important, mais comment l'évaluer hors du contexte? Dupin rapporte une expérience conduite en DEUG Sciences de la Vie et de la Terre, où les physiciens avaient développé un enseignement de la modélisation (Dupin 1995, p.256) ; les premiers essais d'évaluation se sont soldés par un échec flagrant, les étudiants étant incapables de procéder à des modélisations même dans des problèmes qui pour les enseignants, étaient vus comme très proches des problèmes étudiés en cours.

Pour conduire à une institutionnalisation compatible avec les savoirs socialement désignés comme étant ceux de l'analyse, la situation devrait donc déboucher sur des savoirs évaluables, et pas seulement sur des connaissances, fussent-elles publiques, relatives à l'intérêt épistémologique de la modélisation. Qu'en est-il de la situation du pétrolier?

c) Modélisation et structuration du milieu

Si nous analysons le déroulement de la situation du point de vue des niveaux de milieux et des connaissances qui s'y manifestent, nous identifions trois étapes :

1) Le rôle du contexte dans la dévolution

La situation «réelle » joue son rôle pour la dévolution, suscitant intérêt et discussion, et prise en charge par les élèves ; remarquons que ce n'est pas de façon a-didactique, mais plutôt sur le mode du débat scientifique. Les modèles successifs sont, par ailleurs, donnés par le professeur, et une partie de la discussion porte sur la vraisemblance de ces modèles.

On pourrait situer cette phase de dévolution comme l'identification du milieu «matériel » , constitué ici des différentes hypothèses sur le pétrolier, sa vitesse, l'eau qu'il embarque... sans qu'il y ait encore de problème clairement posé en termes de limite.

2) La référence à l'infini (introduction de suites et de séries)

Le milieu objectif est constitué des hypothèses sur l'avance du pétrolier, des calculs sur les courants et la vitesse du pétrolier, de la question posée cette fois en termes mathématiques (décision dépendant de calculs) : le pétrolier, vus ces calculs (faits par les élèves de n=1 à n=24), peut-il regagner le port?

Le professeur propose alors la série de terme général $(d_n)n>25$ pour continuer le travail de calcul ; ce faisant, il introduit une connaissance qui n'est pas apparue spontanément dans la classe : les calculs sur une série, **à l'infini**, sont pertinents pour traiter le problème du pétrolier qui doit pourtant regagner le port en un temps fini! autrement dit, l'infini, dont nous avions noté le rôle pour la dévolution du concept de limite, fait ici son apparition. Di Martino insiste bien, à juste titre, sur la rupture entre la première partie du travail (discussion sur la pertinence des modèles) et la deuxième partie, qui est véritablement l'entrée dans une problématique mathématique, avec l'infini comme support ; mais une difficulté, signalée par elle (Di Martino 1992, p.30) est effectivement la transition entre la partie «réel » et la partie mathématique, le risque étant que certains élèves n'acceptent pas cette intrusion de l'infini dans le problème qu'ils continuent à voir comme **réel**. Il se produit d'ailleurs des discussions sur le fait de représenter le pétrolier par un point, considéré comme non réaliste par les élèves et susceptible de modifier le résultat (par exemple de conduire à la conclusion qu'il manque 10cm au pétrolier pour rentrer, alors que celui-ci mesure en fait 500m!).

Remarquons de plus que l'infini s'introduit tardivement dans la situation, toute la première partie étant occupée par un travail sur la modélisation, très intéressant mais qui ne se traduit pas mathématiquement par des procédures d'analyse.

3) La majoration du reste de la série et la conclusion

La troisième partie (correspondant au milieu de référence de la situation) débute lorsque le professeur introduit le reste de la série, sa majoration et les questions sur l'information qu'apportent ces données pour répondre à la question de départ. Cependant cette partie est traitée en termes de majoration mais pas en termes de «condition sur n pour que le reste ne dépasse pas... » , c'est-à-dire que le traitement en reste *algébrique*, les élèves calculant simplement l'encadrement pour des valeurs «grandes » de n. La logique du traitement algébrique reste «covariante » (regardons ce que devient la fonction si n prend la valeur...) alors que la logique du *traitement analytique* est «contravariante » , du moins dans l'analyse classique («à quelle condition sur n la fonction prendrait-elle une valeur ...? »). [42]

Du point de vue maintenant de l'a-didacticité, quelle est sa part dans cette situation? Di Martino parle pour la deuxième partie de «ni didactique, ni a-didactique » :

> «... une fois passé l'effet de surprise devant la complexité de l'objet, les élèves s'engagent assez loin dans le travail sur la série (...). Il semble bien que l'élément décisif soit l'arrivée inopinée dans la classe d'informations numériques sur la série *(un élève a programmé la série chez lui beaucoup plus loin que prévu, I.B.)* les résultats fournis par la calculatrice étant bien pour eux le seul moyen de valider leurs affirmations sur la position de la limite par rapport à 200, ils sont pris comme tels.
>
> Cette phase est également difficile à caractériser du point de vue didactique : elle n'a pas de caractère a-didactique, puisqu'à ce niveau, **des moyens de validation plus proprement mathématiques sont indisponibles** *(souligné par nous)* (...). Elle n'est pas non plus didactique, puisqu'aucune institutionnalisation n'a été faite par le maître à propos de la convergence de la série au moment où apparaissent les contradictions. L'institutionnalisation est venue en fait bien plus tard. » (Di Martino1992 p.89)

Selon Di Martino, la deuxième partie serait une phase de transition entre la première partie, a-didactique, et la troisième, didactique. L'a-didacticité de la première partie nous semble discutable, dans la mesure où c'est le professeur qui fournit tous les éléments des modèles, et que les élèves n'avancent même jamais l'idée, qui est donc complètement importée, que ce problème du pétrolier peut recevoir une solution mathématique ; certains élèves résistent même à l'accepter, durant un temps assez long. Cependant le milieu de la première partie s'avère résistant pour y faire vivre des conjectures sur la vitesse du pétrolier, des hypothèses sur l'eau embarquée, sur le temps qu'il mettra à rentrer ; hypothèses qui elles-mêmes vont servir de support aux calculs (mais finis!) et à l'introduction de la série... par le professeur, ainsi que Di Martino le remarque bien.

En définitive quel est le gain par rapport à une situation de non modélisation? il se situe du côté du sens et de l'utilité des concepts d'analyse, c'est-à-dire du côté de l'épistémologie de l'élève, ce qui n'est certes pas négligeable, mais pas du côté de la validation. Il en résulte que par rapport à notre recherche, ce type de situation n'est pas adapté : il y manque les outils de validation... et le SPA.

[42] Les deux termes sont empruntés à Lutz, Meyer, Makhlouf (1996): Pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur ou les réels dévoilés, APMEP, Paris. Les trois auteurs font remarquer que le raisonnement en Analyse non standard est covariant, ce qui est un avantage - de simplicité - sur l'analyse classique.

III. MODELISATION PAR DES SITUATIONS FONDAMENTALES EN ANALYSE

III. 1 SITUATIONS FONDAMENTALES : EXISTENCE ET A-DIDACTICITE

L'étude de quelques réalisations d'enseignement, et de quelques recherches en didactique, nous montre un champ empirique de situations d'enseignement suffisamment vaste et significatif pour que nous puissions nous appuyer sur ce champ, afin de poser à notre tour la question de la modélisation des milieux de l'analyse par une situation fondamentale. Les études effectuées en didactique, lorsqu'elles se sont posé cette question de la recherche d'une situation-problème qui puisse jouer pour l'introduction de l'analyse le rôle d'une situation fondamentale, ont toutes fait ressortir la difficulté qu'il y a à faire entrer les élèves dans un champ théorique nouveau en conservant la dimension a-didactique de la situation. Il est donc possible que nous ayons à faire des choix lorsque nous prévoirons d'élaborer une situation pour l'enseignement de la notion de limite ou de fonction au niveau des classes de Première de lycée. D'après l'étude théorique, un choix principal est de ne pas sacrifier le milieu pour la validation, comprenant une part significative du SPA.

La question de la recherche d'une situation fondamentale de fonction ou de limite peut d'abord être posée d'un point de vue complètement théorique. Le fait de chercher à répondre à cette question n'implique pas qu'une réalisation de ces situations, dans le champ del'enseignement secondaire, soit forcément possible.

III. 1.1 Modèle de situation fondamentale de l'analyse : les fonctions

a) Recherche de la situation fondamentale correspondant à la notion de fonction

En tant que modèle implicite, une fonction existe lorsque l'on ne dispose que d'une variable pour en commander une autre. On peut envisager a priori deux modèles de cette sitaution : un modèle stochastique, et un modèle déterministe. Le modèle déterministe est celui qui rend compte d'une variable qui commande, et d'une variable commandée. Ce qui est spécifique de la fonction, c'est de prendre conscience que l'on peut, à l'aide de l'une des variables, décider de l'autre.

Ce qui peut alors donner accès à la topologie, c'est l'idée de correction : on regarde ce qui se passe pour la variable commandée, et si cette dernière ne prend pas le comportement prévu, il est possible d'ajuster sur la variable de commande. Ceci suppose une fonction *continue*. Si les ajustements de la variable de commande ne garantissent pas l'effet sur la variable commandée, alors on est en présence d'une fonction quelconque, aux comportements qu'on ne peut pas anticiper.

Une analogie mécanique d'un tel sytème serait par exemple donnée par l'image d'un gouvernail de navire (une barre) où si l'on s'aperçoit que le navire ne prend pas le bon cap il est possible de corriger sur la barre. La commande par continuité est donc plus simple parce qu'elle permet la correction par interpolation, il s'agit d'un modèle par rétroactions.

La situation qui peut alors amener à considérer à la fois x et f(x), se produit lorsqu'on est obligé *d'anticiper* à l'intérieur des conditions générales d'une situation de formulation.

Quelles sont les conditions qui permettent de construire une situation pouvant conduire à cette anticipation ?

1. on doit disposer d'assez nombreuses valeurs de la variable de commande, voire d'un nombre potentiellement infini de ces valeurs ;
2. il est nécessaire qu'une fonction soit permanente dans le temps, c'est-à-dire qu'on soit assuré d'une certaine régularité des effets par rapport aux causes ;
3. il est souhaitable de pouvoir, à un moment donné, fixer des conditions sur les fonctions, qui permettent d'identifier des classes de fonctions, et à l'intérieur de celles-ci des fonctions particulières : en effet ceci permet de spécifier les objets cherchés.

b) Conditions au niveau du jeu et du contrat

Lorsqu'on a construit un milieu répondant à ces conditions, il reste à organiser la situation (le jeu) pour que l'élève interagisse avec ce milieu. Il faut donc prévoir :

— que quelqu'un ait en charge l'ensemble E des valeurs de la variable v ;

— que quelqu'un ait en charge l'ensemble F des valeurs de la grandeur G qui varie en fonction de cette variable, et de répercuter les variations de la variable sur les variations de cette grandeur ; c'est donc ce que nous appellerons le contrôle de la fonction f, qui à v associe G ;

— que quelqu'un ait en charge des corrections à formuler quant au résultat (la grandeur G) si le résultat souhaité n'est pas le bon, et demande les corrections adéquates de la variable v ;

— que ces corrections soient prises en charge par quelqu'un, avec contrôle de celui qui vérifie les variations de G. Ceci suppose implicitement, si la fonction est spécifiée, que celui qui prend en charge les corrections de v construise de façon empirique, par interaction avec le milieu matériel disponible, une fonction $\mathcal{H}$, définie de l'ensemble des voisinages d'une valeur de G, soit G_0, dans l'ensemble des voisinages de l'un des antécédents de G_0 , dont l'image par f est incluse dans un voisinage de G_0 , si f est continue ; ou tout au moins dans P(E), si f est quelconque. Alors que celui qui prend en charge les variations correspondantes de G construit également de façon empirique une fonction $\mathcal{G}$, définie dans l'ensemble des voisinages de v_0, vers l'ensemble des parties de F.

Pour que ce contrôle soit effectif, il faut que le joueur qui corrige la variable v gagne si ces corrections entraînent bien l'effet attendu, et soit pénalisé si les corrections sont inadéquates. Pour qu'il y ait une correction à demander, il faut que la grandeur G soit soumise à une contrainte, par exemple, si l'on reprend l'image du bateau et du gouvernail, une trajectoire à respecter pour éviter des obstacles (rochers ou pirates). C'est cette contrainte qui fait office de fonction spécifiée, sinon la trajectoire de G est « quelconque ». On peut alors imaginer deux types de jeu :

1. un jeu où la contrainte est connue, et les variations à contrôler ;
2. un jeu où les variations sont connues, un type de variations spécifié, et la contrainte à trouver.

Dans le jeu 1 il paraît raisonnable d'envisager que le jeu comporte deux joueurs, l'un, A, étant chargé des variations de v et l'autre, B, de répercuter ces variations de v sur G. Le gain du second a lieu s'il répercute correctement les variations de v sur celles de G, et s'il demande les corrections de trajectoire nécessaires. Le gain du premier se produit lorsqu'il rétroagit de façon adéquate aux demandes de correction du second.

On peut imaginer qu'une fonction non continue soit envisagée dans le cas d'une avarie de gouvernail, avarie conduisant à des « sauts » de trajectoire brutaux pour certaines valeurs de la variable v.

Dans le jeu 2 le jeu doit comporter aussi deux joueurs A et B, l'un qui est maître des variations, l'autre ayant en charge de trouver la contrainte par exemple sous forme algébrique. B gagne s'il donne une contrainte qui correspond bien aux variations et au type spécifié (par exemple affine, polynômial...) ; A est pénalisé s'il n'ajuste pas bien les variations qu'il transmet au type de contrainte imposé au départ.

Peut-on engendrer de cette façon l'ensemble des situations où des élèves de Seconde ou Première ont à utiliser des fonctions ? Effectivement toutes les connaissances que l'on peut demander à un élève de Seconde ou Première sur les fonctions nous paraissent relever de ce paradigme. Cependant l'énoncé des conditions du jeu prouve qu'il n'a rien de simple, et que les joueurs ont en charge des conditions difficiles, particulièrement dans le cas d'une fonction continue ; mais le cas « quelconque » risque de de ne pas comporter suffisamment de contraintes pour obliger à la correction de la trajectoire.

Les principales variables didactiques sont :

1. le choix des fonctions (la trajectoire à respecter), et le mode de définition de cette trajectoire (la contrainte peut s'exprimer de façon numérique ou algébrique ou géométrique ou graphique) ;
2. le nombre de joueurs (un ou deux) ;
3. la nature des renseignements envoyés par A à B et par B à A (nombre, intervalle numérique, intervalle paramétrique...).

Pour fonctionner, d'un point de vue social, la situation suppose :

— que les élèves puissent formuler leurs conceptions des variations, c'est-à-dire anticiper sur l'effet des décisions prises (des coups joués) par un modèle implicite de contrôle ; par exemple, mettre en œuvre l'idée qu'une petite variation de v conduit à une petite variation de G et être obligés d'ajuster la variation de v ;

— qu'ils disposent d'un moyen de validation (numérique ou graphique par exemple) permettant de décider qui a gagné.

En décrivant ainsi la situation fondamentale de la notion de fonction, nous ne nous prononçons pas sur la possibilité de réalisation effective de ce type de jeu dans la classe ; il n'est pas non plus évident que tous les jeux doivent être joués. Il faut envisager les contraintes de la classe pour décider ce qui peut être réalisé. Il faut aussi connaître les possibilités ouvertes par les différents types de milieux « matériels » dont on dispose au niveau de l'enseignement considéré : c'est l'objet du chapitre 4.

Le chapitre 5 présente un exemple de situation construite dans une classe de Première scientifique.

III. 1.2 Modèle de situation fondamentale : les limites

Le modèle de situation fondamentale de la notion de limite a été décrit par Berthelot (1983, page 31 à 37). Rappelons ses principales caractéristiques :`

1. il faut maîtriser la fonction de base f ;
2. il faut être capable de faire une hypothèse sur l'existence et la valeur d'une limite L en x_0 ;
3. il faut valider ou infirmer cette hypothèse en construisant, là encore, les deux applications évoquées plus haut : une fonction $\mathcal{H}$, définie de l'ensemble des voisinages de L dans l'ensemble des voisinages de l'un des antécédents de x_0 , dont l'image par f est incluse dans un voisinage de L ; une fonction $\mathcal{G}$, définie dans l'ensemble des voisinages de x_0, vers l'ensemble des parties de F.

Construire l'application $\mathcal{H}$ suppose que l'élève soit capable, empiriquement, par interaction avec le milieu, pour un couple donné de voisinages (U,V), de déterminer si f(x) est bien dans le voisinage V de L à partir du moment où x est dans le voisinge U de x_0 . Il faut donc qu'un joueur ait en charge de produire L, qu'un joueur produise un voisinage de L et le fasse varier, et qu'un joueur produise un voisinage de x_0 convenable. Il faut donc que quelqu'un contrôle l'application $\mathcal{H}$.

C. et R. Berthelot (1983, p. 34) montrent qu'une telle situation fondamentale engendre l'ensemble des situations et démonstrations qu'on peut demander à un élève de Première :

« Les variables didactiques en sont alors :

1. le choix des fonctions ou suites, et leur mode de définition ;
2. le nombre de joueurs (A = B ou A ≠ B)
3. la définition des productions de A, en fin de partie : L, un voisinage de x_0 , d'abord, puis avec sollicitation de preuve, puis avec exigence de preuve ;
4. le nombre de propositions de voisinages par B et leur forme : numérique ou paramétrique ;
5. le nombre de coups qui détermine le gain.

Remarque : lorsque A = B, que le voisinage de x_0 est du type « epsilon » et que A doit prouver que son voisinage de x_0 convient, on se retrouve dans les conditions strictes d'application de la définition. »

Le problème essentiel rencontré en 1983 par C. et R. Berthelot concernait l'exigence de la formulation d'un modèle implicite de contrôle de l'existence et de la valeur de L ; la situation construite en 1983 ne permettait pas de remettre en question les moyens de contrôle dont disposaient les élèves, afin de permettre l'émergence d'une formulation plus conforme aux critères théoriques de l'analyse. Cette difficulté met en évidence la nécessité, pour que le jeu soit jouable effectivement dans la classe, de deux facteurs déjà pointés pour la situation fondamentale de la notion de fonction :

— les opinions éventuellement divergentes des élèves quant à la limite doivent pouvoir être formulées dans un langage accessible à leurs connaissances du moment ;

— les élèves doivent disposer de critères de validation établis ou du moins reconnus en commun, donc une part du SPA doit être disponible dans la situation, ou fournie par le professeur au moment opportun ; et les élèves doivent avoir pu s'en saisir.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude d'une situation d'introduction de la notion de limite.

III.1.3 Existence de réalisations des situations fondamentales

Rappelons ce que dit G.Brousseau (cf. chap. 1 p 26) :

> «Il est concrètement difficile de constituer d'autres collections de situations que celles fournies par les ajustements empiriques résultant de l'action et de la réflexion des enseignants, et tout aussi difficile de délimiter des champs relatifs à une notion. La construction systématique de situations fondamentales fournit un moyen de production et de discussion de ces champs S par le jeu de la transposition, et de l'étude de leurs variables cognitives et didactiques. Elle manifeste et représente l'antagonisme d'un sujet avec un environnement qui lui pose des problèmes d'adaptation qu'il doit résoudre par la création ou la mise en œuvre de connaissances
> **Mais étant donné un champ empirique S de situations, l'existence d'une situation fondamentale n'est pas assurée, et a fortiori son unicité. La fermeture de la conception peut englober un champ trop large. D'autre part cette forme d'engendrement n'est pas la seule concevable : un ensemble d'instruments matériels ou de situations " concrètes ", assorti d'un ensemble de règles et d'un répertoire linguistique peuvent découper un champ S.**
> **Nous appellerons " milieu " un champ de situations assez vaste engendré de cette façon et représentant les contraintes qui vont justifier la réunion d'un ensemble de connaissances en une théorie pertinente cohérente et consistante**. » (Guy Brousseau, 16/11/98)

Il nous semble que, pour l'enseignement de l'analyse, nous nous trouvons justement dans le cas évoqué par Brousseau où le champ englobé est extrêmement large, et donc la recherche de situations fondamentales problématique. Rappelons aussi que suivant Legrand (Legrand 1991, p.37) :

> «Dans une problématique de situation fondamentale, les situations sont proposées comme des paradigmes ; ce qu'on vise, c'est une reproductibilité interne, celle du sens : il s'agit de mettre en évidence les sens principaux du savoir à enseigner et d'envisager des mises en scène qui soient effectivement porteuses de ces significations principales. »

En d'autres termes, une situation fondamentale de la notion de limite par exemple, est un modèle théorique, intégrant une (ou des) problématique ayant conduit à la notion de limite, et permettant à l'élève, grâce à la confrontation à un milieu adéquat, de résoudre un problème, de le formuler et de valider les solutions en utilisant les outils de l'analyse.

Or nous avons pointé les éléments nécessaires qui doivent figurer dans un milieu propre à la validation par les outils de l'analyse classique : c'est ce que nous appelons le SPA. Il convient donc de préciser les éléments du SPA qui doivent figurer dans une situation fondamentale d'une notion d'analyse. Cependant le problème diffère suivant que l'on recherche une situation fondamentale des notions de base de l'analyse (fonctions, limites) ou que l'on soit plus avancé, que l'on dispose donc déjà de notions et d'ostensifs permettant de donner un nom et un sens à des procédures caractéristiques de l'analyse : ce dernier cas étant illustré par la situation proposée par M.Legrand pour l'introduction de l'intégrale de Riemann (cf. Legrand 1997, et III.1.3 ci-dessous).

Par ailleurs nous pouvons poser le problème des situations fondamentales, en analyse, d’une autre façon encore : si l’existence d’une **réalisation** de la situation fondamentale d’une notion n’est pas assurée, ainsi que le dit G.Brousseau, il faut de plus se demander si la situation fondamentale d’une notion ne peut conduire qu’à un seul système de validation.

Or dans le cas de certaines notions, dont on pourrait prendre comme exemple des notions de base de l’école primaire (dénombrement, opérations), on ne connaît pas d’alternative mathématiquement consistante au savoir culturellement reconnu qui répond aux problèmes posés.

Ce n’est pas le cas en analyse. Une raison d’ordre épistémologique que l’on peut donc invoquer pour justifier la difficulté qu'éprouvent les chercheurs à construire une situation fondamentale pour la notion de limite, est la *non-nécessité* du système de validation de l’analyse classique: historiquement, les mathématiciens ont longtemps hésité, comme on sait, entre des validations de type “ classique ” (inégalités, majorations) et des validations par les indivisibles, avant de se fixer sur une théorie. Encore la théorie classique ne l’a-t-elle emporté à l'époque que par incapacité des théories d’indivisibles à s'organiser de façon consistante. Or nous savons maintenant qu’il est possible de travailler avec une théorie alternative à la théorie classique: l’analyse non standard. Dans ces conditions pourquoi penser que les problèmes qui sont à l’origine des concepts de l’analyse, engendrent un milieu conduisant à l’une des théories plutôt qu’à l’autre, puisqu’elles sont toutes deux contingentes? Il paraît alors logique d’imaginer qu’une situation a-didactique, posant une problématique conduisant à des concepts d’analyse, puisse conduire à l’émergence de connaissances du type "théorie classique", comme de connaissances du type "indivisibles". Dans cette optique, on peut même penser que les connaissances du type "indivisibles" ont plus de chances d’apparaître que les connaissances classiques: en effet, l’analyse classique est "contravariante", pour reprendre la qualificatif de Lutz, Makhlouf et Meyer (1996) , c’est-à-dire que l’expression de la propriété d’avoir une limite, pour une fonction, commence par imposer une condition sur les images au lieu de partir de la variable; c’est une difficulté bien connue. L’analyse non standard part de la variable (si x est voisin de a, alors f(x) est voisin de L); a priori il est plus facile, pour des élèves, d’énoncer ce type de propriétés.

Le problème n'est plus le même lorsque l'on dispose déjà d'un répertoire d'ostensifs analytiques, permettant de formuler et de valider; c'est le cas pour l'intégrale de Riemann, pour laquelle M.Legrand a proposé une introduction par une situation fondamentale (Legrand 1997, voir ci-dessous).

III.1.4 Validation et situation a-didactique

Une situation fondamentale d'une notion doit pouvoir, en théorie, fonctionner de façon a-didactique jusqu'au niveau -1 (voir chapitre 2), même si nous avons vu au chapitre 2 qu'a-didactique ne signifie pas *sans intervention du professeur*. Cependant les premières notions de l'analyse posent un problème, qui n'est sans doute pas spécifique de cette théorie (c'est le cas pour l'algèbre à un niveau non élémentaire, cf. Dorier 1997) : comme l'ont signalé de nombreux chercheurs (voir Legrand 1991, et ci-dessus II.2.2), il est extrêmement difficile de trouver une situation a-didactique de validation lorsque les élèves entrent pour la première fois dans une théorie complexe, et qu'ils ne disposent pas encore des outils et des ostensifs convenables pour valider dans cette théorie. Autrement dit l'exigence d'introduction du SPA et celle d'a-didacticité risquent d'être contradictoires, dans la pratique sinon dans le modèle. Cette contradiction qui a été déjà soulevée dans la recherche en didactique, a amené M.Legrand (Legrand 1997, Legrand 1991) à parler de **métaphore fondamentale**, pour désigner des situations qui, si elles ne vérifient pas toutes les contraintes du modèle didactique théorique, sont néanmoins suffisamment significatives du savoir visé pour que le professeur puisse s'appuyer sur elles «pour faire apparaître aux élèves les contours précis de ce qu'on pourra peu à peu appeler avec eux le nouveau savoir X » , ainsi que le dit M.Legrand. Ces situations joueront alors le rôle de situation de référence relativement à ce nouveau savoir. Etant données les exigences que nous avons précisées dans notre étude théorique, pour nous une situation ne pourra jouer ce rôle de métaphore fondamentale pour l'analyse que si elle fait une place suffisante au SPA pour les phases de validation.

Les études menées ci-dessus et le contenu du SPA défini au I, devraient permettre de préciser les conditions que doivent vérifier les éléments des milieux successifs d'une situation d'enseignement de l'analyse, afin que cette situation puisse, sinon être une situation fondamentale a-didactique de la notion visée, du moins permettre à l'élève et au professeur de travailler conjointement le savoir de l'analyse, validation comprise.

III.1.5 Un exemple de situation fondamentale : l'intégrale de Riemann (M.Legrand)

M.Legrand propose, comme situation fondamentale d'introduction de l'intégrale de Riemann, le problème suivant :

> «Si la loi d'attraction universelle de Newton entre deux masses ponctuelles situées à distance r est donnée par la formule $F = k\, M.M' / r^2$, quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M et M' situées à 3m l'une de l'autre, la masse M étant constituée d'une barre homogène de 6m de long et de 18kg et la masse M' de 2kg étant considérée comme ponctuelle? » (Legrand 1997, p. 118).

Cette situation conduit effectivement à un découpage du barreau homogène, menant à une somme de Riemann convergeant vers la force cherchée. Les premières réponses erronées des étudiants, s'orientant vers la recette du centre de gravité, sont disqualifiées par l'itération du procédé (si on coupe le barreau en deux la recette devrait encore être valable, or elle ne conduit pas au même résultat). L'aboutissement de cette démarche fait bien apparaître l'intégrale, non comme une formule énoncée à l'aide d'une primitive, mais comme une limite de série convergente.

Cette situation prend place à l'université, à un niveau d'apprentissage où les étudiants disposent déjà de la notion de limite de suite et de fonction, voire de série dans les cas simples (série géométrique par exemple). Il s'ensuit que les connaissances définies au I.4 font déjà partie du milieu, et qu'on peut les convoquer comme connaissances publiques, même si l'apprentissage de la notion de limite est loin d'être terminé. On se trouve donc dans le cas d'avoir à faire fonctionner ces connaissances ; et bien sûr d'en introduire et institutionnaliser de nouvelles, mais dans le même domaine déjà identifié. Ces connaissances déjà rencontrées par les étudiants peuvent être considérées comme faisant partie du milieu objectif et du milieu de référence ; le milieu objectif contient aussi des ostensifs de l'analyse, qui permettent d'effectuer et de rendre visible le travail demandé.

Notre recherche est différente, puisqu'il s'agit d'introduire ce domaine des mathématiques (l'analyse) pour des élèves qui ne le connaissent pas encore, et en particulier ne soupçonnent pas son système de validation. Nous devrons examiner s'il est vraiment possible, dans les conditions données au niveau d'enseignement visé (Première et Terminale), que les connaissances relatives à la validation figurent dans le milieu objectif de la situation, sans intervention extérieure ; ou s'il faut que le professeur les injecte à un niveau donné de milieu, comme une aide donnée aux élèves pour formuler et valider le problème mathématique posé. Dans ce dernier cas évidemment la situation ne sera plus a-didactique ; ou bien elle pourra comporter une dimension a-didactique, ainsi que Mercier la définit et que nous l'avons reprise au chapitre 2, si elle permet une interaction de connaissances mathématiques entre le professeur et les élèves.

Remarquons que ce qui fait le succès de l'entreprise de Legrand, est en partie dû au fait qu'il dispose *d'ostensifs* des limites et des fonctions, et que ces ostensifs jouent le rôle d'éléments du milieu matériel et objectif, permettant de se poser des questions et de voir l'effet de ces questions. Toute autre est la situation d'introduction des fonctions ou des limites, où l'élève ne dispose pas de ces ostensifs ; il est donc nécessaire d'étudier lesquels doivent être introduits, et ce qu'ils permettent de faire dans le milieu objectif. C'est l'objet du chapitre 4 d'étudier en détail les ostensifs de fonctions dans la perspective d'un travail sur l'analyse ; contentons-nous de supposer pour l'instant que l'élève dispose d'ostensifs préconstruits (dans l'enseignement antérieur par exemple), afin d'analyser les différents milieux nécessaires au projet de situation sur les fonctions ou les limites.

III. 1.6 L'Approche Heuristique de l'Analyse (AHA)

a) La démarche

Les travaux du groupe Approche Heuristique de l'Analyse (AHA) partent de présupposés différents de ceux des travaux sur les situations fondamentales, mais proposent des situations d'enseignement de l'analyse qui paraissent rejoindre les préoccupations relatives à la validation présentes dans notre travail. En effet l'objectif annoncé par le groupe AHA est de partir de « sources intuitives (d'appréhension) des concepts pour déboucher à terme sur des concepts formalisés et pouvoir fonctionner dans des preuves » (Hauchart C. et Schneider M. , 1996). La démarche du groupe AHA part des obstacles épistémologiques et des représentations des étudiants et des professeurs, mais s'attache à produire des situations s'appuyant sur ces représentations perçues comme des connaissances, pour amener la construction d'éléments de validation et une stabilisation des connaissances des apprenants sur une nouvelle formulation plus satisfaisante des concepts. Ces situations proposent une phase d'action de l'élève sur un milieu « expérimental » faisant largement appel à des expériences physiques ou géométriques ; les ostensifs utilisés dans le milieu objectif pour modéliser ces expériences appartiennent au registre graphique, mais aussi algébrique, conjointement avec l'expression de « petits accroissements devenant nuls » à l'issue d'un processus de limite. Ce milieu de référence n'est certes pas produit spontanément par les élèves ; comme nous avons été amenée à le préciser au début de ce chapitre (et au précédent), le milieu d'entrée dans le système de validation et de preuve d'une théorie ne peut être un milieu a-didactique. Le professeur intervient donc pour introduire les éléments de validation de la théorie, mais il le fait sur la base des questions que le milieu a permis de poser, et des connaissances que la situation fait émerger.

b) Les situations

Les situations proposées contiennent la connaissance visée, celle-ci est nécessaire pour résoudre le problème même si c'est parfois une facette de cette connaissance qui est en jeu : à ce niveau de l'enseignement, et à ce niveau de complexité des mathématiques enseignées, il n'est guère envisageable de trouver une situation faisant jouer toutes les fonctionnalités d'un concept. Les milieux envisagés permettent des essais / erreurs, et des validations à l'aide du milieu d'introduction et des outils proposés par le professeur. Cette démarche fait l'hypothèse de la construction des concepts comme « proof generated concepts » (concepts-éprouvettes) selon Lakatos (Lakatos 1976).

En fin une dernière remarque : les situations ainsi aménagées sont parfois assez proches de celles proposées par les chercheurs de « Advanced mathematical thinking », notamment celles qu'ils proposent dans un environnement informatique (zoom sur les tangentes par exemple). La différence tient à la structure du projet AHA, qui repose sur une introduction explicite d'éléments de preuve : c'est en quoi nous le trouvons parent du nôtre[43].

III.2 SPA ET STRUCTURATION DU MILIEU

III.2.1 Milieux disponibles pour la dévolution

a) Les fonctions

Le milieu doit permettre la manipulation d'ostensifs de fonction suffisamment riches, et de maniement aisé, et ceci à un niveau d'enseignement où les élèves ne disposent que de très peu de savoir-faire sur les expressions algébriques et les écritures formelles. Les élèves doivent pouvoir effectuer des tâches relatives aux fonctions ; ceci s'oppose à l'enseignement traditionnel où les élèves n'ont en général qu'à constater des propriétés, sur un ostensif choisi par le professeur et non transformable : que l'on songe par exemple aux fonctions de référence, dont l'expression algébrique comme la courbe sont données par le professeur, sans possibilité de manipulation ou de transformation, sans possibilité pour l'élève *d'agir* sur les ostensifs proposés.

b) Les limites

Les problèmes de convergence de suites et d'infini sont candidats à être des éléments du milieu pour la dévolution de la problématique des limites : de par leur ancrage culturel ils peuvent donner un début de sens à cette problématique, et mettre sur la voie d'une utilisation des nombres «très grands » ou «très petits », qui pourront ensuite être transformés en « nombres aussi grands (petits) que l'on veut » avec des règles de formulation et de validation. Cette approche, nous l'avons vu, n'a rien de très original ; c'est dans le passage à la

[43] cf. Chevallier (1993), Hauchart et Krysinska (1993), Hauchart et Schneider (1996), Schneider (1992).

formulation et dans les moyens de validation mis à disposition des élèves que se caractérisera l'entrée dans l'analyse mathématique.

III.2.2 Milieux de référence : situations de formulation et de validation

Pour introduire véritablement à l'analyse, le milieu de référence doit comporter des éléments de validation de la théorie, c'est-à-dire de ce que nous avons identifié comme le SPA. Ces éléments doivent donc figurer dans le milieu, ou pouvoir s'y introduire du fait du débat suscité par la situation ; ils seront présents sous forme de connaissance ou de savoir, suivant l'avancée dans le processus de validation et d'institutionnalisation.

a) Les fonctions

Le milieu doit comporter non seulement des ostensifs maniables de fonctions, mais aussi des critères permettant de vérifier qu'une fonction possède ou non telle propriété (par exemple d'être croissante, ou bornée...) ; le milieu ne saurait se limiter à montrer des ostensifs des fonctions (de référence) ; en effet dans ce cas la propriété visée se réduit à l'ostensif (une courbe par exemple) qui l'illustre, sans nul critère permettant de dire ce que serait une fonction *qui n'a pas* cette propriété. Il en résulte que si nous choisissons un registre de représentation privilégié pour introduire les fonctions, il faut nous assurer que nous pouvons également disposer d'outils pour agir sur ces représentations, vérifier leurs propriétés, les transformer, changer de registre... Autrement dit, le milieu de référence relatif aux fonctions doit comporter des outils permettant de valider les conjectures, de démontrer les propriétés. Les outils doivent être adaptés au registre de représentation choisi ; ceci implique d'étudier précisément les différents registres, le répertoire fonctionnel associé, et la possibilité de disposer de ces outils de transformation et de validation dans ces registres. L'étude sera faite au chapitre 4 ; il est d'ores et déjà vraisemblable que les registres offrent un accès différent à des outils permettant d'opérer sur les fonctions, au niveau considéré (Première et Terminale).

Le milieu de l'enseignement traditionnel ne fournit pas les ostensifs nécessaires à la validation, relativement à certaines questions (un exemple est donné par le cas étudié au chapitre 2 : est-ce qu'une fonction bornée admet un maximum?) ; il faut donc construire un milieu avec d'autres ostensifs. Ces ostensifs doivent constituer un milieu objectif sur lequel on peut poser des questions, par exemple celle qui est rappelée ci-dessus.

Reprenons la métaphore du jeu, introduite par G.Brousseau (Brousseau 1986). Dans ce jeu figurent :

- des pièces permettant de jouer (les ostensifs de fonctions, et des outils pour manipuler ces ostensifs de fonctions) ;
- des règles de manipulation des pièces (par exemple le fait de savoir qu'un graphique est majoré et minoré impose des règles de manipulation des graphiques, comme le fait qu'on peut affirmer que x < y d'après un graphique cartésien, mais pas que x = y, sauf s'il y a une légende) ;
- un état initial : ostensifs avec questions ou défis ; les décisions du sujet deviennent alors les états du jeu suivant ;
- un état terminal gagnant, si les règles du jeu, relatives aux ostensifs utilisés, ont été mises en oeuvre correctement pour répondre aux questions.

Le jeu pourrait être de construire des fonctions répondant à des spécifications, ou de fournir des questions ou des contraintes relatives à certaines propriétés des fonctions. Dans tous les cas les connaissances relatives au savoir direct (savoir dire si une fonction vérifie une propriété donnée) sont un préalable.

Dans cette métaphore le SPA est ce qui porte les caractéristiques mathématiques du milieu des preuves : il intervient donc dans une situation de formulation et de validation, comme ce qui **permet de gagner** en anticipant sur le comportement d'une fonction, en trouvant des exemples ou contre-exemples... Le SPA fournit donc les règles du jeu d'un certain niveau de milieu, le milieu de référence, celui où commence le processus de validation.

b) Les limites

Nous avons vu au II de ce chapitre que les curriculums de l'enseignement secondaire, depuis les années 1980, proposaient sous forme «d'activités préparatoires » un milieu pour la dévolution du concept de limite, mais que ce milieu n'était parfois pas cohérent avec le milieu proposé pour l'apprentissage (ainsi les «grands nombres » et l'infini dans le milieu pour la dévolution, et des règles sur les fonctions de référence dans le cours ; ou de la recherche d'un indice n tel qu'un terme d'une suite (u_n) soit tel que $u_n < 10^{-8}$, dans les activités préparatoires, avec des critères de comparaison aux suites de référence pour la détermination effective d'une limite, dans le cours).

Une situation d'introduction de la notion de limite doit être construite de façon à ce que, d'une part, les critères de validation soient disponibles dans le milieu de référence ; d'autre part, ces critères apparaissent bien en continuité avec le milieu choisi pour la dévolution.

Le SPA, nous l'avons dit, fournit les règles du jeu du milieu de référence [44]. Il faut donc là aussi créer un milieu objectif sur lequel on puisse poser des questions et des défis ; on peut imaginer, d'après ce qui a été dit de la situation fondamentale et du milieu pour la dévolution, qu'un tel milieu serait constitué d'une suite et de paris sur sa limite : si A parie avec B que la suite tend vers l'infini, B lui demande un nombre N tel que $u_N > 10^{800}$; si A est capable de le donner il gagne, sinon B doit prouver que A pouvait le faire, ou que la suite ne tend pas vers l'infini... Pourquoi choisir 10^{800} ? si l'on prend 10^8 ou 10^{80} , on est encore dans le domaine de calcul d'une calculatrice ordinaire, donc le résultat peut être trouvé par tâtonnements si la suite est suffisamment simple, alors que 10^{800} est en fait représentatif de 10^p , où p est un entier quelconque (d'ailleurs des élèves de Première, nous le verrons, prennent très rapidement la décision de poser le défi avec p quelconque).

Si l'infini est partie prenante du milieu pour la dévolution, par le truchement des suites et de ce que fait une suite quand n « grandit indéfiniment » , ce sont donc les critères du type : chercher N tel que : $\forall n > N, |u_n| < 10^{-800}$, ou $u_n > 10^{800}$, qui sont cohérents avec cette introduction ; en même temps, cette approche permet de déboucher sur des critères de validité conformes à la théorie, et efficaces pour traiter des exemples simples, préalablement à l'introduction de l'algèbre des limites, ou validant cette algèbre. Ces critères font bien partie de ceux que nous avons identifiés comme éléments du SPA : représentation par un voisin, quantificateurs, majorations, intervalles...

Ils permettent de déboucher sur une définition consistante de la limite d'une suite, réutilisable pour démontrer qu'une suite a — *ou n'a pas* — de limite.

III.2.3 Contraintes et possibles ; choix de situations

[44] Bien sûr, on pourrait se dire que les élèves joueront plus tard à ce jeu, qu'ils l'apprendront à l'université. Mais l'enseignement supérieur a bsoin, lorsque les élèves deviennent étudiants, d'un certain milieu pour pouvoir asseoir des savoirs; or cela se révèle impossible si les élèves n'ont pas acquis un minimum de compréhension des règles du jeu théorique. Il se produit la même chose avec la géométrie, si les élèves sont restés sur un contrat spatial au collège, alors que dès la Quatrième on se place entièrement dans un milieu géométrique. Les étudiants qui à l'entrée à l'université sont encore sur un contrat type "fonctions de référence", où par exemple toute fonction définie en un point est continue en ce point, ne peuvent s'adapter à l'enseignement théorique qui leur est alors proposé.

Les considérations qui précèdent font apparaître un certain nombre de conditions et de contraintes, qui vont peser sur les situations qu'il est possible de construire en vue de l'enseignement des notions de fonction et de limite au niveau où nous nous plaçons (enseignement secondaire) ; des choix sont donc nécessaires afin de privilégier les aspects du travail de l'analyse sur lesquels nous souhaitons mettre l'accent.

a) Les fonctions

Pour ce qui est des fonctions, l'objectif est de construire un milieu :
— qui permette des transformations des objets du milieu (fonctions, variables...), des passages d'ostensifs d'un certain registre à d'autres (du même registre ou d'autres) ;
— qui comporte des outils de validation ;
— qui comprend une dimension a-didactique [45], c’est-à-dire qui permet une ouverture du côté des élèves (possibilité de faire construire des éléments nouveaux, objets mathématiques ou questions, par les élèves) et qui prévoit une rétroaction du milieu, ou tout au moins une activité conjointe (en termes de connaissances mathématiques) du professeur et de l’élève.

Ces exigences laissent à penser que le milieu algébrique de l'enseignement institutionnel n'est pas suffisant ; et que le milieu graphique qui peut être proposé en appoint dans cet enseignement, est sujet à trop d’ambiguïtés pour être utilisé en l'état (voir II.1.4 ci-dessus). Il faut donc prévoir d'enrichir ces milieux, de leur adjoindre des modes de validation supplémentaire ; on peut aussi faire appel à des registres peu utilisés actuellement dans l'enseignement, comme le registre formel. L'étude des répertoires disponibles pour l'enseignement de la notion de fonction, du point de vue des milieux que ces répertoires permettent, sera faite au chapitre 4.

b) Les limites

En ce qui concerne les limites, notre objectif principal est de rétablir ce que les programmes récents ont supprimé, à savoir des critères de validation permettant à l'élève de contrôler les affirmations sur les limites de suites et de fonctions. Réintroduire le processus de validation au niveau des premiers apprentissages de l'analyse ne peut sans doute pas, nous l'avons vu, se faire dans le cadre d'une situation a-didactique. Une partie du SPA devra être injectée dans le milieu, par le professeur, au début du processus de formulation et de validation.

En réintroduisant le SPA dans l'enseignement de ce niveau, nous serons amenée à donner, de façon formelle ou non, une définition de la limite. Préalablement les élèves devront avoir pu jouer les paris évoqués au III.1.2, sur des suites convenablement choisies : c'est l'exigence minimale qui nous semble devoir être posée pour que le SPA figure bien dans le milieu de référence de l'élève. Une autre exigence est que les élèves disposent d’éléments permettant le travail sur les limites, c’est-à-dire d’ostensifs propres non seulement au « langage des limites », ainsi que le disent les actuels programmes, mais aussi à la validation et la justification des propriétés énoncées.

L’étude d’une situation pour l’enseignement de la notion de limite sera conduite au chapitre 6.

[45] cf chapitre 2

CONCLUSION

A travers l'étude des éléments présents dans les différents milieux relatifs aux objets de l'analyse, et l'examen de quelques réalisations didactiques pour cet enseignement, nous avons pointé les objets mathématiques spécifiques à la validation en analyse, et certains des ostensifs qui en permettent et en régissent l'usage. Nous avons aussi commencé à définir les types de jeux qui devraient permettre d'établir des situations propres à l'entrée dans l'analyse.

La poursuite du projet engagé dans cette thèse suppose que nous nous interrogions sur les éléments disponibles pour construire un milieu destiné à l'enseignement des concepts de fonction et de limite. Parmi ces éléments, nous avons relevé l'importance des ostensifs affectés au travail de l'analyse, et plus particulièrement à la validation.

Certes les ostensifs ne forment qu'une des composantes du milieu, la composante d'instruments sémiotiques pour reprendre le terme d'Y. Chevallard ; à eux seuls, les ostensifs n'assurent pas la production de connaissances. Celle-ci est prise en charge par la situation, c'est-à-dire le jeu, les questions posées dans le milieu objectif.

Avant de nous intéresser aux situations qu'il est possible d'organiser pour l'introduction des concepts de fonction et de limite, il est cependant nécessaire de faire l'inventaire des ostensifs disponibles, de leur utilisation dans le contrat classique, ainsi que des possibilités qu'ils offrent et qui ne sont pas toutes exploitées dans ce contrat ; il faut aussi cerner les limites de leur aptitude à faire partie du milieu que nous souhaitons construire. Le chapitre 4 est consacré à cette étude.

CHAPITRE 4

CHAPITRE 4

ETUDE DES OSTENSIFS POUR L'INTRODUCTION DE LA NOTION DE FONCTION

After hours (vol 4)
Bill Carrothers

« Les nécessités de la transmission l'exigent : il faut impérativement s'efforcer de réduire sans cesse l'écart qui sans cesse tend à augmenter entre ceux qui font avancer les théories et ceux qui essayent, eux, d'avancer dans leur compréhension (à tous les moments de leur apprentissage : de la maternelle à l'université, comme on disait ; et au-delà). (Une indiscutable accélération dans cette fuite de galaxies est apparue depuis le début du siècle).
Jacques Roubaud, « Mathématique : »

I. LES OSTENSIFS

I. 1 NECESSITE DE L'ETUDE DES OSTENSIFS

Au chapitre 3 ont été dégagés quelques impératifs liés à la validation dans l'enseignement de l'analyse. Une première approche des situations fondamentales des notions de fonction et de limite est apparue ; or une situation fondamentale nécessite un milieu, un jeu sur ce milieu, une famille de variables didactiques qui permette de couvrir le champ de problèmes associé au savoir visé ; différents cadres du savoir permettant de faire jouer les problèmes à l'aide de différentes représentations. Avant de poser la question : « Est-ce qu'un problème peut donner naissance à une réalisation de la situation fondamentale ? » il est nécessaire de faire le point des *représentations du savoir de l'analyse* (numériques, géométriques, graphiques...) dont l'enseignement peut disposer.

En effet, au chapitre 3 l'étude des différents programmes de l'enseignement secondaire a mis en évidence les nombreuses façons de représenter les fonctions dont disposent les mathématiques, et les hésitations entre ces différentes représentations, dont témoignent les programmes successifs. Les représentations des fonctions conditionnent dans une certaine mesure celles des limites ; et les représentations choisies conditionnent aussi le type de contrat qui peut être recherché dans la classe pour le travail sur fonctions ou limites, car elles permettent ou non de mettre dans le milieu, notamment le milieu des preuves, certains éléments de la théorie.

Nous nous proposons donc d'étudier ces représentations. Il s'agit de préciser quelle est leur *utilité*, quel travail peut être fait grâce à elles ; mais aussi lesquelles sont viables dans l'écologie actuelle de l'enseignement secondaire. Le but de cette étude est double :

— déterminer les possibilités théoriques des outils symboliques dont dispose le professeur de mathématiques pour enseigner la notion de fonction (et ultérieurement de limite) ;

— conduire à la construction d'un milieu objectif d'une situation pour l'enseignement de la notion de fonction, situation qui sera étudiée au chapitre 5.

Cette dernière préoccupation amène à chercher un milieu « matériel » qui puisse donner prise à une situation d'action pour les élèves. Or un tel milieu, en mathématiques, au niveau de l'enseignement secondaire, comprend nécessairement des *ostensifs,* de concepts antérieurement étudiés ou même déjà des ostensifs des concepts visés ; ces ostensifs sont eux-mêmes des collections structurées de *signes*.

Certes ces signes, ces symboles peuvent être symbole de *quelque chose*, mais c'est *pour quelqu'un*. Pour le professeur un symbole fonctionnel évoque bien une fonction, mais il ne deviendra un symbole de fonction, pour l'élève, qu'en cours d'apprentissage ou à la fin de celui-ci. C'est par le jeu de la situation, la production de connaissances, le jeu entre différents ostensifs représentants d'un même concept, que ces ostensifs prendront sens comme symboles du concept. En ce sens les symboles que l'on introduit dans la situation d'action d'une situation, jouent le même rôle que les cubes à l'école maternelle, où l'enfant ne voit d'abord *rien à compter*. Un jeu de cubes n'est un ostensif de nombre que s'il est finalisé par le jeu de la situation ; le parallélogramme articulé n'est un ostensif de fonction que dans les mêmes conditions : existence d'une situation posant le problème de la variation de son aire.

Il n'existe pas, actuellement, en didactique, de mot pour parler d'une « chose » qui n'est pas encore, comme dirait Conne (Conne 1997) *objet*, c'est-à-dire *objet de pensée* (et de connaissances) entre les deux institutions qui en parlent (l'institution « professeur » et l'institution « élève »). On pourrait les nommer « objets de médiation » ou « médiateurs », puisqu'ils servent à la communication à propos d'une connaissance, qui, d'un côté de la relation enseignant / enseigné, est encore à venir[46]. Convenons cependant d'employer le mot « ostensif » pour désigner ces éléments qui sont mis dans le milieu pour être manipulés suivant des règles, et en qui le professeur, sinon immédiatement l'élève, voit des représentants du concept qu'il vise[47]. Un ostensif désigne donc, dans ce chapitre, un symbole, reconnu par les deux institutions qui le manipulent (institution enseignante et institution enseignée), ou seulement (provisoirement) par l'une des deux, comme ostensif d'un concept mathématique, avec sa fonction sémiotique et sa fonction instrumentale.

Les ostensifs s'organisent en *registres* ; ce sont ces registres qui permettent de parler des objets mathématiques, de les traiter, de les mettre en relation avec d'autres. Dans ce chapitre nous nous appuierons largement sur les travaux de Duval (Duval 1993, 1994, 1996) et de Bosch et Chevallard (1999) pour tenter de définir les ostensifs disponibles pour représenter les concepts que le travail de l'analyse prend comme objets.

L'étude de ces ostensifs, et de leur organisation en registres, est ce qui nous permettra de définir une base « matérielle » d'un milieu possible pour l'enseignement de la notion de fonction, qui comporte des éléments pour la validation : en effet ce sont les outils à la disposition des élèves, qui déterminent ce que ceux-ci peuvent *faire* avec les fonctions, et ce que le professeur peut envisager de faire avec les élèves. A ce niveau d'enseignement, les ostensifs jouent le rôle qui, dans l'enseignement primaire, est dévolu d'une part au milieu matériel, et d'autre part là aussi au registre disponible. Les ostensifs (avec la réserve faite plus haut sur leur réel fonctionnement comme « objets » ou comme « choses ») permettent donc de

[46] Suivant en cela une proposition, abandonnée ultérieurement, de C.S.Peirce (Peirce, 1898).

[47] On peut d'ailleurs remarquer que les règles ne sont aussi, au départ, mathématiques que pour l'enseignant. L'élève, lui, y voit des règles de manipulation matérielle ; c'est la nécessité de déterminer la question mathématique posée par la situation qui peut conduire à donner un sens mathématique à la règle du jeu, et donc aux symboles (voir aussi chapitre 2).

construire un milieu **matériel** et **objectif** d'une situation pour l'enseignement de la notion de fonction.

I. 2 REMARQUES SUR LES OSTENSIFS

Nous pouvons d'ores et déjà avancer quelques remarques sur les ostensifs de fonctions :

I. 2.1 Variété des registres

Il se trouve que la notion de fonction est un outil très utilisé dans de nombreux domaines des mathématiques, et qu'en conséquence on rencontre les fonctions sous de nombreuses formes : numérique, algébrique, géométrique, formel, graphique ; sous forme de séries, d'intégrales... Même si l'on se cantonne à un niveau élémentaire, on est amené à travailler sur les fonctions avec des registres variés. Cette diversité des registres se manifeste dans l'enseignement institutionnel, mais de façon sélective : tous les registres ne sont pas sollicités également, et ils peuvent se voir attribuer des rôles spécifiques bien différenciés dans le travail sur les fonctions. Ces rôles peuvent correspondre à des niveaux de milieux différents, ainsi le registre géométrique pour la dévolution et le registre algébrique pour la validation, dans le contrat classique de l'enseignement secondaire.

I. 2.2 Registres et outils de validation

Il est raisonnable de penser que les ostensifs qui servent à représenter les fonctions puissent, dans une certaine mesure à préciser, conditionner le travail possible sur cette notion. En effet, comme nous l'avons dit, ces ostensifs sont les outils disponibles dans le milieu, et une tâche ne peut être effectuée par les élèves, ni commentée par le professeur, s'il n'y a pas d'outils pour cette tâche ; Marianna Bosch a ainsi étudié, pour la proportionnalité, le type de travail que permettent les différents ostensifs et leur organisation : organisation classique de la théorie des rapports et proportions, fonctions linéaires (Bosch, 1994, p. 130, p. 246...). M.Bosch donne également comme exemple le cas des ostensifs « $\sqrt{x}$ » et « $x^{1/2}$ » qui désignent la même fonction ; mais la supériorité du deuxième se révèle lorsqu'on veut dériver la fonction. Par contre la non dérivabilité de la fonction en 0 est plus explicite, en tous cas pour un élève du secondaire, sur la forme : $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ que sur la forme : $\frac{1}{2}$ $x^{-1/2}$ (cf Bosch 1994, p. 55 et suiv.)

Il faut donc étudier les possibilités qu'offrent les différents ostensifs pour mener le travail sur les fonctions au niveau choisi (fin de la scolarité secondaire) ; et de plus, nous avons posé comme condition sur l'introduction des notions de l'analyse la possibilité de disposer d'outils de validation. Un critère déterminant du choix du (ou des) registre choisi pour le travail sur les fonctions, sera donc la disponibilité, dans ce registre, d'outils de validation suffisamment aisés à manier, et permettant de couvrir un champ de problèmes suffisamment large.

a) Maniement des outils de validation

Les outils servant à la validation doivent en effet être suffisamment commodes à manier, afin que des élèves n'ayant que peu de virtuosité technique soient capables d'activité de preuve sur des fonctions « quelconques », et non seulement sur un vivier réduit de fonctions de référence.

En effet le milieu « fonctions de référence » peut se contenter d'outils de preuve réduits (essentiellement quelques manipulations algébriques) car il y est demandé de prouver très peu. De plus, les outils et méthodes de preuve proposés usuellement dans le contrat classique « fonctions de référence » peuvent se révéler inadaptés à des questions inhabituelles, parce qu'ils sont trop lourds à manier, voire même qu'ils ne permettent pas de donner la solution, sans que les élèves en soient avertis. Ainsi une preuve de type algébrique n'est pas adaptée pour répondre à la question, inhabituelle mais d'un habillage trompeusement familier, posée par A.Antibi à des élèves de Première et à des étudiants préparant le concours de professeur : montrer qu'il existe un nombre a tel que le polynôme $f(x) = x^4 - 50 x^3 - 20$ garde un signe constant sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (Antibi 1988).

De plus, peu importe que cet album de « fonctions de référence » comporte 5 ou 12 fonctions, plus quelques fonctions obtenues à partir des premières par des transformations géométriques simples : les élèves ne peuvent, à partir d'une vingtaine de fonctions « connues » (et connues souvent seulement par une présentation du professeur, le tracé de leur représentation graphique cartésienne et la résolution de quelques équations) se représenter des fonctions différentes, ni être capable d'émettre des conjectures sur des fonctions non définies à partir des fonctions de référence, et valider ces conjectures. Autrement dit, même les éléments servant à la validation dans le contexte des fonctions de référence, risquent d'être inopérants dans un autre contexte.

b) Champ de problèmes

Le maniement aisé des outils de preuve et de validation doit aller de pair avec l'ouverture du champ de questions et de problèmes qui peut être traité avec ces outils. En effet, l'utilisation des outils doit non seulement être assez facile, mais ne pas opérer sur un champ trop restreint : un outil facile à utiliser, mais qui ne serait utilisable que pour quelques fonctions bien particulières, ne permettrait pas la démarche de généralisation et de décontextualisation inhérente à l'institutionnalisation. Ainsi le numérique, dans le contexte « fonctions de référence », ne permet que d'identifier des fonctions déjà connues, ou des fonctions affines... il est peu efficace, étant donné que l'élève ne dispose que de peu de valeurs, dans le cas de fonctions d'expression algébrique plus complexe, et inopérant (ou presque) pour parler des fonctions « quelconques » .

L'étude qui suit a donc pour but d'analyser les ostensifs disponibles, à mettre dans le milieu pour l'introduction de l'enseignement de la notion de fonction, en s'attachant plus précisément aux registres, constitués d'ostensifs, que chaque domaine des mathématiques concerné permet d'employer. Nous nous proposons de comparer les différentes possibilités ouvertes, par chacun de ces milieux, pour le travail sur les fonctions au niveau de l'enseignement secondaire.

En ce sens il s’agit d’un travail exploratoire, un outil en vue d’identifier des éléments du milieu, afin de préparer la recherche d’une réalisation de situation fondamentale sur la notion de fonction.

II. ORGANISATION DES OSTENSIFS : THEORIES, REGISTRES, REPRESENTANTS

II.1 THEORIES ET REGISTRES DE REPRESENTATION

II.1.1 Les théories

Le travail mathématique sur les fonctions peut se situer a priori dans six domaines, qui correspondent à des théories mathématiques développées (autrement dit, il existe pour chacun de ces domaines un savoir savant qui définit les objets de ces domaines et la façon d'opérer sur eux, cf chapitre 1) :

1. la logique formelle (définition formelle des fonctions quelconques, graphes formels, quantification, composition de fonctions...) ;
2. le numérique (nombres, tableaux de valeurs, analyse de données...) ;
3. l'algèbre, pour les fonctions définies par des expressions algébriques ;
4. les graphiques (la théorie « savante » des graphiques, l'ancienne théorie des abaques, n'est cependant plus une théorie savante des mathématiques contemporaines) ;
5. la géométrie élémentaire (variation d'une longueur associée à une position d'un point, lieux géométriques...) ;
6. l'analyse : continuité, limites, primitives, dérivées, intégrales, séries.

Au début du travail sur les fonctions, seuls les cinq premiers peuvent être convoqués, du moins explicitement (la continuité, en effet, intervient implicitement dans le tracé des représentations graphiques de fonctions) ; nous nous proposons de regarder de quelle façon.

Comme dans ce qui précède (chapitre 1), nous appellerons **théorie** le domaine mathématique concerné : nous dirons que le registre utilisé est par exemple celui de la *théorie algébrique*, si les ostensifs employés font partie de ceux de cette théorie : ou si le travail porte sur les objets de la théorie et utilise les relations entre les objets et les outils de validation de la théorie.

Nous choisissons de parler de théorie plutôt que de cadre, la notion de cadre ayant déjà été définie par Douady, dans un sens plus large que celui que nous souhaitons utiliser. Rappelons en effet la définition donnée par R.Douady des cadres (Douady, 1986, p.11) :

> « Disons qu'un *cadre* est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations. (...) Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. »

Ce que nous considérons comme **théorie**, désigne donc la première partie de ce que Douady nomme *cadre* : une **branche des mathématiques** et les relations *mathématiques* entre les objets de cette branche.

Dans une théorie figurent donc des objets mathématiques ; or les mathématiques ont ceci de particulier que les objets ne sont accessibles qu'au travers de représentations, et leur traitement n'est possible que par ces représentations. Ces dernières peuvent appartenir à différents registres, qui ne sont pas forcément en correspondance biunivoque avec la théorie : en effet certaines représentations sémiotiques peuvent être communes à plusieurs théories (par exemple les signes opératoires sont communs au numérique et à l'algébrique) ; une même théorie peut d'autre part faire appel à des registres de représentation différents : par exemple la géométrie utilise des dessins mais aussi des lettres, et pratiquement toutes les théories mathématiques utilisent le registre numérique.

II.1.2 Registres de représentation

Dans une théorie sont donc disponibles un certain nombre d'ostensifs qui peuvent appartenir à différents **registres de représentation** (Duval 1996). Ces registres de représentation permettent de disposer d'ostensifs d'une notion ; ces ostensifs se constituent en **registres**, c'est-à-dire en systèmes organisés d'ostensifs. Nous disons systèmes organisés, car ces ostensifs sont liés entre eux par des relations, relations qui elles-mêmes se traduisent parfois par des ostensifs spécifiques. Ainsi dans le registre formel, des symboles qui permettent de parler de fonctions, f et g, sont liés par d'autres ostensifs, par exemple o qui permet de représenter la composition de f et g ; il existe des flèches utilisées pour relier la variable x et son image ; ou des symboles qui permettent d'opérer sur des fonctions comme o déjà cité, mais aussi la somme, le produit, l'intégrale, le symbole exponentiel -1 qui permet de représenter l'inverse d'une fonction...

Tous les signes ne sont pas de même nature, certains sont surdéterminés alors que d'autres peuvent être affectés à n'importe quel objet mathématique : Duval (Duval 1996) parle de *signes libres* pour les signes qui n'ont pas de signifiance a priori, ce qui est le cas des signes qui servent à organiser les autres ostensifs (mais aussi de tous les signes du registre formel, comme x, f...) ; « droite » par exemple, n'est pas un signe libre, il ne peut désigner, dans un énoncé, n'importe quel objet mathématique : c'est un *signe lié*.

Duval (Duval 1996 p. 356) identifie trois aspects relatifs à la production ou l'utilisation de représentations sémiotiques : l'aspect structural, l'aspect phénoménologique, l'aspect fonctionnel. Dans ce qui suit nous n'étudierons pas l'aspect phénoménologique (mode de production, interne ou externe, et mode sensoriel pour l'appréhension) ; nous évoquerons l'aspect structural (nombre et nature des signes, relations entre eux) ; nous nous intéressons surtout à l'aspect fonctionnel, c'est-à-dire ce qui fait qu'un système de signes constitue bien un registre de représentation, à savoir sa capacité à assurer les trois fonctions de :

— communication (ou transmission) ;
— traitement ;
— objectivation.

Pour qu'une connaissance ou un savoir mathématique puisse être mis en oeuvre, il est alors nécessaire, toujours selon Duval :

— que le sujet dispose, non pas d'un mais de plusieurs registres de représentation (on ne peut en effet différencier un objet de sa représentation que si on dispose d'au moins une autre représentation, dans un autre registre) ;

— qu'il ait acquis la coordination de ces registres, faute de quoi on observe les effets du cloisonnement entre les différents registres [48].

On peut alors distinguer les transformations de représentations qui restent dans le même registre, et que Duval nomme **traitements**, des changements entre registres différents, qui sont des **conversions**. D'autre part, il importe de bien distinguer l'objet de la représentation de son contenu : l'objet est le concept mathématique qui est représenté (une représentation est forcément une représentation de quelque chose), le contenu est ce qui est visible, et qui pourra être identifié comme forme explicite rendant accessibles certaines

[48] Ces affirmations sont néanmoins discutées par certains chercheurs (Lacasta 1995; Chauvat 1997); pour notre choix de milieu, nous nous déterminerons par rapport aux fonctionnalités de chaque registre et non par rapport à cette coordination; il est par contre peut-être possible d'espérer récupérer celle-ci comme une conséquence du travail dans les registres retenus.

propriétés de l'objet (Duval 1996). Il paraît clair qu'un représentant d'un concept n'en livre alors qu'un aspect partiel, c'est un des points que nous étudierons ci-dessous.

Ces éléments de sémiotique nous permettent de poser de façon plus précise le problème qui nous occupe, à savoir le travail que permettent, sur les fonctions, les différents registres de représentation relatifs aux théories mentionnées ci-dessus [49] ; et les éléments à introduire dans un milieu propre à l'apprentissage de ce concept. Cependant il nous paraît utile de dégager tout d'abord quelques caractéristiques des ostensifs ainsi que des représentants d'un concept, et quelques conséquences sur l'introduction de ces représentants dans un travail mathématique à but d'enseignement.

II. 2 OSTENSIFS

Chevallard désigne par *outils sémiotiques* les ostensifs à manipuler pour travailler sur un concept : outil sémiotique, ou instruments sémiotiques, car ils ont :

> « une valence instrumentale et une valence sémiotique. (...) La valence instrumentale me permet de *faire ;* sa valence sémiotique permet de *voir ce qui est fait* . Il y a plus. Lorsque, comme ici, les objets ostensifs manipulés figurent dans le registre de la scription ou de la trace, on peut voir, non seulement ce qui est *en train* de se faire, mais aussi *ce qui a été fait*. Leur tracé fonctionne comme mémoire du travail accompli, et me suggère *ce qu'il reste à faire*. » (Chevallard, 1996, p.51).

Bosch et Chevallard (1999) soulignent qu'un non ostensif, c'est-à-dire un concept, est un *émergent* d'ostensifs. Les ostensifs sont non seulement des *signes* témoignant de l'activité mathématique, mais ils sont les *instruments* qui permettent celle-ci : ainsi il est impossible de séparer l'aspect conceptuel de l'aspect instrumental.

Par rapport au travail de Duval évoqué ci-dessus, il importe de noter une différence significative : Duval considère les objets mathématiques comme donnés a priori, et donc le travail sur ces objets dépend des connaissances du sujet, en particulier dans le traitement et la conversion. C'est une approche de type cognitiviste. Bosch et Chevallard ne laissent pas à la seule responsabilité du sujet le soin de faire, par exemple, le lien entre deux registres de représentation : en effet ce lien dépend d'une organisation praxéologique locale des mathématiques, laquelle est installée ou non dans l'institution qui a demandé la tâche de conversion. Cette organisation, si elle existe, peut être décrite ; sinon, elle peut être pointée comme manquante. En ce sens il existe donc des ostensifs servant à l'organisation d'autres ostensifs, ou au passage entre ostensifs. Un exemple d'organisation manquante de ce type de passage, concernant le travail sur les fonctions numériques, est donné à la fin du présent chapitre.

Afin de savoir quel travail ils permettent de faire avec (sur) les fonctions, il sera nécessaire de préciser les outils sémiotiques utilisés dans chaque registre. Considérons, comme dit ci-dessus, que les règles de transformation ou d'écriture propres à chaque théorie font également partie des outils sémiotiques considérés. Ces règles ne se voient parfois qu'implicitement dans toute manipulation des outils, mais elles sont bien explicitables, comme savoirs de la théorie dans lequel se fait le travail. En ce sens ce sont elles aussi des instruments connus du travail.

II. 3 REPRESENTANTS

[49] De plus, le registre de la langue naturelle est présent à travers tous les autres; il peut parfois même se substituer à un registre.

Un **représentant** d'une fonction est un élément particulier de l'ensemble des outils sémiotiques recensés ci-dessus, par exemple une formule algébrique qui définit la fonction, ou le symbole « f », ou encore la représentation graphique de la fonction dans un repère (O, **i**, **j**). Un représentant d'une fonction est donc un ostensif de fonction choisi dans l'un des registres disponibles. Le terme « représentant » a été choisi pour éviter la confusion avec « représentation », qui est l'acte de représenter ; il est employé dans certains articles (voir Schwartz et Dreyfus, 1995) dans le sens que nous lui donnons (en anglais « representative »).

Un représentant est ce qui permet le traitement d'un concept ; les possibilités de traitement ouvertes par un représentant ou un registre ne dépendent que du concept et du représentant, ce sont des éléments du **savoir** sur ce concept relativement à ce représentant.

Mais les représentants, qu'ils appartiennent à n'importe quel registre correspondant à une théorie, ont des caractéristiques communes que nous nous proposons d'étudier. Ces caractères peuvent être décrits comme étant essentiellement d'être **partiels** et **ambigus.** Ces caractéristiques donnent lieu à des **connaissances,** lesquelles prennent plus ou moins en compte ces caractères et permettent de se servir de façon adéquate des représentants et de changer de représentant (cf II et III ci-dessous). Remarquons que ces caractères correspondent assez bien à ce que J.Rogalski, en parlant des graphiques (Rogalski 1984), avait appelé leurs caractères **réducteur et producteur**. En effet le caractère réducteur vient de ce que le représentant n'est pas apte à rendre compte de la globalité du concept ; et le caractère producteur de ce qu'un représentant détermine des observables non prévus à l'avance dans la représentation. Convenons donc d'adopter les qualificatifs *réducteur* et *producteur* pour tout représentant, même non graphique.

La suite de cette étude prévoit donc d'analyser les possibilités ouvertes, dans le travail sur les fonctions, par les différents registres de représentation et les représentants de fonctions qui leur sont attachés ; et d'examiner comment se produisent les transformations à l'intérieur d'un même registre, ou entre deux registres différents. Cependant il est d'abord nécessaire de préciser les caractères réducteur et producteur des représentants.

II. 3.1 Le caractère réducteur des représentants

Il est issu de la distinction entre l'objet et ses représentants. Il en résulte que chaque représentant d'une fonction (d'un concept plus généralement) n'hérite que d'une partie des propriétés du concept. On peut faire l'hypothèse que c'est de la multiplicité des représentants possibles que le concept et ses propriétés vont se dégager (coordination des représentants à l'intérieur d'un registre et entre registres), sans pour autant penser forcément que la coordination est un préalable au travail sur le concept.

On peut observer que le caractère réducteur d'un représentant le rend porteur de certaines propriétés du concept ; ces propriétés ne sont pas les mêmes suivant la théorie à laquelle appartient ce représentant. Ainsi le registre numérique (tableau de valeurs) ne permet pas de conjecturer la continuité, ou les limites, ni même les extrema d'une fonction ; le cadre algébrique est muet sur le sens de variations, mais commode pour les opérations algébriques ; le cadre formel ne donne pas de renseignements sur les valeurs prises par f(x) ni sur l'équation de la courbe...

Du fait du caractère réducteur (et producteur, voir ci-dessous) des représentants, il correspond donc à chaque registre un **domaine de fonctionnement**, lequel est la traduction, en termes d'action ou de validation, de ce que l'élève, ou le mathématicien, ***peut*** faire ou prouver, sur le concept concerné, avec les outils sémiotiques du registre considéré. Le domaine de fonctionnement des registres, relativement à la notion de fonction, est étudié au II de ce chapitre.

Une conséquence fondamentale du caractère réducteur des représentants est la part d'**arbitraire** qui demeure dans certains représentants d'une fonction. Ainsi un tableau de valeurs de (x, f(x)) ne définit pas *une* fonction, du moins sur un intervalle de **R** ; par exemple

:

x	- 1	0	1
f(x)	- 1	0	1

peut être le tableau de trois valeurs de f(x) = x de $f(x) = x^3$, ou de f(x) = sin π x, ou encore d'une autre fonction, absolumment quelconque, dont on ne connait pas de forme algébrique. C'est dire que tout représentant donné correspond à plusieurs fonctions possibles. Ce caractère est plus ou moins marqué suivant les outils ; il semble couramment admis que l'outil algébrique est porteur de moins d'arbitraire que l'outil graphique : nous aurons à interroger cette affirmation avec les moyens d'analyse dont nous disposons.

Remarquons qu'il n'en est pas de même pour tous les représentants des objets mathématiques : un représentant d'un nombre, dans un système de numération donné, définit ce nombre, même si on ne sait pas l'écrire « complètement » ; ou même, le fait d'écrire une équation et de préciser l'ensemble des valeurs de la variable définit l'équation. Il en est de même pour certaines fonctions (les fonctions « simples ») mais de loin pas pour toutes.

Les représentants formels sont peut-être ceux qui recèlent le plus d'arbitraire, parce que l'on peut désigner une fonction une lettre, f par exemple, sans rien savoir sur cette fonction. Cependant les outils formels sont fréquemment utilisés pour parler de fonctions *quelconques*, ce qui annule l'arbitraire en le généralisant. D'autre part les outils formels peuvent, dans certains cas, permettre d'énoncer des propriétés des fonctions, ou des intervalles sur lesquelles les fonctions sont définies, de manière extrêmement précise.

Les représentants numériques, comme dit ci-dessus, comportent une part importante d'arbitraire, du moins à un niveau élémentaire ; à des niveaux plus élevés, il existe des méthodes (régression linéaire, approximation par des polynômes, méthode des moindres carrés, lissage d'une courbe...) pour réduire l'incertitude sur des données numériques, ou pour les organiser d'une façon qui permet de les modéliser par des fonctions. Ces méthodes ne font pas partie de la culture de l'institution « enseignement secondaire ». Tout au plus y a t-on introduit un peu de statistiques, qui ont d'ailleurs du mal à trouver une niche écologique.

Les représentants algébriques peuvent sembler moins réducteurs que les autres, car ils paraissent peu porteurs d'arbitraire ; s'ils définissent exactement, en effet, la fonction dont on parle, ils sont néanmoins incapables de rendre visibles certaines de ces propriétés, comme le sens de variations.

II. 3.2 Le caractère producteur des représentants

Ce caractère est intrinsèque au fait de représenter, c'est-à-dire à l'utilisation des signes. Un signe (ou une série organisée de signes) peut être pris pour lui-même, ou bien pour quelque chose qui est représenté ; auquel cas il peut renvoyer à plusieurs signifiés, que le contexte peut éventuellement départager. Dans le cas de la sémiotique de la langue naturelle, par exemple, le contexte est culturel et l'appui sur celui-ci fait qu'un signe organisé (un mot par exemple) ne se trouve pas sans signifié(s), ni celui-ci (ceux-ci) sans référent(s). Il n'en est pas forcément de même en mathématiques, où l'on peut imaginer manier les suites de symboles uniquement d'après les règles logiques qui les régissent - ces symboles et ces règles ont même été construits dans ce but - sans aucun contrôle sur ce qu'ils représentent. Ainsi le signe « f » peut n'être pris que comme un symbole sur lequel on a le droit d'appliquer certaines règles formelles ; le fonctionnement interne de ces règles ne garantit pas que ce symbole renvoie au concept « fonction ». On peut d'ailleurs observer, du primaire à l'université, des comportements d'élèves ou d'étudiants maniant des symboles sans référence au concept, avec complète perte de sens.

D'autre part un même représentant peut représenter différents objets, mathématiques ou non : c'est en particulier vrai dans les registres géométriques ou graphiques, où l'on sait bien que l'élève peut voir le dessin là où le professeur voit la figure. Mais sans doute plus d'élèves qu'on ne le pense, même au niveau de Première scientifique, ne voient dans une formule algébrique que des signes agencés suivant des règles hermétiques, et n'ont que peu de moyens de contrôle sur le travail algébrique (cf II.3 ci-dessous). Par ailleurs, le caractère réducteur signalé ci-dessus entraîne forcément une ambiguïté sur l'objet « total » représenté : ainsi du tableau numérique, comme nous l'avons vu ; mais aussi du graphique, qui n'est vu que dans une fenêtre et qui pourrait être prolongé de plusieurs façons différentes ; de plus le dessin-graphique, même dans la fenêtre représentée, n'est pas la RGC d'une fonction unique mais d'une classe de fonctions, étant donnée l'approximation du tracé.

Par ailleurs, les caractéristiques perceptives du registre choisi peuvent également entraîner des biais d'interprétation : nous reprendrons l'étude de ce phénomène plus particulièrement pour le registre graphique (étude largement avancée par J.Rogalski, Chauvat, Duval).

Dans ce cadre d'analyse, il est maintenant nécessaire d'étudier les possibilités ouvertes par chacun des registres pour le travail sur les fonctions, ainsi que la façon dont l'enseignement traditionnel fait fonctionner chacun des registres ; nous pourrons ainsi envisager les alternatives à cette organisation du savoir.

III. FONCTIONNALITES DES REPERTOIRES ET DES REPRESENTANTS

Pour les besoins de la construction d'un milieu propre à l'introduction des fonctions numériques, nous étudions les registres numérique, algébrique, géométrique, graphique, analytique. Nous n'entreprendrons pas d'étudier séparément le registre de la langue naturelle, qui accompagne tous les autres ; cependant les tâches de conversion de registres, par exemple, sont pertinentes de la langue naturelle à un autre registre, et d'un registre autre à la langue naturelle. Nous signalerons les résultats connus dans ce domaine, chaque fois que cela s'avérera utile à notre étude.

III. 1 LE REGISTRE NUMERIQUE ET LE REGISTRE DES TABLEAUX

III. 1.1 Ostensifs numériques et tableaux

— indices, exposants, numérotation des graphiques ou des tableaux ;
— valeurs de x et f(x), tableaux de valeurs ;
— solutions d'équations, valeurs approchées ;
— données numériques, outils statistiques ;
— tableaux de variations, flèches pour indiquer le sens de variations, symboles pour indiquer les valeurs telles que f n'est pas définie, les limites.

Les tableaux de variations sont étudiés dans le même paragraphe que le registre numérique, car ils nous paraissent jouer dans l'enseignement secondaire le même rôle, à savoir l'aide pragmatique (réelle ou supposée) au tracé de courbes représentatives de fonctions.

III. 1.2 Utilisation dans le contrat classique

Dans les manuels du secondaire on peut repérer trois places que le numérique occupe de façon permanente :

— d'une part l'introduction de la notion de fonction, avec des exercices montrant que l'on peut calculer une quantité y lorsqu'une quantité x prend des valeurs données ;

— d'autre part la construction de RGC (représentations graphiques cartésiennes) par tableaux de valeurs (x, f(x)) (cf Terracher, 1994, Manuel de Seconde, p.141) ;

— enfin en dernier lieu, l'ostension numérique de la notion de limite, par le biais de tableaux de « grandes valeurs » de x auxquelles on associe les valeurs de y, ou de valeurs finies « proches de x_0 » qui donnent pour f(x) des valeurs « proches de la limite L en x_0 » : un exemple d'un tel tableau figure dans Terracher , Première S (1995) dans le chapitre sur le langage des limites : on trouve un tableau de valeurs de la fonction $g(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, la consigne étant :

« compléter le tableau de valeurs suivant »

x	10	10 0	1000	3162,28

g(x)				

La succession des valeurs de x sous forme de puissances de 10 est supposée suggérer la croissance exponentielle de la variable ; et 3162,28 est probablement là pour indiquer que les valeurs de g(x) peuvent être calculées même si x n'est pas un entier, et que le résultat trouvé dans ce cas ne va pas à l'encontre des hypothèses implicites faites, à savoir que g(x) « s'approche » d'une valeur que l'élève sera prié d'identifier comme la limite. Remarquons que le calcul donne comme suite de valeurs :

g(x)	1,0049	1,0049	1,0000005	1,00000005

et donc l'élève distrait, ou qui n'a pas compris le contrat didactique (trouver une limite entière) peut fort bien énoncer que la limite est « 1 virgule un certain nombre de zéros 5 » , ou bien ne rien voir du tout.

Un exemple aussi net du fonctionnement de ce contrat est donné dans Lacasta 1995, p. 238 : du tableau donné ci-dessous, l'élève est censé déduire que la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x-2}$ a pour limite 8 en $x_0 = 2$ (*Les points de suspension sont d'origine.*) :

x	2,1	2,01	2,001	...	1,9	1,99	1,999
f(x)	8,61	8,0601	8,006001	...	7,41	7,9401	7,994001

Cet exemple issu d'un manuel espagnol annonce plus franchement la procédure, que les manuels français qui esquivent ce type d'ostension, dans le cas d'une limite en x_0, en passant par la limite en zéro des fonctions de référence ; dans les fonctions présentées dans les manuels français, comme dans ceux qui sont donnés à la suite du cours dans le manuel espagnol, l'élève est supposé remplacer x_0 par x_0+h et faire tendre h vers zéro. Quoiqu'il en soit, une question numérique qui pourrait naître à la lecture d'un tel tableau serait plutôt : pourquoi retrouve-t-on toujours les mêmes chiffres dans le développement décimal des valeurs de f(x), décalés d'un certain nombre de zéros ? Mais les questions sur les développements décimaux ne font pas partie des connaissances et savoirs numériques du collège et du lycée dans les programmes actuels. On pourrait aussi se poser des questions comme : est-ce qu'on va trouver un nombre donné à l'avance, par exemple 7,37 ? pour x à droite ou à gauche de 2 ? De plus le calcul ne sera bien sûr pas fait à la main, c'est la calculatrice qui prend en charge le traitement numérique. C'est-à-dire que le lien entre la variation des valeurs et la variation des images est supposé évident pour les élèves, et il n'y a plus qu'à faire effectuer la tâche technique par un outil.

Il faut donc conclure qu'aucun exercice ne permet un véritable travail numérique sur la notion de fonction : aucun **problème** n'est posé de façon numérique, et aucun outil numérique n'est utilisé pour résoudre un problème de fonction.

Pourquoi alors ce rôle dévolu au numérique ? Autrefois, l'introduction des fonctions se faisait par les grandeurs. Les grandeurs ayant disparu à ce niveau de l'enseignement, on a gardé ce qui semblait les représenter le mieux, à savoir les nombres ; or il importait de choisir des grandeurs variant continuement, qui donnaient des fonctions munies de bonnes propriétés topologiques. Cette régularité, qui apparaissait dans la variation des grandeurs, doit maintenant apparaître dans la suite des nombres ; on suppose donc que l'accumulation des images permettra aux élèves de passer le pas vers le continu. Ceci paraît d'autant plus douteux que :

— comme dit ci-dessus, aucun travail numérique n'est réellement demandé aux élèves ;

—les tableaux numériques demandés comportent rarement plus de six valeurs. [50]

[50] cf aussi Chauvat 1999.

On peut remarquer qu'autrefois, la culture mettait entre les mains des individus un nombre assez important d'appareils analogiques, comme des montres à aiguilles, où l'avancée régulière des aiguilles donne à voir la continuité du temps et des dates ; avec la raréfaction de ces appareils, et leur remplacement par des montres numériques, le temps n'avance plus que de façon discrète, et l'on est obligé d'emporter sa topologie avec soi (cf. chapitre 3, I. 1.2).

III.1.3 Potentialités relatives au traitement des fonctions

Les représentants numériques sont donc utilisés de façon essentiellement ostensive, ce qui n'a rien de surprenant, dans la mesure où les méthodes numériques (régression linéaire, approximation par des polynômes, méthode des moindres carrés, lissage d'une courbe...) permettant de réduire l'incertitude sur des données numériques, ou de les organiser d'une façon qui permet de les modéliser par des fonctions, ne font pas partie de la culture de l'institution « enseignement secondaire » ; et que ces méthodes ne sont pas abordables par des élèves ne possédant pas déjà une culture mathématique relativement importante, en particulier en analyse.

L'enseignement de la notion de fonction présente de prime abord la difficulté inhérente à tout l'enseignement de l'analyse, à savoir de ne pouvoir être abordé qu'à partir d'ostensifs et d'outils de validation faisant déjà appel au savoir visé : ce cercle vicieux paraît difficile à contourner dans le domaine numérique. Il semblerait donc que nous dussions nous contenter de l'utilisation traditionnelle des tableaux de nombres. Une utilisation opératoire des représentants du registre numérique ouvrirait la possibilité d'envisager des interpolations, extrapolations, prévisions... ce n'est guère envisageable dans l'environnement institutionnel actuel. En regroupant les éléments précédents dans un tableau :

- la colonne « Connaissances antérieures des élèves » indique si l'on peut s'appuyer, dans ce registre, sur des connaissances déjà construites ;
- la colonne « Difficultés » fait le point sur les limites du registre et les obstacles éventuels auxquels son utilisatin peut se heurter ;
- la colonne « Traitement » détaille les possibilités du registre quant au traitement des fonctions, et précise si le registre est adapté à la validation, et quel savoir est attendu en fin d'apprentissage.

Tableau 4.1:

	Connaissances antérieures	**Difficultés**	**Traitement possible et savoirs visés**
Tableaux numériques	Connaissances sur les nombres	Difficultés dans la conversion numérique → graphique (placer les points de la RGC) Difficultés dans le traitement des décimaux et idécimaux.	- placer les points de la RGC - lecture d'images et d'antécédents ; - lecture de points particuliers (zéros)

III. 2 LES TABLEAUX DE VARIATIONS

III. 2.1 Traitement dans le contrat classique

Pour ce qui est des tableaux de variations, leur fonction est d'être une transition entre l'étude d'une fonction (calcul de valeurs, signe de la dérivée de f, ou bien déclaration de croissance/ décroissance par rapport au coefficient directeur...) et la RGC. En ce sens ce sont des ostensifs particuliers, car ils n'ont presqu'un rôle d'articulation entre deux autres séries d'ostensifs, à savoir des équations et des graphiques.

Le traitement de l'objet « fonction numérique » à l'aide d'un tableau de variations, lorsqu'il est donné, permet théoriquement la lecture d'images, d'antécédents ; la monotonie, la recherche d'extremums ; la recherche de valeurs de x pour lesquelles f est ou n'est pas définie : dans un tableau de variations ces valeurs reçoivent un codage particulier, qui permet de les mettre en évidence.

Tableau 4.2

	Connaissances antérieures des élèves	**Difficultés**	**Traitement possible et savoirs visés**
Tableaux de variations		Difficultés de codage et décodage (lignes du tableau affectées à x et y, flèches de croissance /décroissance, double barre verticale, pla-cement des sym-boles de limites...)	- lecture d'images, d'antécédents, du sens de variations ; - localisation d'extremums, de zéros ; - utilisation d'un codage : flèches de monotonie, ‖ , 8 - aide supposée au tracé de la RGC

III. 2.2 Difficultés de construction et d'utilisation

Une tâche courante dans l'enseignement de l'analyse dès la classe de Seconde (élèves de 16 ans), et considérée comme un item classique d'évaluation en classes de Première et Terminale, et à l'examen du baccalauréat, est l'établissement d'un tableau de variations d'une fonction, à partir de son expression algébrique et de l'étude de son sens de variations ; et du tracé de la RGC correspondante. Cette tâche est considérée comme non problématique, si bien qu'on ne trouve dans aucun manuel d'explication sur la façon de faire ce tableau. Comme l'enseignement ne prévoit pas de situation rendant fonctionnelle sa construction et son utilisation, sa présentation reste entièrement ostensive, et il n'y a pas d'élaboration des connaissances nécessaires à son utilisation.

Ainsi l'élève ne se voit pas souvent renseigné explicitement sur le fait (pourtant premier et essentiel) que ce tableau comporte deux lignes et deux colonnes ; le plus souvent le professeur montre par un geste (exemple de tableau de variations tracé au tableau noir devant les élèves).

Quelles sont les connaissances relatives à la constitution de ce tableau?

— mettre x dans la case de gauche de la première ligne, et $f(x)$ en dessous ;

— les nombres figurant dans la première ligne, et qui correspondent aux valeurs de x, peuvent être choisis arbitrairement ;

— l'on veille cependant à y placer les valeurs de x correspondant aux intervalles où la fonction change de sens de variations ;

— les nombres placés sous les valeurs de la première ligne, correspondent aux images de ces valeurs, donc aux valeurs correspondantes de *f(x)* ; ce sont ces valeurs que l'on retrouve portées sur l'axe des y dans la RGC ;

— l'usage veut que l'on mette une flèche ascendante (resp. descendante) de la gauche vers la droite si la fonction est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle ;

— ces flèches ne signifient pas que la courbe est une droite, ce sont des symboles indiquant le sens de variations ;

— les nombres de la ligne correspondant à *f(x)* sont placés soit, au départ d'une flèche ; soit à l'arrivée d'une flèche ; ou parfois, sur le trajet d'une flèche ; ils sont toujours en correspondance (à l'aplomb) d'un nombre placé sur la première ligne ;

— dans le cas où la fonction n'est pas définie pour une valeur de x, on place à l'aplomb de cette valeur une double barre verticale dans la ligne de *f(x)* ;

— on porte à l'extremité des flèches les limites de *f(x)* en a dans le cas où f n'est pas définie en a ; on écrit aussi ses limites à l'infini (si elles existent) ;

— la « figure » que dessinent les flèches de la deuxième ligne du tableau est visuellement « parente » de la figure tracée par un dessin, dans un repère bien choisi, de la RGC de la fonction f. Pour préciser cette parenté il est nécessaire de détailler ce qui ressemble et ce qui est différent.

Tableau de variations et courbe sont semblables:

— la succession des variations et des parties connexes est identique ;

— les nombres figurant dans le tableau sont les coordonnées des points de la courbe ;

— les asymptotes de la courbe correspondent aux « doubles barres » du tableau ;

— un tableau de variations, comme une RGC, est représentatif d'une classe de fonctions, et non d'une fonction unique.

Ils sont différents:

— la concavité n'y apparaît pas (or c'est un indice visuel important) ;

— le décalage des différentes branches de la courbe n'y apparaît pas non plus, car dans le tableau tout figure sur une ligne horizontale, même si l'une des branches de la courbe se situe par exemple sous son maximum -12, et l'autre au-dessus de son minimum +12 ;

— la plus ou moins grande amplitude des extremums n'est pas visible par un décalage spatial, il faut prendre des informations numériques ;

— la visualisation des valeurs correspondantes de x et y n'est pas possible car dans un tableau de variations il n'y a pas d'échelle.

A notre connaissance cet inventaire des parentés et des différences n'est jamais fait en classe, il est entièrement à la charge de l'élève ; or les connaissances correspondantes n'étant pas rendues publiques dans le travail de la classe, leur manque entraîne des difficultés perceptibles (élèves qui n'arrivent pas à « voir » le rapport entre un tableau de variations et la courbe correspondante).

Cette tentative d'expliciter les connaissances en jeu dans un tableau de variations fait bien apparaître, d'une part, la complexité de l'entreprise ; et d'autre part pose le problème de l'utilité de l'outil « tableau de variations ». En effet la longue liste ci-dessus prouve que la réussite de l'interprétation du tableau de variations est tributaire de nombreuses connaissances du sujet : c'est un ostensif très formalisé et très complexe. Or cette complexité est largement sous-estimée dans l'enseignement, et de ce fait la majeure partie de la compréhension du symbolisme des tableaux est à la charge des élèves ; ce qui veut dire que le professeur n'a que peu de moyens d'accès au fonctionnement de ce qui est, pour l'élève, un bloc de connaissances *privées*. Dans ces conditions l'apprentissage est aléatoire, et le professeur dispose de peu de moyens pour intervenir sur celui-ci. Or le tableau de variations précède, dans le contrat classique, le tracé de la RGC, et est supposé aider à ce tracé ; cela signifie que l'on délègue le contrôle sur les RGC à un outil dont le fonctionnement risque d'être mal maîtrisé par les élèves, sans que le professeur ne dispose de moyens didactiques pour améliorer son apprentissage.

Nous faisons alors l'hypothèse que, dans les meilleurs cas, l'élève prend en charge son apprentissage des ostensifs débouchant sur le tableau de variations et le tracé de la RGC ; et sinon, l'élève réussit d'une façon ou d'une autre à aboutir au tracé de la RGC, bien que n'ayant pas décodé le fonctionnement du tableau de variations. Remarquons que, dans un cas comme dans l'autre, il n'y pas de garantie que l'élève mette bien les connaissances prévues dans le tracé de la RGC, c'est-à-dire que ce tracé correspond bien pour lui à un représentant de la fonction, porteur de certaines de ses propriétés conceptuelles. Le tracé du tableau de variations comme celui de la RGC peuvent être obtenus tous deux par effet de contrat, dans la mesure où aucune situation problématique n'est à l'origine de l'un ou de l'autre, ou n'instaure une fonctionnalité de ces représentants. Il n'y a pas non plus de garantie que l'établissement du tableau de variations procède de connaissances sur les fonctions, ou soit à l'origine de telles connaissances.

III. 3 LE REGISTRE GEOMETRIQUE

III. 3.1 Ostensifs géométriques :

— figures géométriques présentant un problème fonctionnel (variation d'une grandeur par exemple) ;

— transformations géométriques ;

— vecteurs et opérations sur ceux-ci.

III. 3.2 Utilisation dans le contrat classique

Le registre géométrique est essentiellement réservé à l'introduction des fonctions, ce qui s'explique par plusieurs raisons :

— le domaine géométrique est largement exploré au collège, et il est donc considéré comme familier à l'élève au niveau où se fait l'introduction de la notion de fonction (Seconde) ;

— certains problèmes posés dans le champ géométrique (longueurs variant en même temps que la position d'un point sur une courbe ou un axe, calculs d'aires ou de périmètres... cf Terracher 1994, p. 137) permettent d'arriver rapidement à une formule fonctionnelle ;

— des logiciels comme Géoplan permettent de visualiser conjointement la variation des grandeurs géométriques et la RGC de la fonction correspondante.

On retrouve donc dans de nombreux manuels de Seconde ou de Première, ou dans des articles de revues destinées aux enseignants de lycée, des « activités introductives » à la notion de fonction de type géométrique [51]. Ces activités sont parfois poussées jusqu'à la démonstration en se servant d'outils géométriques, par exemple dans les deux articles de Repères cités en note (plus rarement dans les manuels). On peut donc associer au domaine géométrique des outils de validation dans des problèmes d'introduction de fonctions. Nous pouvons nous interroger pour savoir si le milieu géométrique serait un bon candidat à un milieu d'introduction des fonctions.

Par ailleurs les connaissances géométriques sont sollicitées lors de l'étude de la rubrique du programme qui concerne les « fonctions associées » à une fonction donnée : k. f(x), f(x + a) , f(x) + b ... Les tâches prévues comportent une association 'transformation de la courbe / modification de l'équation algébrique' dans les deux sens, c'est-à-dire :

[51] Voir par exemple "Introduction à la notion de fonction en Seconde", Groupe Lycée, IREM de Clermont-Ferrand, in *Repères IREM* n°10; "Des activités analytiques où la géométrie peut aider à comprendre", B.Destainville, in *Repères IREM* n°8.

— la reconnaissance de l'équation de la transformée d'une courbe, lorsqu'on applique à cette courbe une transformation connue des élèves (symétrie centrale ou d'axe x'Ox ou y'Oy , translation de vecteur colinéaire aux vecteurs des axes) ;

— la reconnaissance de la transformation, l'équation algébrique transformée étant donnée.

Dans ce type de tâche, on peut remarquer que l'élève :

- d'une part, doit pouvoir prendre en compte des caractères de la courbe qui sont des caractères globaux et non plus ponctuels (action sur la courbe / la fonction comme objet) ;
- doit relier ses connaissances sur les transformations planes ponctuelles et celles concernant les fonctions et graphiques.

En effet dans le passage d'une courbe à l'autre par une transformation, la principale difficulté est le passage du ponctuel au global, et ceci tant au niveau des courbes qu'au niveau des transformations planes. Les élèves ont rencontré des courbes et les ont fait fonctionner point par point (construction de courbes, recherche de l'image d'un x donné, voire recherche de l'antécédent d'un y donné) ; ils ont aussi rencontré des transformations planes (translations, homothéties, rotations) et ont transformé quelques points du plan (le professeur n'en fait en général tracer que 5 ou 6, et peu d'enseignants encore utilisent un logiciel tel que Géoplan pour enseigner les transformations). La situation exige maintenant d'envisager à la fois une courbe dans sa globalité et la transformation qu'elle subit, c'est-à-dire en même temps la transformation globale, puisqu'ici cette transformation s'applique à une infinité de points du plan sinon à tous. La difficulté nous semble être de même ordre que celle rencontrée à l'université lors de l'enseignement du dual d'un espace vectoriel : il s'agit de décoller son regard des vecteurs "un par un" et de considérer un ensemble d'applications linéaires qui agissent sur tout l'espace vectoriel, c'est donc un double passage au global : globalité des vecteurs et globalité des applications.

Le traitement habituel de ces savoirs graphiques et/ou fonctionnels en classe de Première est le même que celui des transformations, avec plutôt moins d'habillage théorique car en Première S le professeur démontre quelques propriétés générales des translations, homothéties et rotations, ce qu'il ne fait pas pour les transformations ponctuelles appliquées aux graphiques de fonctions (ce n'est pas prévu dans les programmes et manuels). Pour passer de la courbe d'équation $y = f(x)$ à celle de $y = f(x + 3)$ par exemple, l'enseignant fera "constater" sur quelques points que ça ressemble bien à la translation de vecteur -3**i**, puis on l'admettra et on généralisera. Les cas un tout petit peu plus complexes, comme f(ax), ne sont en général plus traités : on peut s'en convaincre en regardant les manuels de la classe (une tentative avait été faite pour les introduire dans les programmes de 85).

Face à ce problème quelles sont les possibilités que peut envisager le professeur? Nous en voyons trois, qui à notre connaissance ont pu être effectivement pratiquées suivant le choix de l'enseignant :

- la constatation empirique signalée ci-dessus : c'est de l'ostension, on voit que ça a l'air de marcher donc on l'affirme ;
- la même assortie d'un discours sur les courbes "en avance" ou "en retard" et la forme que prend nécessairement leur équation ;
- établir analytiquement la forme d'une translation, puis prouver que par la translation de vecteur a**i**, l'image de l'ensemble de points de coordonnées (x,f(x)) est l'ensemble de points de coordonnées (x, f(x-a)) : c'est une démonstration rigoureuse ; beaucoup de professeurs pensent qu'elle n'est pas réaliste dans une classe de Première S actuelle, et que la lourdeur analytique de la démonstration occulte pas pour les élèves la question de départ ; d'autre part le moyen utilisé n'est pas dans le même registre que le résultat obtenu, alors que l'un des problèmes des élèves est déjà celui d'une mise en rapport des différents outils. Cette

démonstration n'est pas tant difficile techniquement qu'inintelligible aux élèves car opaque sur le rapport entre le but poursuivi et la technique utilisée [52].

III. 3.3 Potentialités

Il ne faut pas remonter si loin dans l'histoire pour trouver des problèmes de fonctions résolus uniquement avec des outils de preuve géométriques : bien sûr les Grecs en sont l'exemple, et plus près de nous les grands analystes comme Huyghens ou Descartes (cf Dhombres 1978, p. 128 et suiv.). Le « coup de pouce » vers l'analyse au XVIIème siècle viendra de l'algèbre et surtout de la cinématique, avec pour conséquence l'abandon de la seule géométrie de la règle et du compas.

On peut cependant observer que de « beaux problèmes » de géométrie, y compris fonctionnels, restent jusqu'à l'avènement des « maths modernes » un fleuron de la culture mathématique de l'enseignement secondaire, une solution exclusivement géométrique étant même considérée comme le comble de l'élégance : problèmes de lieux géométriques pouvant être par ailleurs résolus par la géométrie analytique, problème de correspondances de distances, d'aires ... (cf Commeau J., 1963, collection Cagnac et Thiberge, Masson éd., p. 427 et suivantes). Il est clair que ce type de résolution de problèmes n'est plus en rien représentatif de l'enseignement secondaire pré-baccalauréat ; en clair, le domaine de ce qu'il est convenu d'appeler la géométrie élémentaire a perdu depuis plus de vingt ans aussi bien sa légitimité culturelle que sa pertinence culturelle, et même s'il lui reste une (relativement faible) légitimité épistémologique chez les mathématiciens, sa pertinence épistémologique est quasi nulle pour l'institution « enseignement des mathématiques » , en tous cas au niveau qui nous occupe, classes de Première et Terminale de lycée ; un signe incontestable en étant, que non seulement cet enseignement a disparu des deux classes citées, mais qu'il ne figure presque plus au programme des classes post-bac comme Mathématiques Supérieures et Spéciales, dont il constituait jusque dans les années 1970 une part importante.

Ceci étant, il apparaît difficile d'aller totalement à contre-courant de cette évolution : l'introduction des fonctions dans un milieu exclusivement géométrique, non seulement serait considéré comme tout à fait incongrue dans l'enseignement actuel ; mais la niche écologique de cet enseignement serait extrêmement réduite ; de plus, cette introduction ne respecterait pas l'une des règles de fonctionnement du système, qui veut qu'un objet nouveau (ici les fonctions) soit clairement identifié par des ostensifs nouveaux. Or nous avions montré[53] que les fonctions constituent un emblème du changement collège / lycée, l'un des objets mathématiques donné à voir comme symbole des mathématiques d'un ordre supérieur qui sont pratiquées au lycée. Ce rôle dévolu aux fonctions leur impose d'être clairement identifiées par un renouvellement du registre. Cette organisation impose de laisser au registre géométrique son rôle dans la dévolution et de ne pas essayer de s'appuyer sur lui pour construire un milieu pour la validation. [54] Il apparaît qu'une telle tentative serait didactiquement très coûteuse vues les conditions actuelles.

---

[52] Les chemins de P.Alson (voir chapitre 5) sont à notre sens un outil pour ce passage du ponctuel au global. Ils constituent une démonstration rigoureuse et permettent d'opérer sur le support graphique, en ce sens **le moyen de la démonstration est lié au résultat que l'on veut obtenir**, c'est-à-dire qu'on opère dans **le même registre**, ce qui n'est pas le cas de la démonstration analytique.

[53] Bloch 1995.

[54] Même si certains redécouvrent les vertus du milieu géométrique pour des activités sur les fonctions, le problème n'est pas traité entièrement par la géométrie mais très vite algébrisé: ainsi dans l'article de B.Destainville, qui écrit en conclusion: "... il semble intéressant pour l'enseignant de rechercher quels types de situations géométriques sont propices à l'apparition de fonctions simples à étudier en Seconde, Première, Terminale."

Tableau 4.3:

	Connaissances antérieures des élèves	**Difficultés**	**Traitement possible et savoirs visés**
Registre géométrique	Connaissances sur les figures, connaissances de la géométrie du collège	Niche écologique problématique : savoir obsolète dans l'institution ES	- introduction de fonctions comme « grandeurs variables » - visualisation des variations - calcul de grandeurs

ES : *enseignement secondaire*

III. 4 LE REGISTRE ALGEBRIQUE

III. 4.1 Ostensifs algébriques :

— formules, équations ;
— règles de transformation des formules.

III. 4.2 Utilisation dans le contrat classique

Le registre algébrique a, dans le contrat classique, deux rôles privilégiés : c'est le registre de l'ostension des fonctions de référence, d'une part, et d'autre part c'est le registre de la validation, en liaison avec les équations. Par ailleurs le registre algébrique est présenté très souvent en liaison avec le registre graphique ; on pourrait dire que l'ostension algébrique et l'ostension graphique se soutiennent l'une l'autre. En effet dans le programme de Seconde l'enseignant passe très vite aux fonctions « de référence » x, x^2, vx, x^3, 1/x . Le but est que l'élève apprenne à « reconnaître » les représentations graphiques de ces fonctions, moyennant éventuellement une transformation simple du plan (translation, affinité...). Cette association algébrique / graphique fonctionne en double sens algébrique $\longleftrightarrow$ graphique pour ce qui est des fonctions de référence ; mais elle ne fonctionne que dans le sens algébrique $\rightarrow$ graphique pour les autres fonctions, ainsi que le pointe Duval (Duval 1994). Ceci s'explique par le fait qu'un graphique n'est le représentant que d'une *classe* de fonctions, et non pas d'une fonction unique, c'est un point qui sera précisé ci-dessous. Il est donc difficile d'établir un contrat stable par rapport à des tâches de conversion du registre graphique au registre algébrique.

Les tâches demandées aux élèves dans la suite de leur scolarité au lycée concernent presque toujours un travail de *calcul* algébrique sur la forme ou les propriétés de la fonction : fonctions paires, impaires ; points d'intersection avec les axes ; recherche des intervalles où $f<g$ par la résolution d'inéquations ; calcul sur les fonctions homographiques, décomposition en éléments simples de quelques fractions rationnelles, recherche de la factorisation de polynômes ayant une « racine évidente » . Ce qui n'est pas mis en évidence dans ce travail, ce qui est considéré comme évident, transparent, par les auteurs de manuels et par l'institution, c'est le rapport qu'entretiennent ces « pratiques algébriques » avec la notion de fonction.

Jusque dans les années soixante, des ostensifs du type « y = ax + b » servaient à désigner la *fonction* qui à x associe ax + b ; cette désignation a été supprimée, car jugée non conforme au savoir savant sur les fonctions, qui exige de distinguer l'équation de la droite de l'objet *fonction affine*, et le nombre ax + b de la fonction. Cette ancienne notation portait l'accent sur la distinction entre le nombre ax + b, d'une part ; et la fonction / droite y = ax + b, plus ou moins identifiées, d'autre part ; cette identification n'avait rien de choquant pour les mathématiciens car les objets de l'enseignement secondaire étaient souvent issus d'une introduction géométrique, ou de géométrie analytique.

Or la nécessité de distinguer ces trois objets (nombre, fonction, équation de la droite) n'a pas disparu, mais on ne dispose plus d'ostensifs commodes pour traiter ces distinctions ; en effet l'ancienne distinction était suffisamment simple pour être assimilée par les élèves, et peut-être aussi avait-elle l'avantage de ne pas mettre en évidence de façon trop criante les manques dans l'apprentissage : si un élève persistait à confondre la droite et la fonction, cela ne se voyait pas, et de toutes façons c'était péché véniel.

Or l'enseignement secondaire a beaucoup plus de mal à obtenir des élèves qu'ils distinguent les trois objets nombre, fonction, équation de droite ; ce d'autant plus, que les ostensifs de fonction sont d'un maniement malcommode, obligeant, chaque fois que l'on veut opérer sur des fonctions, à une gymnastique avec des flèches peu prisée des élèves, qui de plus n'en voient pas l'intérêt.

Dans ces conditions l'enseignement se rabat sur des injonctions formelles faites aux élèves, comme de ne jamais oublier de noter correctement $x \to f(x)$ la fonction ; on sait bien que ce contrôle est illusoire, et que les copies d'élèves fourmillent de « ax + b » ou de « y » pour la fonction.

Les probabilités, confrontées à cette nécessité de distinguer variable et fonction, ont adopté la notation X pour les fonctions.... qu'elles appellent cependant « variable » aléatoire!

Il est aussi tout à fait significatif qu'on ne trouve pas, dans l'enseignement secondaire, de travail de recherche de variable ou de fonction [55], ou bien ce travail est fait par le manuel et donné à voir pour l'élève ; ainsi le manuel Hachette Pyramide (1998) propose p. 149 un exercice consistant à trouver les rectangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon *R* donné. La première variable x choisie est la moitié de l'un des côtés du rectangle ; aucune question ne porte sur la pertinence de cette variable : la connaissance de x est-elle suffisante pour assurer la détermination du rectangle ? Sans doute que oui puisqu'on arrive à trouver son aire... Cette première variable ayant conduit à la fonction donnant l'aire : $f(x) = 4\,x\,\sqrt{(R^2 - x^2)}$, dont les élèves ne savent pas chercher le maximum, le manuel propose *l'approche n°2* : prenons comme variable x la distance d'un sommet à la diagonale ne le contenant pas. L'élève doit alors chercher l'aire du rectangle et prouver qu'elle est maximale si $x = R$, après quoi il se voit gratifié d'un commentaire intitulé : « INSTRUCTIF » dans l'ancienne édition, et « info » dans l'édition 1998 :

> « Ce problème fait ressortir de façon saisissante l'enseignement suivant : Quand on envisage l'étude d'une situation à l'aide d'une fonction, un « bon choix » de la variable peut faciliter la tâche... »

Quels sont les outils qui peuvent amener à ce « bon choix ? » Sont-ils algébriques, ou déjà fonctionnels ? l'élève de Seconde les a-t-il déjà rencontrés, ou aurait-il dû le faire ? comment distingue-t-on ce qui est variable de ce qui ne l'est pas ? Dans l'exemple qui est donné, c'est la *fonction* qui est donnée la première : comment savoir de quelle variable cette fonction dépend ? et comment se fait-il que cette fonction (l'aire du rectangle) puisse s'exprimer de plusieurs façons et à l'aide de plusieurs variables ? *UNE* fonction n'est-elle pas fonction *d'UNE* variable ? Poser ces questions revient à s'interroger sur la fonction comme objet, et non pas comme procédure ; or le registre algébrique met essentiellement en évidence le côté procédure de la fonction : la formule est le moyen d'obtenir $f(x)$ à partir de x, en appliquant toujours la même méthode de calcul.

Faute de traiter véritablement toutes ces questions[56], l'enseignement n'interroge donc aucunement le lien entre les pratiques algébriques et la notion de fonction ; ce lien est

[55] cf Woillez 1999, p.68 ; cf aussi chapitre 3.

[56] Ce type d'exercice est très rarement traité en classe de Seconde, par manque de temps et parce qu'il est considéré comme beaucoup trop difficile pour une majorité d'élèves dans des classes hétérogènes; et sans doute aussi parce qu'il ne fait pas partie de la culture du secondaire, où ce qui importe est que l'élève ait acquis, en fin

considéré comme allant de soi ; de plus la pratique qu'a l'élève de l'algèbre au collège est supposée suffisante, et de même nature que la pratique qu'on lui propose avec l'introduction des fonctions.

III. 4.3 Difficultés relatives à l'algèbre et potentialités

Or les difficultés rencontrées par les élèves de collège et lycée en algèbre ont été étudiées dans de nombreux travaux, en particulier ceux des chercheurs de Nice (par exemple Léonard et Sackur 1991, GECO 1997). Ces recherches ont mis en évidence les lacunes de certains élèves en algèbre, qui les conduisent à fonctionner en « calculateurs aveugles » ; il s'avère que ces élèves n'ont pas compris que les expressions algébriques dénotent[57], et qu'ils fonctionnent, dans la majorité des cas, en conformité avec des règles formelles de transformations d'expressions, sans le contrôle de la valeur de vérité de ces expressions.

Dans Bloch 1995, nous donnions comme exemple de ces difficultés un exercice donné en Première scientifique : le professeur écrit au tableau « dans l'équation 7x-5y=16, on peut trouver autant qu'on veut de valeurs de x et de y telles que l'équation est vraie ». Sur 35 élèves, 3 sont d'accord avec la phrase écrite au tableau ; 8 pensent qu'il n'y a qu'une valeur possible pour x et y ; **24** pensent qu'on ne peut pas décider, car **on ne peut pas remplacer x et y**. Les 32 élèves (8+24) pensent qu'on ne peut remplacer x et y par des valeurs que **si l'égalité est vraie**. Donc en première scientifique, 32 élèves sur 35 n'aceptent de remplacer x et y dans une expression comme 7x-5y=16 , que si l'égalité est vérifiée, ce qui signifie qu'ils confondent le prédicat à deux variables avec l'une des propositions (vraies) qu'on écrit avec des valeurs de x et y vérifiant cette égalité, par exemple x=8 et y=8.

On peut alors supposer que l'introduction algébrique des fonctions est particulièrement vide de sens pour des élèves qui n'ont pas compris qu'une expression algébrique *prend des valeurs*, et que certaines formules (équations) sont *vraies* pour certaines valeurs de la variable, et *fausses* dans d'autres cas. Il peut se produire deux éventualités :

— soit l'étude algébrique des fonctions, du fait qu'elle impose de nombreuses tâches de remplacement de x ou y par une valeur numérique, aide l'élève à prendre conscience qu'il n'avait pas un rapport idoine aux équations, particulièrement à celles qui n'ont pas exactement une solution ;

— soit les deux domaines restent étanches pour l'élève ; auquel cas le rapport à l'écriture algébrique d'une fonction peut fort bien être celui décrit par certains chercheurs [58], à savoir le fait d'interpréter l'équation cartésienne d'une courbe comme une « étiquette » désignant la courbe, et non comme un outil pour opérer sur celle-ci.

De ces difficultés nous pouvons provisoirement conclure que le registre algébrique est à la fois :

— porteur de connaissances et savoirs des élèves (résolution d'équations, transformations d'expresions, identification de propriétés d'une fonction relatives aux racines, au degré... et éventuellement — voir I.3.5 — lien avec la RGC) ;

— porteur de difficultés ou d'obstacles qui peuvent, par leur nature, entraver l'apprentissage de la notion de fonction.

Dans un milieu propre à l'apprentissage de la notion de fonction, il serait appréciable de récupérer les connaissances des élèves liées au registre algébrique ; il est nécessaire par contre de mettre les ostensifs du registre algébrique en relation avec des ostensifs provenant d'autres registres, afin de contrôler les effets des difficultés signalées plus haut.
On obtient donc le tableau 4.4 :

de Seconde, des savoir-faire lui permettant de "suivre" dans la classe supérieure.

[57] Sur la dénotation, voir les références précédentes, ou Drouhard (1996)

[58] cf Sierpinska 1992

Tableau 4.4:

	Connaissances antérieures des élèves	Difficultés prévues	Traitement possible et savoirs visés
Registre algébrique	Connaissances sur : - les équations - les transformations d'écritures	- calcul algébrique non maîtrisé par tous les élèves - lien entre formule et fonction non évident - calculs devenant inaccessibles dès que la fonction se complique	- résolution d'équations ; - identification de fonctions simples et lien avec leur RGC ; - équation cartésienne d'une courbe de fonction polynôme, rationnelle... - zéros d'une fonction et lien avec la RGC - changement de repère, de variable - identification du degré, détermination de limites - calcul de dérivées, d'intégrales

III. 5 LE REGISTRE FORMEL (SYMBOLIQUE)

III. 5.1 Ostensifs formels :

— symboles fonctionnels, couples ;
— quantificateurs ;
— règles logiques ;
— règles de composition des fonctions ; symboles d'écriture de la composition, des fonctions réciproques ;
— règles algébriques d'addition, de produit, d'inverse, dans l'algèbre des fonctions numériques définies sur un intervalle I.

III. 5.2 Utilisation dans le contrat classique

Le registre formel est très peu utilisé dans le contrat classique ; les programmes signalent explicitement que les élèves n'ont pas à connaître les symboles de la théorie des ensembles ($\in$, $\cap$, $\cap$) sauf le signe « équivalent ». Le Hachette Pyramide de Seconde ne contient d'ailleurs aucun de ces signes ; quand il veut parler d'un intervalle I, il écrit : « pour tout x de I » ou « sur I » . Les règles de logique n'ont pas non plus à être connues des élèves, pas plus que l'usage des quantificateurs. Ceux-ci sont omis et sous-entendus, par exemple dans les égalités remarquables. Seul le signe « équivalent » est conservé en Seconde, où il est utilisé quasi exclusivement dans la résolution des équations.

Cette raréfaction du registre symbolique s'accompagne d'un usage plus fréquent de la langue naturelle : ainsi que dit ci-dessus, si l'on ne dispose pas des signes d'appartenance, etc..., on peut les remplacer dans une certaine mesure par des phrases. Ce remplacement ne respecte pas toujours les conditions minimales pour que l'ambiguïté ne soit pas trop importante, comme l'a signalé V.Durand-Guerrier (Durand-Guerrier 1996, 1999) ; celle-ci pointe l'inadéquation, pour l'établissement de la vérité des énoncés, de ce mode de traitement, qui aboutit à rabattre les énoncés sur le calcul des propositions ; et elle souligne le risque accru de confusion entre logique naturelle et logique formelle qu'engendre ce fonctionnement.

La réduction du registre formel (en particulier quantificateurs et signes d'implication) a pu paraître de peu d'importance dans l'enseignement de la notion de fonction, et ceci pour plusieurs raisons :

— l'usage correct de la logique passait pour être d'un apprentissage long et difficile ; le gain de cet apprentissage n'était pas immédiatement évident, particulièrement pour les élèves ne se destinant pas à des études scientifiques : de fait, c'est la Seconde indifférenciée qui a entraîné la disparition de ce registre ;

— la disparition concomittante de la définition formelle des limites, en Première, semblait rendre cet apprentissage sans objet ;

— l'enseignement s'orientant vers des « activités » d'élèves, activités basées pour l'essentiel sur des connaissances antérieures des élèves et de l'ostension ; le registre formel y était peu représenté : en effet son apprentissage avait été introduit de façon dogmatique dans les années 70, et il se trouvait difficile de l'introduire dans cette nouvelle organisation de l'apprentissage ;

— le formel se prête mal à l'ostension, mais il est efficace pour la validation, en particulier en analyse (cf chapitre 3) ; or l'enseignement a renoncé à introduire des outils de validation de type SPA, au niveau de l'enseignement des fonctions et des limites au lycée.

On remarque toutefois que le registre symbolique est plus utilisé en classe de Terminale, où l'on énonce des propriétés générales des fonctions.

III. 5.3 Difficultés et potentialités

Le registre formel se prête beaucoup moins bien à l'ostension que le registre graphique par exemple : en effet la graphie de ce registre est par définition très économique, une fonction se voit désignée par « f » , il n'y a pas grand chose à *voir*. De ce fait le contrôle de ce registre s'effectue nécessairement par des **règles**. L'usage correct de ces règles fait partie de l'apprentissage du registre ; or il est impossible dans ce domaine de s'appuyer sur des connaissances antérieures puisque les élèves n'en possèdent pas. Il paraît effectivement difficile de bâtir un savoir nouveau sur des objets nouveaux, en introduisant du même coup les objets et des représentants dont l'entière maîtrise est à acquérir. Nous disions au début de ce chapitre qu'il nous paraissait souhaitable d'introduire la notion de fonction à partir d'un milieu comprenant des ostensifs de ces mêmes fonctions ; ce milieu devant jouer, pour les élèves, le rôle de milieu « matériel » , il est indispensable que les élèves possèdent déjà des connaissances sur ce milieu d'ostensifs. Les ostensifs formels ne peuvent donc constituer un milieu suffisamment familier aux élèves.

Cependant le registre formel est extrêmement efficace pour la validation, du fait même de son fonctionnement basé sur des règles ; une utilisation de ce registre à des fins de contrôle d'autres registres plus ostensifs pourrait s'avérer riche de possibilités. De plus son économie de graphisme a pour conséquence que les élèves ne peuvent s'appuyer sur les caractéristiques visuelles des ostensifs pour raisonner : la validation y est non seulement efficace mais **nécessaire**. C'est le contrôle intellectuel qui est seul sollicité. L'appariement d'un milieu propre à l'ostension, et bien connu des élèves (registre algébrique ou graphique) et du registre formel pour le contrôle, pourrait constituer une solution viable.

Tableau 4.5

	Connaissances antérieures	**Difficultés**	**Traitement possible et savoirs visés**

Registre symbolique		registre très abstrait, où les connaissances antérieures des élèves sont absentes nécessité de coupler ce registre avec un autre plus propre à l'ostension	- travail sur la fonction comme objet - travail sur l'algèbre des fonctions (sommes, produits, inverses) - composées et réciproques - **énoncé et preuve de théorèmes généraux sur les fonctions (SPA)** - **validation des résultats sur les limites (SPA)**

III. 6 LE REGISTRE GRAPHIQUE

III. 6.1 Ostensifs graphiques

— systèmes d'axes, quadrillage, repères ;
— graphiques ;
— changements d'échelle, d'origine ;
— fenêtres ;
— « transformations » des courbes (au sens de transformations de la forme, l'emplacement, de l'obtention de nouvelles courbes à partir de celles qui sont données, et pas seulement au sens de transformations géométriques).

III. 6.2 Utilisation dans le contrat classique et statut

Le registre graphique est, à l'heure actuelle, très sollicité dans l'enseignement secondaire. Ceci s'explique par le fait qu'il est, contrairement au précédent, très propice à l'ostension, de part la richesse de sa graphie. Le programme de Seconde de 1995 insiste sur l'intérêt d'utiliser, pour l'étude des fonctions, le registre graphique et le registre géométrique, qui « met(tent) au service de l'intuition et de l'imagination (leur) langage et (leurs) procédés de représentation » .

De nombreux chercheurs (Rogalski 1984, Dagher 1993, Lacasta 1995, Trouche 1996, Chauvat 1997) ont étudié l'enseignement de la notion de fonction à l'aide des RGC, avec ou sans logiciel. Chauvat en particulier a mis en évidence la façon dont les manuels utilisent le graphique, avec ou sans quadrillage, avec ou sans repère marqué... suivant la fonction que le manuel affecte au graphique : message topologique, abaque... Ces recherches pointent les différents objets, mathématiques ou non, que peut représenter une RGC : c'est le caractère extrêmement riche de la graphie de ce registre, qui le rend à la fois propice à l'ostension, et en même temps, susceptible d'interprétations multiformes. Ainsi Chauvat (Chauvat 1997 p.180) distingue dans une RGC huit objets discernables, dont cinq mathématiques (deux relevant de la théorie des ensembles, et trois de la géométrie) et trois objets concrets, relevant du dessin. L'utilisation des RGC dans le contrat classique ne prend pas en compte ces différents objets, pourtant sources de confusions et d'implicites ; les recherches montrent que l'enseignement traditionnel utilise surtout les graphiques sur le mode idéogrammatique, ce qui conduit à des phénomènes de dédoublement didactique, l'enseignant croyant que les élèves voient dans le graphique la même chose que lui (une fonction) alors que les élèves n'y voient qu'un idéogramme ou une icône.

Nous souhaitons quant à nous mettre en évidence quelques caractéristiques de l'ostension graphique qui nous intéressent particulièrement dans notre projet d'étude de l'enseignement de l'analyse ; à cette fin rappelons quelques caractéristiques des caractères réducteur et producteur du graphique pointées par J.Rogalski et complétées par Chauvat :

a) caractères réducteurs

— un tracé est majoré : on ne peut pas représenter des x et y arbitrairement grands ; on ne peut pas sortir de la fenêtre représentée, sauf à imaginer prolonger « de la même façon » le graphique, ceci n'étant possible que pour les » bonnes » fonctions ;

— un tracé est minoré : on ne peut pas représenter des points trop voisins ; bien sûr on peut faire un zoom mais on rencontre parfois des phénomènes troublants (cf Deledicq 1996) ; on ne peut pas non plus déterminer une égalité des valeurs de x ou y sur un graphique, ni des propriétés de continuité distinctes de la dérivabilité, sauf en des points isolés (cf Rogalski 1984) ; des codages sont possibles pour rendre compte des propriétés non représentables, mais dans ce cas on sera amené à interpréter *l'absence* de certaines marques codées (par exemple l'absence d'une asymptote horizontale sur une RGC signifiera que la courbe a une branche parabolique), ce qui est toujours ambigu. Si l'on veut agrandir les branches infinies, on peut se heurter au même genre de problèmes que pour l'infiniment petit (cf Chauvat 1997 p. 87). De plus, on peut avoir à traiter à la fois des nombres « grands » et « petits » : comment représenter la fonction définie par $f(x) =(1/x) \sin (1/x)$ au voisinage de zéro ?

— un tracé est discret : non seulement le tracé ne prend en compte que des points voisins mais pas trop (épaisseur du crayon ou d'un pixel), mais de plus il est impossible de calculer autant de points que l'on veut ;

— un tracé est particulier : il est impossible de représenter une fonction *générale* comme $f(x) = ax+b$. On est obligé de choisir a et b, même implicitement.

b) caractères producteurs

— la représentation graphique fait apparaître la fonction comme un objet, contrairement à un tableau de valeurs par exemple ;

— elle permet de visualiser des propriétés qui n'apparaissent pas dans le registre algébrique ou formel (sens de variations, intersections de courbes, points d'inflexion, maximums et minimums, majorations de tracés par d'autres...). Mais, comme le remarque J.Rogalski, c'est en admettant des propriétés infinitésimales implicites, non représentées et en général non stipulées, que le graphique permet ce fonctionnement opératoire. De plus ceci peut induire des théorèmes faux, comme celui-ci : une fonction positive qui décroit vers zéro a sa dérivée qui tend vers zéro [59] .

L'exemple du manuel Déclic 1995 (Hachette éd.) de Première scientifique en est une illustration : page 145, dans le chapitre « Limites de fonctions » , une série d'exercices s'intitule « Lectures graphiques » . La consigne de l'exercice 3 est : *« Chacune des courbes (p. 145 et 146) représente une fonction f. Trouver,* **par simple lecture graphique***, l'ensemble de définition de la fonction f, puis les limites de f aux bornes de son ensemble de définition »* . Les courbes données sont des copies d'écran de calculatrices graphiques. Il y a d'autant plus d'implicite dans cette tâche qu'il est matériellement très difficile de distinguer si la fonction, en admettant qu'elle se comporte de la même façon hors fenêtre que dans la partie visible, a pour limite zéro, ou 1, ou 1/2 ... :

Figure 4.1

[59] cf Alliot et Liégault, 1998.

c) Statut du graphique

Ce que cette étude fait apparaître, c'est que le graphique, bien plus que comme un ostensif particulier donnant lieu à un type de travail spécifique, est perçu comme devant servir à *l'illustration* des phénomènes mathématiques, mais sans but opératoire ; ce que soulignent d'ailleurs aussi bien Artigue (1995) que Maschietto (1998), et Bosch et Chevallard (1999, p. 105 - 106). Artigue parle même de statut *infra-mathématique*. On retrouve cette perception du graphique chez certains chercheurs de langue anglaise : ainsi Schwartz et Dreyfus (1995) nomment « symbolisation » le passage d'un représentant graphique à un représentant algébrique, comme si le fait de disposer d'un représentant graphique ne comportait pas d'usage du symbolisme, le graphique étant une « image » de la fonction (au sens d'une image photographique par exemple). L'étude des changements de représentant sera faite au IV de ce chapitre ; d'ores et déjà il nous apparaît clairement que le registre graphique est, au même titre que les autres, un registre symbolique et que les ostensifs utilisés dans le graphique doivent être étudiés si l'on veut exploiter leurs potentialités.

III. 6.3 Potentialités

Les possibilités du registre graphique, relativement à la représentation de propriétés non prises en compte dans les autres registres, en font, malgré les problèmes suscités par le fonctionnement ostensif institutionnel, un candidat intéressant pour un milieu d'une situation destinée à l'apprentissage de la notion de fonction. Les difficultés étudiées ci-dessus nous incitent à adjoindre, au registre graphique, au moins un autre registre, fonctionnant en interaction, par exemple dans des activités de conversion (voir IV). Ainsi nous visons un mode d'emploi du graphique, où celui-ci se verrait complété par des outils de validation : c'est ce qu'on appelle un mode **opératoire** d'emploi du graphique.

Par ailleurs le registre graphique s'exprime dans un mode spatial (dessin à deux dimensions). Les élèves ont une expérience du mode spatial depuis l'école élémentaire, ils y ont donc construit des connaissances. Y a-t-il possibilité de récupérer ces connaissances pour le fonctionnement dans le registre graphique ? De plus les élèves ont déjà, au début de la Seconde, des connaissances relatives aux graphiques de fonctions linéaires ; pour une situation prévue en classe de Première, ils possèdent aussi des connaissances sur les fonctions de référence et leur représentation graphique.

S'il est possible de s'appuyer ainsi des deux côtés (côté connaissances, côté savoir) sur le fonctionnement du graphique, il devient très intéressant de rechercher des situations d'apprentissage de la notion de fonction, où le graphique est un élément du milieu permettant aux élèves de :

1) s'appuyer sur leurs connaissances pour construire des fonctions (variables didactiques à déterminer) ;
2) se saisir d'éléments du milieu pour formuler, valider.

a) Connaissances spatiales associées au registre graphique

A priori on peut répertorier des connaissances relatives à :

— l'ordre ($x<x'$) ;
— le sens du déplacement, du parcours, et l'orientation (de la gauche vers la droite, du bas vers le haut...) ;
— les positions relatives de deux courbes (au dessus, au dessous) ;
— l'intersection de deux courbes ou de courbes avec les axes ;
— la direction des droites (horizontale, verticale...).

Nous examinerons comment ces connaissances peuvent être une aide dans le milieu graphique.

b) Fonctionnement opératoire du graphique

Ce fonctionnement, dit Lacasta (1995 p. 133), a lieu lorsque le graphique fonctionne « comme moyen de contrôle de la communication et comme moyen de détermination d'un autre objet. Ce fonctionnement a lieu lorsque la réponse à un problème est obtenue par un rapport effectif [60] avec le graphique. » Chauvat remarque que le milieu contient alors le graphe géométrique de la fonction f dans le repère géométrique $\mathcal{R}$, le graphe géométrique « global » de f, et le graphe formel de f (ensemble des couples (x,f(x))). Quant au moyeu [61], il contient la courbe (le tracé) de f dans le repère dessiné R, et la courbe globale de f.

Des tâches spécifiques sont associées au fonctionnement opératoire du graphique, comme celles que signale Dagher (Dagher 1993) : par exemple classer les coefficients de fonctions polynômes du second degré, les courbes étant données. Ce fonctionnement nécessite la prise en compte des critères pertinents du graphique pour une tâche donnée, mais aussi la non prise en compte (donc la reconnaissance) des éléments non significatifs, ce qui est loin d'aller de soi : ainsi le point d'intersection d'une droite d'équation $y = ax + b$ avec l'axe des abscisses n'est pas un élément pertinent pour la détermination du signe de a et b. Au chapitre 5, nous proposons une ingénierie permettant un fonctionnement opératoire du graphique pour l'étude des propriétés générales des fonctions ; dans ce chapitre nous déterminerons un large éventail de tâches associées au fonctionnement opératoire du graphique, en précisant les variables didactiques disponibles.

Cependant nous pouvons identifier d'ores et déjà, des connaissances nécessaires au fonctionnement opératoire du graphique, et qui ne sont pas prises en compte dans l'institution « enseignement secondaire ». Ces connaissances, une fois explicitées, peuvent être un appui (ou un obstacle) pour le fonctionnement opératoire du graphique. Ces connaissances peuvent, dans une situation d'enseignement relative aux fonctions dans le cadre graphique, faire partie des acquis institutionnalisés de la situation, c'est-à-dire que la situation aura à sa charge de les transformer en savoirs.

c) Connaissances graphiques non identifiées par le système d'enseignement

i) la codification des points (cf Alson, 1995)

L'activité de codification des points d'un graphique ne doit pas être confondue avec la (re)connaissance qu'un couple de réels détermine bien un point par ses coordonnées. En effet, on demande aux élèves au collège de savoir placer un point de coordonnées connues, ou de savoir calculer les coordonnées d'un point d'une droite ; mais les activités de codification des points d'un graphique dans un problème sont inexistantes dans l'enseignement, parce qu'elles ne sont pas considérées comme faisant partie de la recherche du problème.

C'est le professeur qui nomme les points d'une figure et qui désigne les points « à coder » : par exemple pour faire l'interprétation graphique de la dérivée, c'est le professeur qui choisit un point de l'axe des x, puis un point proche, souvent à droite de x, qu'il appelle x+h ; comme le dit P.Alson : « L'élève, qui n'est pas habitué à une telle codification, ne comprend pas la raison de cette codification ". C'est que de son point de vue, il ne peut identifier les raisons des décisions du professeur dans cette activité. D'où une question : quel type de connaissances organise cette activité de codification?

Le dictionnaire (Petit Robert) donne comme définition de « codifier » : rendre rationnel ; ériger en système organisé. L'enseignant a codé x+h car ce code est idoine pour son explication de dérivée, il est rationnel par rapport à son problème ; l'organisation est donc du côté algébrique, c'est le calcul à faire qui oriente la codification. Celle-ci n'est pas libre, elle est surdéterminée par l'information cherchée.

---

[60] Sur le rapport effectif à un savoir, cf Fregona, 1995, p. 62 et suiv.

[61] Chauvat 1997 p. 56: le moyeu est le **moyen** et le **milieu** de l'action effective.

ii) La capacité de reconnaître le nom ou la formule d'une courbe, hormis les cas élémentaires.

Or cette capacité est sollicitée plus ou moins explicitement dans tous les cas de fonctionnement du graphique comme idéogramme ou comme message topologique (cf Lacasta, 1995) ; elle est liée au fonctionnement des « fonctions de référence ». A ce sujet citons Alson, 1995 : « Si quelqu'un veut comprendre pourquoi il recherche une certaine information algébrique, il doit comprendre que cette information algébrique est la traduction dans le cadre algébrique de certaine information visuelle. Comprendre pourquoi on recherche des informations algébriques, implique alors une capacité de passage de certains aspects visuels de la courbe au cadre algébrique. L'élève n'est pas capable de déduire les conditions et les concepts algébriques des « aspects graphiques globaux ».

Au II. 2.2 il était fait état de la difficulté de lecture globale des courbes ; reconnaître ou déduire l'équation d'une RGC, et plus généralement passer d'un message graphique à un message algébrique, suppose en effet que l'élève ait associé des caractéristiques de la courbe et des caractéristiques de l'équation ; donc que la RGC puisse être « décomposée » en ses propriétés, et celles-ci associées aux propriétés de l'équation, qui doivent donc également être reconnues. Ceci suppose :

— du côté algébrique, que l'élève ne voit pas l'équation comme une « étiquette » de la courbe (cf II. 3) ;

— du côté graphique, que l'élève soit capable d'associer lecture globale des RGC et propriétés, ponctuelles, locales ou globales, visibles graphiquement.

iii) Les connaissances relatives aux opérations sur les fonctions

Ces connaissances sont traitées par le système tantôt comme connaissances, tantôt comme savoirs : en effet les opérations sur les fonctions figurent explicitement dans le programme de Première. Cependant les transformations correspondantes sur les graphiques sont toujours traitées comme une connaissance, c'est-à-dire implicitement. La raison en est que les transformations associées à f+g, kf, f.g ne font pas partie de celles qui sont nommées dans les programmes de géométrie du secondaire (ce ne sont pas des translations, homothéties...). D'autre part les exemples de somme de deux fonctions, ou de produit, sont donnés dans le cas de fonctions non affines ; à cela on peut voir deux raisons :

— le cas non affine est considéré, dans l'ostension graphique, comme représentatif du cas « général » ;

— le cas affine est lui considéré comme « évident ”, sans doute parce que le contrôle algébrique est envisageable dans ce cas ; or l'étude empirique prouve que c'est loin d'être le cas. Ceci pose d'ailleurs plus généralement la question suivante :

Dans un travail graphique, les connaissances algébriques des élèves sont-elles mobilisables au niveau de la preuve?

d) Obstacles au fonctionnement opératoire

Le fonctionnement opératoire du graphique se heurte à l'obstacle déjà signalé de l'interprétation de f(x) comme étiquette de la courbe ; Chauvat signale également l'obstacle de la linéarité, et note que ces deux obstacles sont renforcés par le fonctionnement idéogrammatique du graphique dans le contrat classique.

Ce fonctionnement a pour conséquence qu'une organisation didactique qui pourrait présider à un fonctionnement opératoire du graphique, n'est pas apparue dans le contrat classique ; il en résulte que lorsque le professeur fait appel à ce type de fonctionnement opératoire (ce qui n'est pas très fréquent mais peut néanmoins se produire) il ne peut pas le signaler explicitement. Ainsi le professeur se réserve des moments, par exemple au tableau, où il peut prouver effectivement sur une courbe l'existence d'un unique antécédent d'un nombre réel par une fonction, ou l'existence d'une racine d'une équation par intersection de deux courbes ; mais l'élève n'a pas droit à ce type de validation, car celui-ci n'étant pas explicitement prévu dans le fonctionnement didactique du graphique, reste plus ou moins clandestin ; ainsi les professeurs, répondant à des questionnaires sur le graphique, sont extrêmement réticents à reconnaître aux élèves le droit à une telle procédure de preuve.

En conclusion, on peut présenter le tableau 4.6 :

Tableau 4.6

	Connaissances antérieures des élèves	**Difficultés et obstacles**	**Traitement possible et savoirs visés**
Registre graphique	- connaissances graphiques - connaissances sur les RGC (fonctions linéaires et affines) - connaissances spatiales	- diff. liées au caractère réducteur - diff. liées au caractère producteur - RGC de fonctions linéaires et affines -fonctionnement idéogrammatique - problèmes du lien avec le registre algébrique - difficultés de lecture globale -fonctionnement opératoire inhabituel dans le contrat classique	- **fonction comme objet** - **production de fonctions nouvelles** - **fonctionnement opératoire** - changements d'origine, d'échelle.. - sens de variations, intersections de courbes, points d'inflexion, majorations ou min, asymptotes, maximums et minimums, majorations de tracés par d'autres - lien entre la RGC de f et la RGC de sa dérivée - évaluation d'intégrales, ...

En conclusion de ce paragraphe, il semble intéressant d'introduire l'outil formel plus qu'il ne l'est actuellement, en raison de ses possibilités quant à la validation ; il ne faut pas se priver de l'outil algébrique, mais par contre il semble raisonnable de le mettre en relation avec un outil plus riche quant aux possibilités d'action autonome des élèves ; le registre graphique est intéressant pour les connaissances sur lesquelles il s'appuie, et pour les possibilités de traitement de l'objet global « fonction », ainsi que pour ses possibilités de fonctionnement opératoire non exploitées dans le contrat classique.

IV. CHANGEMENTS DE REPR?SENTANTS

Si nous envisageons d'utiliser plusieurs registres en interaction les uns avec les autres, nous aurons forcément à prévoir des tâches relatives à la coordination entre registres. C'est ce que nous allons étudier à présent.

IV.1 PROBLEMATIQUE DU CHANGEMENT DE REPRESENTANTS

Le fait de concevoir les représentants possibles d'un concept comme dotés d'un caractère réducteur amène à envisager que le concept lui-même ne peut se construire qu'à travers les différentes visions qu'en peuvent donner les représentants (ce qui correspond en partie au jeu de cadres selon R.Douady). Cependant il n'est pas sûr que la coordination des registres soit un préalable à la compréhension : il semble tout à fait possible, et très vraisemblable, que des connaissances locales puissent s'élaborer dans des registres différents. Ces connaissances peuvent se trouver coordonnées plus tard lors d'une reprise ou d'un approfondissement du concept. Par ailleurs, nous l'avons dit, nous adhérons à l'idée de Bosch et Chevallard, de ce que les technologies relatives aux changements de représentants sont partie intégrante de l'organisation mathématique étudiée, et non des moyens externes de contrôle des ostensifs. Quoiqu'il en soit, il peut être intéressant, en vue de la construction d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de fonction, d'étudier ces connaissances et de voir si certains traitements dans un registre, ou certaines conversions entre registres, peuvent être introduits dans une situation d'enseignement avec un gain du côté du sens du concept (au niveau de l'action), ou des possibilités de formulation et de validation.

IV.1.1 Traitement et conversion

On peut penser que des connaissances sont construites dans un registre lors d'un apprentissage ; ces connaissances seront alors spécifiques à l'outil ou au registre utilisé à cette occasion. Par contre dans une tâche relative au passage d'un registre à un autre, des connaissances spécifiques à la transformation peuvent se trouver mobilisées, ou construites. Il s'ensuit que certaines connaissances doivent être spécifiques des outils, tandis que certaines connaissances sont spécifiques des transformations entre représentants. Ces connaissances sont mises en œuvre à l'occasion de certaines tâches qu'il sera nécessaire de spécifier.

Afin d'analyser les connaissances et savoirs en jeu dans ces transformations de registres (conversion ou traitement), nous distinguons, suivant toujours Duval, deux types de transformations entre représentants d'une même fonction :

— les transformations à l'intérieur d'un registre ou **traitement** ;

— les transformations entre deux registres différents ou **conversion**.

A ces deux caractéristiques il faut ajouter un troisième critère pour analyser les transformations : une opération sur un représentant de la fonction qui a pour effet de modifier la fonction elle-même (par exemple une tranlation d'une représentation graphique de fonction, ou le changement d'origine du repère). C'est-à-dire que finalement on obtient quatre types de transformations :

1. les transformations qui modifient le représentant mais pas la fonction (la fonction est perçue comme l'invariant de ce type de transformation) :

1.1 les transformations à l'intérieur d'un registre ;

1.2 les transformations entre deux registres différents.

2. les transformations qui « changent » la fonction, et qui peuvent se produire là aussi :

2.1 à l'intérieur d'un même registre ;
2.2 entre deux registres.

(Par exemple un changement d'origine du repère ne modifie pas une courbe, mais l'équation de la courbe est modifiée, donc la fonction à étudier l'est aussi).

IV. 1.2 Congruence des représentations

Duval a noté d'autre part que les changements de représentants sont d'autant plus faciles que les représentations sont congruentes, c'est-à-dire que l'une est la traduction de l'autre, ceci pouvant se produire dans le même registre ou dans des registres différents. Ainsi les formulations :
A : « l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse » et A' : « $y > x$ » sont congruentes, l'une dans le registre de la langue naturelle, l'autre dans le registre algébrique ; alors que B : « l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée ont le même signe » et B' : « $xy > 0$ » ne le sont pas.

Pour chaque transformation effectuée, la difficulté dépendrait donc de cette plus ou moins grande congruence. Il n'y a pas, a priori, de raison de penser que des transformations à l'intérieur d'un même registre soient forcément plus congruentes que certaines transformations entre registres distincts. C'est à examiner pour chaque cas. Ainsi « l'ensemble des points M(x,y) tels que y>0 » ; « le demi plan situé au-dessus de l'axe des abscisses » et la représentation graphique de cet ensemble, sont trois représentants congruents du même ensemble. Duval (1996) remarque d'autre part que, dans une tâche de conversion, la non congruence peut être très forte dans un sens (du registre A vers B) et très faible dans l'autre sens (de B vers A).

Dans l’analyse de Bosch et Chevallard (1999), la non congruence traduit en fait quelque chose qui est susceptible de nous intéresser, du point de vue de l’analyse des connaissances en jeu dans un travail : l’existence d’une organisation mathématique restée souvent implicite, ou manquante, et qui est le savoir (ou la connaissance) permettant de passer d’un représentant à l’autre; ce savoir se traduit (ou se traduirait) par une chaîne d’ostensifs, qui rend compte de la transformation des représentations. S’il y a donc des représentants pour lesquels le passage peut se faire de façon très économique, du point de vue de l’organisation mathématique et des ostensifs mobilisés, il y a des représentants entre lesquels ce passage est dépendant d’une chaîne plus importante d’ostensifs. Si cette chaîne n’est pas prise en charge dans l’enseignement, la transformation apparaîtra comme relativement opaque ; l’élève aura seul à reconstituer la chaîne manquante, ce qu’il fera plus ou moins aisément. Or l’enseignant, tributaire des habitus de l’institution dans laquelle il fonctionne, risque de ne pas percevoir le travail en jeu dans cette transformation. Ce travail ne pourra donc s’exprimer que sous forme de connaissances privées, et ne recevra pas le statut de savoir; et l’institution peinera à identifier la nature du manque, donc continuera de ne pas le traiter. C’est ce qui se produit dans l’exemple donné par Duval : traduction vectorielle d’une disposition de points sur une droite (Duval 1996 p. 366). C’est aussi ce qui est en jeu dans les manques relatifs à la constitution de tableaux de variations à partir de l’expression algébrique de la fonction (voir ci-dessus au II.2.2).

IV.1.3 Changement de représentant et connaissances

Cette interprétation de la non congruence (manque de visibilité d’une organisation mathématique permettant la transformation) nous alerte sur le fait que les activités de changement de représentant ne sont pas *déterminées* par les codages des représentants : codage de départ, codage d’arrivée. En ce sens elles engagent l'activité du sujet d'une façon qui n'est pas algorithmique.

Donnons un exemple : on peut donner une règle permettant de coder des points par leur abscisse et leur ordonnée, mais cette règle ne suffira pas pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine ou du second degré : le sujet qui trace la RGC devra se servir des caractéristiques connues de la fonction (coefficient directeur si c'est une droite, allure de la parabole, sommet de celle-ci si c'est une fonction du second degré) pour tracer celle-ci. Il s'ensuit que les transformations dans un même registre, ou entre registres, ne se laissent pas analyser comme des codages/décodages, de façon algorithmique ; c'est encore une raison de considérer les changements de représentant en termes de **connaissances** du sujet qui effectue la transformation ; et ces connaissances ont trait au concept mathématique sur lequel porte le travail. Il est raisonnable de penser que ces connaissances doivent d'autant plus avoir trait au concept sous-jacent que les représentants ou les registres sont non congruents : en d'autres termes, si les représentants sont de nature très hétérogènes, c'est le **sens** du concept qui guide la transformation. Il faut entendre ici le sens du concept dans une ***situation*** d'action ou de formulation, c'est-à-dire que la transformation sera guidée par le milieu dans lequel elle sera effectuée, et les rétroactions du milieu ou les validations possibles dans la situation.

De façon réciproque, on peut supposer alors que les transformations puissent jouer un rôle dans la compréhension d'un concept, puisqu'elles obligent à contrôler le sens par des connaissances ayant trait non seulement au représentant, mais bien au concept. C'est d'ailleurs ce que soutient Duval, qui affirme même que la compréhension convenable d'un concept **ne peut se faire** sans la coordination des registres de représentation (Duval 1994). Sans le suivre forcément jusque là, nous pouvons remarquer que le contrat actuel de l'enseignement secondaire ne met que peu en interaction les différents registres de représentation qu'il sollicite : le registre algébrique fonctionnant essentiellement dans la résolution d'équations et l'étiquetage des courbes, et le registre graphique de façon idéogrammatique. Afin de mobiliser des connaissances fonctionnant comme outils de validation et de contrôle dans un travail sur les fonctions, il est donc souhaitable de prévoir des tâches de conversions entre registres distincts ; et ceci d'autant plus que nous avons noté qu'un registre (comme le registre formel) pouvait être plus propre à la validation alors qu'un autre (le registre graphique) permettait le travail sur des propriétés de l'objet « fonction » (propriétés non prises en compte dans un autre registre), mais qu'il était plus propre à l'ostension.

Par rapport à notre problématique, il nous paraît important d'insister sur le fait que **le milieu** est déterminant : c'est la détermination d'un milieu convenable qui assure bien que le travail se fait sur le concept visé, et ce sont les possibilités de validation ouvertes dans ce milieu qui attestent de ce que le rapport au savoir visé est effectif. Ce qu'affirme Duval, c'est qu'un tel milieu a tout avantage à intégrer des ostensifs de différents registres et des tâches de conversion.

On peut alors se poser plusieurs questions :

— quel est le statut, dans la classe, des tâches de traitement et de conversion ? Sont-elles initiées par le professeur, ou produites spontanément par les élèves ?

— quelles sont les connaissances en jeu dans les tâches de traitements et de conversions ?

— comment les repère-t-on ? (dans quelles situations)

— sont-elles spécifiques des registres, des transformations, du concept ?

— et quelles sont les situations pour lesquelles ces connaissances sont opératoires ?

IV. 1.4 Traitements et conversions entre registres : approche didactique

L'utilisation, dans la classe, de registres de représentation se fait par des écritures, un langage, des symboles… qui sont représentatifs, à un moment donné, de ce que les élèves et le professeur ont en commun comme *répertoire* pour traiter une question mathématique. On peut définir un répertoire comme étant un ensemble de connaissances (y compris des situations) susceptibles d'être mises en œuvre dans certaines situations relatives à cette question mathématique[62].

Un répertoire peut être décomposé comme une praxéologie didactique : en tâches, techniques, technologies, théories. On peut aussi le considérer du point de vue des connaissances, et essayer de classer celles-ci, ce qui ne sera pas traité dans cette travail. Ce qui nous intéresse est l'évolution des répertoires sous l'influence de l'enseignement, afin de chercher si un traitement, ou une conversion, peut se produire spontanément, ou sous l'influence du professeur, et de quelle manière.

Considérons le répertoire de la classe, relatif à un savoir mathématique, à un instant t, soit R(t) ; et soit R(t + 1) le répertoire relatif au même savoir, après une intervention didactique, porteuse d'une intention didactique de faire évoluer les connaissances de la classe. Alors R(t) et R(t + 1) sont d'intersection non vides, mais le répertoire ayant évolué, certaines connaissances ont été abandonnées car non adaptées, et d'autres sont acquises ; en même temps que ces connaissances, les ostensifs qui leur sont associés, dans un ou des registres, ont évolué. Cependant :

— certains éléments ont évolué dans le sens voulu de l'intention didactique ;

— certaines évolutions sont spontanées, et vont ou non dans le sens voulu par l'intention didactique ;

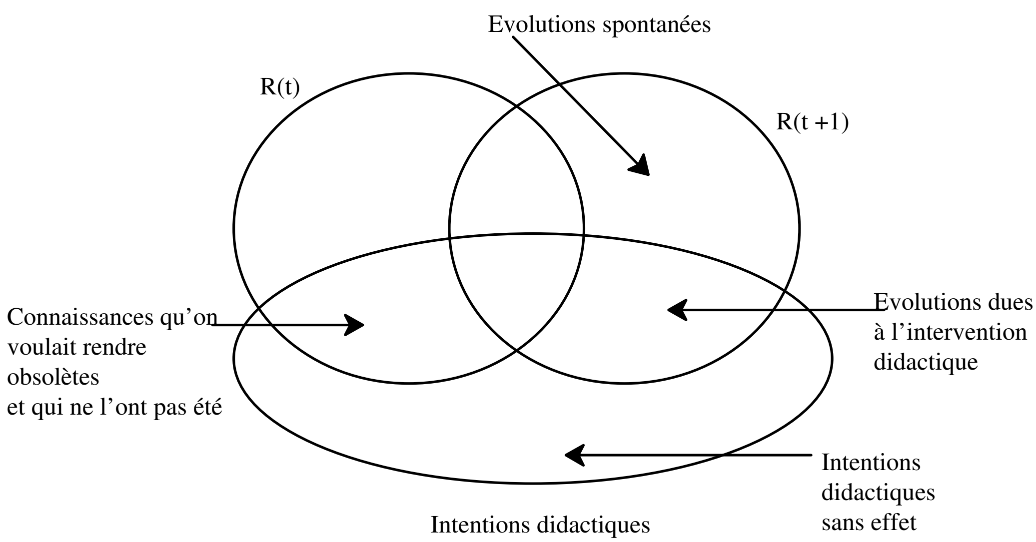
— certaines connaissances, que le professeur voulait rendre obsolètes, ont résisté ;

— certaines intentions didactiques sont sans effet.

Ce qui peut être traduit par le schéma figurant page suivante.

Pour ce qui est des traitements et conversions, il s'agit d'une transformation d'ostensifs, soit dans le même registre, soit dans un registre différent. Or on peut observer, chez les élèves, des traitements et conversions spontanés, car les sujets apprenant ont une grande propension à chercher des formes voisines, ou traduites, d'une connaissance (par exemple des analogies, des traductions abrégées, etc…). Le travail du savoir est de limiter les traitements et conversions à ceux qui sont *légitimes* : on peut donc envisager des traitements - conversions spontanés des élèves, auxquelles l'institution offre une résistance car elles vont à l'encontre du savoir ; et aussi des traitements - conversions légitimes, prônés par le professeur, et que les élèves n'arrivent pas à faire. La dialectique traitement - conversion / traitement - conversion légitimes est donc complexe ; et distinguer les effets de l'intervention didactique dans l'apparition de traitements et de conversions l'est tout autant.

Schéma 4. 2



[62] Pour des définitions plus circonstanciées, se reporter à la thèse (en cours) de F.Genestoux.

IV.2 CONNAISSANCES ASSOCIEES A L'UTILISATION DES REPRESENTANTS ET AUX CHANGEMENTS DE REPRESENTANTS

Les connaissances associées à l'utilisation d'un registre sont liées aux caractéristiques des registres ; elles viennent de la distinction des symboles pertinents du registre (par exemple, dans le registre graphique, le repère, son orientation, les unités sur les axes....). Mais des connaissances qui nous intéressent particulièrement sont attachées aux caractères des registres signalés au § I : le caractère réducteur et le caractère producteur. Avant d'étudier les connaissances relatives aux transformations de représentant, nous pouvons regarder si des connaissances relatives à ces caractères sont en jeu dans l'utilisation des registres. Cette étude a déjà été menée partiellement par Schwarz et Dreyfus (1995) ; nous reprenons les résultats qu'ils avancent en les complétant et les réorganisant par rapport à notre classification.

IV. 2.1 Connaissances relatives aux caractères réducteur et producteur

Ces connaissances sont associées à des tâches effectuées dans une situation [63]. Ce qu'il importe de déterminer, ce sont également les ostensifs avec lesquels ces connaissances peuvent s'exprimer : c'est ce que nous étudierons également dans les chapitres consacrés à l'ingénierie mise en place. Nous pouvons faire une remarque d'ordre général : dans l'organisation actuelle de l'enseignement, comme dit plus haut, ces connaissances ne se trouvent pas prises dans une organisation mathématique institutionnelle : lorsqu'elles s'expriment, elles le font donc essentiellement dans le discours en langue naturelle qui accompagne le travail mathématique. On peut alors dresser le:

Tableau 4.7

Registre	
numérique	• reconnaître qu'une information numérique discrète fait partie d'une information relative à une courbe continue, constante ou croissante ou décroissante • envisager plusieurs interpolations différentes à partir d'un tableau de valeurs, même si les données suggèrent un lien spécifique, par exemple proportionnalité • savoir relier des tableaux de valeurs disjoints appartenant à une même fonction • envisager plusieurs fonctions correspondant à un même tableau de valeurs
géométrique	• savoir que la figure tracée est une figure particulière qui ne rend pas forcément compte de toutes les propriétés de la fonction, ou au contraire qui peut en ajouter
algébrique	• reconnaître différentes expressions algébriques d'une même fonction, par exemple $f(x) = 4(3x - 5)$ et $f(x) = 12x - 20$; $\sqrt{x^2}$ et $\lvert x \rvert$; être capable de faire le lien entre $x + 3$ et $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ en tenant compte de l'ensemble de définition • connaître les propriétés qui sont susceptibles d'être visibles sur l'expression algébrique et celles que le registre algébrique ne peut dévoiler : par exemple le degré, les limites sont « visibles » ; la dérivée est calculable (dans les bons

[63] les situations et les tâches correspondantes sont détaillées au chapitre 5.

	cas) ; le sens de variations ou les zéros ne le sont pas sauf dans les cas très simples
formel	• la fonction désignée par « f » possède un certain nombre de propriétés énoncées, et toute espèce de fonction qui possède ces propriétés convient • néanmoins, pour illustrer le problème proposé, il est possible de (se) représenter une fonction particulière, connue [64]
graphique	• reconnaître ce qui peut se lire sur le graphique et ce qui ne peut pas se lire • reconnaître qu'une information graphique partielle (portion de courbe, ou image ou antécédent sur une courbe) fait partie d'une courbe continue, constante ou croissante ou décroissante • relier des parties d'un même graphique • envisager plusieurs interpolations ou extrapolations, même si la portion de graphique connue met sur la voie d'une courbe particulière • distinguer la RGC d'une fonction de la RGC de ses asymptotes

Il faut noter que certaines de ces connaissances, que nous situons dans la rubrique « connaissances relatives aux caractères réducteur et producteur » , sont déjà à la frontière de connaissances de traitement dans un registre donné. La distinction n'est pas absolue.

IV.2.2 Tâches relatives au traitement dans un registre

Pour ce qui est du traitement, c'est-à-dire du changement de représentant à l'intérieur d'un même registre, le manque, jusqu'à une époque très récente, de travaux relatifs à des situations expérimentées en classe, et d'analyse des connaissances correspondantes, nous conduit à énumérer, dans un premier temps, les *tâches* relatives à cette fonction de traitement. Une fois ces tâches insérées dans une situation adéquate au savoir visé sur les fonctions, nous serons mieux à même de déterminer les connaissances mises en jeu dans ces tâches, d'une part dans l'analyse a priori de la situation, et d'autre part dans l'analyse a posteriori. Nous aurons à préciser les rapports qu'entretiennent les tâches, l'activité des élèves (et celle du professeur) et les connaissances mises en jeu dans la situation. Soit alors le:

Tableau 4.8

Registre	Traitement ne modifiant pas la fonction	Traitement modifiant la fonction
numérique	• réordonner des tableaux de valeurs • calculer des valeurs supplémentaires de f(x) si nécessaire	• ajouter des valeurs numériques en changeant la fonction
géométrique	• faire une sous-figure • faire des figures correspondant à des cas (valeurs des variables) différents • faire apparaître des éléments géométriques non présents dans la figure de départ	• considérer une ou des sur-figures amenant à prolonger la fonction • replacer le problème géométrique dans un problème plus vaste (par exemple conique dans une famille) amenant à considérer d'autres fonctions
algébrique	• transformer des expressions algébriques en conservant la fonction	• transformer des expressions algébriques en modifiant certains

[64] C'est une connaissance d'ordre métamathématique (cf Dorier, Robert, Robinet, Rogalski: "A propos du levier 'méta'" in Dorier et coll. 1997)

		paramètres de la fonction •
formel	• passer d'une écriture à une autre, par exemple de *sin(x + 2)* à *gof(x),* avec *f(x) = x + 2* et *g(x) = sin x*	• en appliquant des opérations formelles, obtenir une nouvelle fonction à partir d'une (ou plusieurs) fonction donnée, par ex. f+ g , f^{-1}, …
graphique	• élargir la fenêtre • faire un zoom • changer d'origine du repère, savoir reconnaître ce qui est préservé (la forme de la courbe) et ce qui est changé • changer d'échelle, reconnaître ce qui est préservé (la pente, la concavité) et ce qui est modifié	• appliquer à la courbe une transformation géométrique (translation, affinité, symétrie ...)

IV. 2.3 Tâches relatives aux conversions

Remarquons qu'on ne trouve pas dans les tâches possibles tous les types de conversion : ainsi on ne passe en général pas directement du domaine géométrique au domaine numérique, mais on fait plutôt le détour par le domaine algébrique ; on ne passe d'ailleurs pas généralement du numérique au géométrique, mais plutôt du numérique au graphique. C'est la même chose pour la conversion géométrique ↔ graphique, qui passe souvent par l'intermédiaire de l'algébrique, même si c'est implicitement comme avec un logiciel tel Géoplan, qui affiche simultanément la variation de la figure géométrique et la RGC de la fonction définie sur cette figure. Il reste donc huit cas de conversions, a priori dans les deux sens, ce qui fait seize conversions possibles. Duval (1994) a mis en évidence que certaines de ces conversions étaient l'objet d'un travail dans l'enseignement, alors que d'autres se voyaient négligées.

Pour l'analyse a priori, nous essayons de lister les conversions théoriquement possibles ; il reste à inscire ces tâches de conversion dans une situation pertinente par rapport au savoir visé. Lorsque nous n'avons pas trouvé de tâche correspondant à une conversion, la ligne est laissée en blanc.

Dans le tableau qui suit, les tâches courantes (ou du moins pouvant exister) dans l'enseignement actuel sont indiquées en italique. Dans « numérique » nous comptons aussi les tableaux de variations.

Tableau 4.9

Registre	**Sens**	**Conversion ne modifiant pas la fonction**	**Conversion modifiant la fonction**

tableau numérique ou tableau de variations ↔ algébrique	**N→ A**	• trouver, par une méthode convenable, l'expression algébri-que d'une fonction dont on connait un certain nombre de valeurs, et éventuellement la nature (second degré par exemple)	• interpréter l'effet d'un apport de valeurs numériques sur la formule algébrique d'une fonction
	A→ N **A→ V**	• *à partir d'une formule, établir un tableau de valeurs (x, f(x))* • *à partir d'une formule, établir un tableau de variations*	• à partir de modifications de la formule, anticiper les modifications numériques ou du tableau de variations
numérique ↔ graphique	**N→Gr**	• *tracer un graphique à partir d'un tableau de valeurs (x, f(x)) ou d'un tableau de variations*	• associer à des changements des valeurs numériques, ou du tableau de variations, les modifications qualitatives cor-respondantes du graphique
	Gr→N	• *utiliser le graphique comme abaque; tirer des informations numériques des propriétés qualitatives du graphique* • *à partir du graphique, reconstituer le tableau de variations* •	• interpréter les changements de repère, et plus généralement les modifications graphiques qualitatives, dans le domaine numérique
numérique ↔ formel	**N → F**	• interpréter un tableau de valeurs comme rendant compte d'une loi fonctionnelle, même non expli-citable (cf modélisation en physique)	•
	F → N	•	• à partir d'une fonction donnée comme inverse d'une autre, ou comme somme, produit, composée de deux autres, trouver son sens de variations ou des valeurs numériques
algébrique ↔ formel	**A → F**	• identifier une écriture algébrique, par exemple sin(x+2) , comme celle de la composée de deux fonctions	• modifier les expressions algébri-ques et en déduire les modifica-tions d'écritures formelles
	F → A	• *à partir de deux expressions algébriques de fonctions, trouver celle de leur composée*	• modifier des écritures formelles et en déduire les modifications de formules algébriques

géométrique ↔ algébrique	**G → A**	• *à partir d'un problème géométrique comportant des grandeurs variables, fixer une variable et exprimer la variation par une fonction sous forme $y = f(x)$* • problèmes d'extremums	• envisager des classes de fonctions (sous forme algébrique avec paramètre) associées à un même problème géométrique • *associer, à une transformation géométrique, la modification correspondante de l'équation d'une courbe (≈ traitement)*
	A → G	• à partir d'une fonction donnée sous forme algébrique, lui associer un problème géométrique dont cette fonction est la traduction	• *identifier une équation de courbe comme résultant de la transformation d'une autre courbe par une transformation géométrique (≈ traitement)*
géométrique ↔ formel	**G → F**	• raisonner sur les propriétés générales d'une fonction associée à un problème géométrique	• raisonner sur des propriétés générales d'une classe de fonctions associées à un problème géométrique
	F → G	•	•
formel ↔ graphique	**Gr → F**	• trouver des images et des antécédents sur un graphique • déduire d'un graphique des propriétés générales de la fonction, et les écrire sous forme de chaînes de symboles formels	• interpréter des modifications du graphique à l'aide de symboles formels 1/f, f^{-1}, ...
	F → Gr	• interpréter graphiquement une écriture d'image, d'antécédent, de chemin ... faire le lien entre graphe abstrait et graphique	• représenter les courbes de 1/f, f^{-1}, f + g , fg ... , à partir de celles de f et g

graphique ↔ algébrique	**Gr →A**	trouver sur une courbe des informations correspondant aux paramètres de l'équation algébrique (ordonnée à l'origine, pente...) mais aussi aux racines d'une équation, à l'ensemble de définition de la fonction • à partir d'un graphique, et de renseignements sur la nature de la fonction, reconstituer l'équation algébrique de la courbe	• à partir de modifications du graphique ou du repère (change-ments d'origine, d'échelle...) trouver les modifications correspondantes de l'équation
	A →Gr	• *à partir d'une équation, tracer la RGC de la fonction dans un repère donné* • *connaissant l'équation, anticiper des éléments graphiques: les points d'intersection avec les axes, les asymptotes...*	• modifier l'équation, et en déduire les modifications des éléments graphiques

A la lecture de ce tableau, il apparaît que même dans les registres fréquemment utilisés (algébrique, numérique, graphique), certaines tâches sont sollicitées dans l'enseignement de la notion de fonction, alors que d'autres le sont peu ou pas du tout. Il apparaît aussi que les rubriques prises en charge dans l'enseignement sont relativement peu nombreuses, et que ce ne sont pas forcément celles qui paraissent les plus riches au niveau du travail possible. D'autre part la colonne de droite contient très peu de texte en italique, ce qui signifie que les tâches qui prennent en compte une transformation des fonctions sont presque absentes de l'enseignement. Encore avons-nous fait figurer dans les deux tableaux (traitement et conversion) une tâche qui nous semble être à la charnière du traitement dans le registre algébrique (l'interprétation de la transformation d'une équation, par exemple transformation de y = f(x) en y = f(x + 2)) et de la conversion entre registres (lien entre cette modification et la transformation géométrique correspondante, ainsi que détermination de l'effet sur la courbe).

Du reste il est parfois difficile de distinguer les moments précis où se produisent les conversions, les registres étant imbriqués dans certaines tâches et fonctionnant presque toujours simultanément. Ainsi que le signalent Bosch et Chevallard (1999, p. 96) ce sont des complexes d'objets ostensifs qui se trouvent activés dans un travail mathématique, ce qui exclut de pouvoir observer un registre isolément.

Par ailleurs les résultats des tableaux se trouvent en accord avec ce que Bosch et Chevallard remarquent de la fonction attribuée aux ostensifs (Bosch et Chevallard 1999 p. 99) :

> « Lorsque le discours et la manipulation graphique sont rapprochés du « raisonnement », les techniques discursives et graphiques ne sont pas considérées comme telles et apparaissent évidentes, autojustifiées ; par contre, les techniques écrites deviennent très vite opaques et appellent des justifications technologiques ou théoriques spécifiques. La notion générique d'objet ostensif a pour nous le mérite de permettre de porter un regard unitaire sur ces différents types d'objets afin de pouvoir reconstruire leur rôle précis dans le déroulement concret de l'activité, en mettant à distance toute imposition culturelle. »

Nous avons cherché, dans ce chapitre, à définir a priori les ostensifs dans un milieu pour l'enseignement du concept de fonction, et non à étudier le déroulement concret d'une activité ; cette différence mise à part, nous nous retrouvons dans ce souci de mettre à distance le fonctionnement traditionnel des ostensifs, afin de pouvoir étudier les possibilités qu'offrent ceux-ci sans nous trouver limités aux usages actuel de l'enseignement [65].

Dans ce qui précède, nous avons été amenés à envisager successivement différents registres de représentations, des tâches possibles à l'intérieur de ces registres et des conversions entre registres ; il nous paraît nécessaire de repréciser les rapports qu'entretiennent les objets dont nous nous occupons, à savoir les ostensifs, les tâches, l'activité mathématique de l'élève et celle du professeur, et les connaissances en jeu dans cette activité. Un exemple de situation sur le concept de fonction sera proposé au chapitre 5, et permettra de mettre en fonctionnement ces divers éléments, et d'observer leurs interactions.

IV. 2.4 Ostensifs, tâches, activité et connaissances

a) Fonctionnement dans le contrat classique

Dans le contrat classique, il y a des cas où l'institution prévoit effectivement la suite d'ostensifs nécessaires pour accomplir une tâche ; cette suite fait donc partie de l'enseignement, et en général c'est le professeur qui a en charge d'enseigner cette suite d'ostensifs, et nulle alternative n'est prévue. L'élève doit reproduire la suite d'ostensifs modèle lorsque la tâche est convoquée. Dans ce cas une question que l'on peut poser est la marge de manœuvre de l'élève par rapport à ce qui figure dans la classe comme un savoir reproductible à la demande. Il est vraisemblable que l'élève n'a que peu d'occasions de manifester des connaissances si celles-ci s'écartent de la norme des ostensifs prescrits.

Il peut se produire aussi que l'institution n'ait pas prévu l'organisation des ostensifs nécessaire pour l'accomplissement d'une tâche ; dans ce cas, cette organisation se trouve à la charge des élèves, puisqu'elle n'est prise en charge ni par le professeur, ni en général par le milieu de la situation (laquelle ne comporte pas de phase a-didactique). Nous disions au début de ce chapitre que nous suivions sur ce point Bosch et Chevallard (1999) pour identifier ce type de manque de l'institution dans ce que Duval appelle une tâche de transformation entre représentations non congruentes.

Dans le sujet qui nous occupe (l'analyse), un exemple d'un tel manque a été étudié au II. 2 , il s'agit de la construction du tableau de variations d'une fonction et du tracé de sa RGC, le tableau de variations étant supposé aider à ce tracé.

b) Fonctionnement dans le cas d'une situation à dimension a-didactique

Les ostensifs, disent Bosch et Chevallard (Bosch et Chevallard 1999) sont les *instruments sémiotiques* du travail mathématique. A l'aide de ces instruments, on peut faire ; mais on peut également voir ce qui est fait. Il en résulte que les *tâches* données à faire peuvent être décomposées, et elles aussi données à voir par les ostensifs qu'elles convoquent. Rappelons (cf Robert 1998, p. 174 ; et aussi chapitre 2) que l'on définit comme *tâches* ce qui est donné à faire à l'élève ; *l'activité* de l'élève est ce qu'il fait pour résoudre une tâche.

Dans cette activité, si la situation comporte une dimension a-didactique, l'élève met en œuvre des connaissances ; les traces de cette activité permettent parfois (pas toujours, et sans doute pas exhaustivement) de repérer ces connaisssances. Ces traces sont faites d'ostensifs, lesquels ne sont pas forcément ceux que l'analyse a priori de la tâche prévoyait. Certaines de ces traces permettent de repérer les connaissances dont elles sont supposées témoigner ; ces connaissances peuvent alors être mises en jeu dans la situation (ce sont des connaissances qui

[65] Sur l' usage des ostensifs graphiques, voir également Bosch et Chevallard (1999) pages 105 - 106.

deviennent *publiques*) et éventuellement travaillées, soit dans une perspective d'institutionnalisation et de conversion en savoirs, soit simplement parce qu'étant des connaissances efficaces dans la situation proposée, elles font partie, pendant un temps, du bagage de connaissances et d'outils dont le professeur et les élèves peuvent user ensemble pour résoudre le problème qui leur est posé. Nous en présentons des exemples au chapitre 5.

En d'autres termes, les ostensifs sont porteurs, ou non, de possibilités quant aux tâches, aux questions qui peuvent être résolues grâce à eux ; mais les connaissances viennent de **la situation**, du **jeu** qui est prévu, ceci du moins dans la mesure où l'on s'intéresse aux connaissances qui proviennent d'une décision individuelle de l'élève, et non d'une présentation ostensive du professeur.

V CONCLUSION : CHOIX DES OSTENSIFS POUR LA CONSTRUCTION DE MILIEUX

L'utilisation des ostensifs prévus dans l'apprentissage n'est donc bien évidemment pas la garantie que les connaissances adéquates au concept seront en jeu pour l'élève ; cependant nous pouvons conclure de ce qui précède qu'un milieu construit avec certains ostensifs peut permettre, mieux qu'un autre, d'élargir les tâches proposées aux élèves et donc les possibilités d'action qu'une situation propose, charge restant bien évidemment à la situation d'instaurer un travail sur le concept visé.

Nous avons vu qu'aux registres de représentation étaient attachés un domaine de fonctionnement, qui est défini en partie par les tâches répertoriées dans les tableaux 1 à 8. Ce domaine est aussi défini, en creux, par ce qu'un registre ou un outil *ne permet pas* de faire ; il serait bien évidemment trop long de les lister toutes pour chaque ostensif, mais nous avons été et serons amenés à en identifier quelques unes.

Les différents registres pour la construction d'un milieu pour l'enseignement de la notion de fonction peuvent donc être déterminés :

— par les besoins suivant les niveaux de milieux ;
— par les possibilités ouvertes pour chacun de ces ostensifs (voir III ci-dessus) ;
— par les impossibilités associées à ces mêmes ostensifs.

Dans chaque situation proposée, l'étude des registres disponibles devra être menée au cas par cas suivant les critères dégagés.

Nous allons donc étudier les « besoins en ostensifs » des différents niveaux de milieux d'une situation putative sur les fonctions ; l'analyse a priori se poursuivra au chapitre 5 par l'étude des situations proposées pour l'enseignement de la notion de fonction.

V. 1 LE MILIEU OBJECTIF : TACHES ET OSTENSIFS

Dans le milieu objectif, il est nécessaire de disposer d'ostensifs de fonctions comme objets en vue d'une action matérielle et de la formulation d'un résultat.

Les tâches qui consistent à **donner** les fonctions à l'élève, et à lui demander de vérifier si les propriétés sont vraies pour les fonctions données, ne sont pas des tâches d'action pour l'élève : la réponse peut être donnée dans un contrat d'ostension. Par contre les actions « matérielles » qui consistent à **construire** des fonctions sous contraintes, en mettant en œuvre pour les fonctions construites un certain nombre de propriétés classiques (majoration - minoration, extremums, opérations dans l'algèbre des fonctions) peuvent bien être la base du milieu objectif. Il s'agit de construire des fonctions avec des spécifications données, et d'être capable de prouver si ces fonctions répondent effectivement aux contraintes imposées.

Le milieu qui permet ces actions ne peut pas être le milieu algébrique : si l'on sait, à partir d'une fonction donnée par une formule, prendre l'inverse, ou bien additionner ou multiplier deux fonctions représentées par leur formule algébrique, on ne sait pas répondre à des questions ou des spécifications sur les majorants, les extremums, ou même les intersections avec l'axe des abscisses, sauf dans les cas très simples.

Nous avons écarté le milieu numérique, car il ne permet pas non plus, sauf avec des techniques hors de portée au niveau scolaire visé, de répondre aux contraintes d'action. Le milieu géométrique a été lui aussi évincé pour des raisons tenant à l'écologie des savoirs dans l'institution « enseignement secondaire ». Du reste il faut passer par le détour de problèmes géométriques qui peuvent être longs à mettre en place, avant d'aborder leur côté fonctionnel ; d'ailleurs on se retrouve ensuite confronté au même problème d'ostensifs de fonctions sur lesquels on puisse travailler « directement ». Une figure géométrique assortie d'un problème de variations peut, certes, être considérée comme un ostensif de fonction [66] ; mais ce n'est peut-être pas le plus immédiat et celui sur lequel le travail est le plus aisé dans la théorie « Analyse mathématique ». De plus, répétons-le, ce n'est pas un ostensif habituel de fonction dans la culture mathématique contemporaine des professeurs.

Le milieu objectif peut par contre être constitué d'ostensifs graphiques : repères, courbes déjà tracées... L'intérêt de la situation dépend alors des consignes, et des connaissances que leur mise en œuvre suppose. Les ostensifs graphiques permettent de travailler sur la fonction comme objet ; nous l'avons dit, ils permettent aussi de récupérer des connaissances spatiales. On peut adjoindre des ostensifs algébriques pour les questions que ceux-ci permettent de résoudre en liaison avec les RGC.

Par ailleurs le milieu matériel associé à un milieu graphique est lui aussi plus riche que le milieu matériel qu'on pourrait associer à un milieu objectif exclusivement algébrique : un milieu matériel constitué d'équations ne conduit qu'à des variantes mineures (les coefficients peuvent difficilement prendre des valeurs irrationnelles compliqués, et les degrés doivent rester de 1 ou 2, 3 à la rigueur) si l'on veut rester dans le domaine des équations acessibles à des élèves de Seconde ou Première. Les variations possibles sur les courbes sont par contre importantes, et nous verrons qu'elles peuvent être commandées par des variables didactiques intéressantes.

V. 2 UN MILIEU POUR LA FORMULATION ET LA VALIDATION

Nous avons vu (cf III. 3) que le registre algébrique pourrait convenir, de par ses procédures, pour la validation, au moins en partie ; mais que le champ de problèmes auquel il s'applique dans l'enseignement secondaire est trop réduit pour qu'on puisse baser sur ce registre la validation dans des situations suffisamment riches et amenant à travailler sur les fonctions comme objets.

D'autre part un milieu strictement graphique, même associé à des ostensifs algébriques, ne permet pas de fournir des critères de validation pour certaines propriétés des objets « fonctions ».

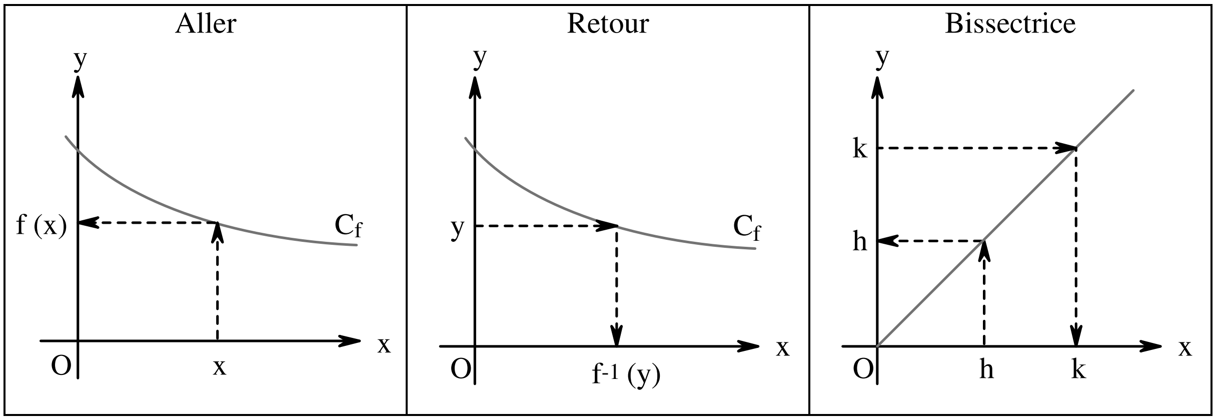
Prenons un exemple : dans un certain nombre de manuels, on propose aux élèves une série de courbes dessinées dans un repère, et on pose la question : s'agit-il d'une représentation graphique de fonction ? Certes la réponse ne peut être, à ce niveau, que le résultat d'une convention : aucune nécessité ne différencie, dans la situation, les courbes fonctionnelles des autres. Cependant même dans cette perspective, il est nécessaire de disposer d'un critère pour discerner les RGC de fonctions. Or ce critère n'est pas, en général, donné comme un *savoir* à ce niveau ; tout au plus est-il donné en acte, par l'identification des « bonnes » courbes mais sans explications. Ainsi le manuel Déclic Seconde (Hachette 1998) propose des exercices sur ce thème mais aucun commentaire, ni dans le cours ni dans les exercices ; donc l'élève est censé trouver seul cette conséquence de la définition d'une fonction.

Or il est possible, au niveau des classes de Seconde et de Première, d'identifier ces connaissances comme des **savoirs** opérationnels sur les graphiques ; de leur associer des ostensifs formels et de les faire fonctionner comme critères de validation dans le milieu graphique envisagé pour l'apprentissage du concept de fonction.

D'autre part, on peut associer, à certains outils formels, des ostensifs matérialisables sur le graphique : ainsi la propriété que tout nombre x de l'ensemble de définition de la fonction f, a une seule image $f(x)$, se traduit par un trait fléché, sur le graphique : c'est ce que nous avons appelé un *chemin* (voir chapitre 2).

[66] Le problème du « parallélogramme articulé » fournit un bel ostensif géométrique de la fonction sinus ; mais il n'est jamais reconnu comme tel par les élèves.

Figure ci-dessous: les trois chemins fondamentaux.



Ceci revient à dire que l'introduction d'ostensifs formels, qui permettent de manipuler des fonctions comme objets et des propriétés générales de ces fonctions, peut fournir un milieu pour la validation. Le milieu graphique, ainsi enrichi, permet de manipuler non seulement des ostensifs de fonctions, mais des ostensifs formels pour la validation. Ce milieu - graphique et formel - permet ainsi l'action des élèves ; il permet aussi la formulation de propriétés, de contraintes ; il permet enfin la validation des éléments graphiques. Nous verrons qu'il facilite également les conversions entre registres, notamment entre le registre algébrique et le registre graphique.

Remarque : Lorsque l'on parle de formulation et de validation, il faut entendre formulation à l'aide de symboles mathématiques ; en effet on peut, dans une certaine mesure, formuler les propriétés des graphiques en langue naturelle. Cependant il s'avère que ces formulations, qui existent à l'oral dans l'enseignement (lorsque le professeur se trouve énoncer par exemple certaines des connaissances sur les tableaux et graphiques que nous avons étudiées plus haut) sont trop longues, et trop peu contrôlables, pour servir efficacement à la formulation et la validation de propriétés des RGC et donc des fonctions.

Le prochain chapitre (chapitre 5) présente des réalisations d'une situation générique construite à partir de cette analyse a priori. L'étude complète de la situation est menée dans ce chapitre.

CHAPITRE 5

CHAPITRE 5

LES FONCTIONS : LA SITUATION "GRAPHIQUES ET CHEMINS"

Elegiac cycle
Brad Mehldau

I. ETUDE DE LA SITUATION GENERIQUE "GRAPHIQUES ET CHEMINS"

I.1 INTRODUCTION

L'étude faite aux chapitres précédents nous a permis de déterminer les composantes souhaitables d'un milieu pour l'enseignement de la notion de fonction, et les contraintes en termes d'existence ou non de possibilités d'action, d'un champ de problèmes et de possibilités de validation. Les principaux points mis en évidence ont fait apparaître que :

— le milieu d'apprentissage nécessite un équilibre connaissances / savoirs, et l'absence de l'une de ces composantes conduit, soit à ne pas pouvoir appliquer les savoirs, soit à ne pas pouvoir valider les connaissances ; en particulier dans l'enseignement actuel, les choix faits conduisent à ne pas disposer d'outils pour la validation (le SPA) ; or l'absence des savoirs servant à la validation interdit l'entrée dans la théorie « analyse » ;

— à ce niveau d'enseignement, un milieu pour l'action comprend nécessairement des symboles mathématiques, voire même des symboles qui, tout au moins pour le professeur, sont déjà des ostensifs de la notion visée par l'enseignement ; or, lorsqu'il sagit surtout d'une notion aussi complexe et d'utilisation aussi large que celle de fonction, tous les ostensifs ne se valent pas pour effectuer une tâche donnée ; les différentes possibilités ouvertes par les ostensifs de registres différents ont donc été étudiées en référence à la situation fondamentale de la notion de fonction définie au chapitre 3, et en envisageant les tâches que ces différents ostensifs rendent possibles ;

— le choix d'ostensifs seuls, ne permet en aucun cas de garantir la production de connaissances ; cette production ne peut être assurée que par la situation (le jeu). C'est l'action dans le milieu choisi, déterminée par les règles du jeu, et les rétroactions du milieu, qui assurent la confrontation des conceptions des élèves à ce milieu, et la construction de connaissances conformes au savoir ;

— le rôle du professeur dans cette situation suppose qu'il y soit pour lui-même, avec ses connaissances mathématiques, afin d'interagir si nécessaire avec les connaissances des élèves.

Le présent chapitre se propose d'étudier un exemple de situation dans un milieu graphique / formel, et des réalisations de cette situation dans ce milieu.

I. 1.1 Les objectifs visés par la situation

Il s'agit de construire un milieu pour l'enseignement de la notion de fonction et des propriétés « générales » des fonctions, milieu offrant des possibilités d'action supérieures à celles que fournit le milieu numérique — algébrique habituellement utilisé par l'enseignement secondaire traditionnel.

Ce milieu permettra également d'enclencher le processus de formulation et validation :

— en mettant à disposition des élèves et du professeur des ostensifs destinés à permettre le contrôle des objets manipulés ;

— en ménageant une dimension a-didactique dans la situation, c'est-à-dire la possibilité pour les élèves d'interagir avec le milieu en y portant des connaissances et des savoirs qu'ils pourront valider ou invalider grâce aux rétroactions du milieu, conformément à ce qui a été dit au chapitre 2.

Les « propriétés générales » des fonctions font partie du programme d'enseignement de Seconde et de Première, et comportent :

— la définition d'une fonction « quelconque » ;

— fonctions paires, impaires et symétries des représentations graphiques ;

— fonctions périodiques ;

— fonctions croissantes, décroissantes, constantes ;

— majorant, minorant d'une fonction ;

— fonction admettant un maximum (resp. un minimum) sur un intervalle où elle est définie.

I. 1.2 Les objectifs de la recherche

La mise en œuvre, dans une classe de Première Scientifique, des situations construites, répondait au souci d'en tester la validité empirique : faisabilité, compatibilité avec l'enseignement en amont et en aval, identification des connaissances et des savoirs acquis et mise à l'épreuve de la qualité de ces apprentissages. La reproductibilité n'a pas été testée à ce jour. Les situations pourraient être envisagées a priori dans une classe de Seconde (élèves de seize ans) ou de Première (élèves de dix-sept ans). Cependant la mise en œuvre de la situation en classe de Seconde nécessiterait une étude préalable pour savoir si les connaissances des élèves à ce niveau permettent une entrée directe dans le milieu graphique, ou si des situations préalables (par exemple prévoyant de construire des fonctions comme outils dans un milieu géométrique pour la dévolution) doivent être prévues.

I. 1.3 Une ingénierie due à P. Alson

Depuis 1983, Pedro Alson, professeur à l'Université de Caracas (Venezuela) enseigne les premières notions d'analyse à des étudiants de première année ; ces étudiants ont un faible niveau de calcul algébrique (ils ne maîtrisent pas les équations et courbes du premier et second degré), et les professeurs rencontrent des difficultés insurmontables pour enseigner les premières notions d'analyse avec une base algébrique aussi réduite. Dans ces conditions, P.Alson a été amené à construire une ingénierie basée sur un milieu graphique et formel ; c'est celle que nous avons reprise. La situation générique décrite ci-dessous, et les situations didactiques qui suivent, ont été construites d'après le recueil de fiches éditées par P.Alson à Caracas, « Metodos de graficacion », et après des interactions avec son auteur. Nous l'avons ensuite adaptée au curriculum français, et remaniée en fonction de l'analyse des milieux faite précédemment.

La description de l'ingénierie proposée par P. Alson est disponible dans un article récapitulatif de celui-ci, « Systèmes de descripteurs avec applications à la définition des propriétés de fonctions et à une ingénierie didactique " (Alson, 1995) ; l'étude mathématique de la correspondance entre la catégorie des fonctions et la catégorie des graphiques a été menée également par P. Alson dans cet article, et reprise dans le DEA de Mathématiques pures, option didactique, de M.C. Rage : « Etude d'un article de présentation et d'un ouvrage pour l'enseignement du calcul à l'aide de constructions graphiques » (Bordeaux 1, 1996).

Le lecteur trouvera en annexe IV de ce chapitre l'intégralité des fiches de P.Alson qui ont été utilisées avec les élèves. En annexe I et II, des fiches ont été reproduites avec les consignes en français, et une esthétique plus conforme aux possibilités actuelles des traitements de textes et logiciels de dessin. Cependant pour la clarté des explications, les fiches sur lesquelles ont travaillé les élèves servent de référence ; donc le tableau des variables didactiques, comme les références des fiches citées, concernent les fiches de l'annexe IV. Les fiches sont désignées par le n° qu'elles portent ; le schéma 5 - 2 est le shéma n°2 de la fiche n°5.

I. 2 L'ORGANISATION GENERALE DE LA SITUATION

Le but général du jeu est de construire des fonctions possédant certaines propriétés ; il faut donc être capable d'opérer l'action inverse, c'est-à-dire de vérifier si une fonction, construite ou donnée par un autre joueur, possède bien les propriétés annoncées. Au niveau où se situe l'enseignement, la situation n'est pas forcément organisée comme un jeu effectif, avec deux joueurs antagonistes, et possibilité de gain matériel. Cependant l'action des élèves est prévue sur un milieu objectif, avec un support matériel constitué de repères et de dessins de graphiques dans ces repères.

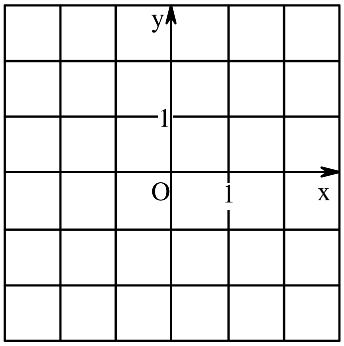
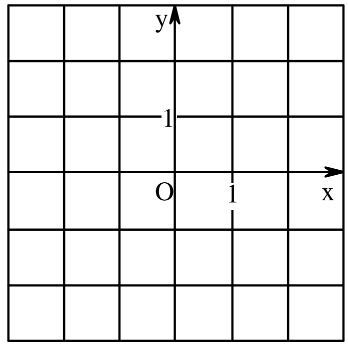
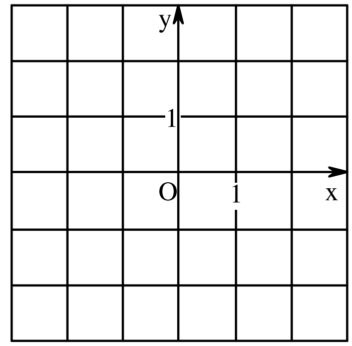
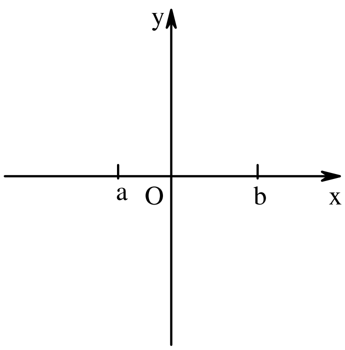
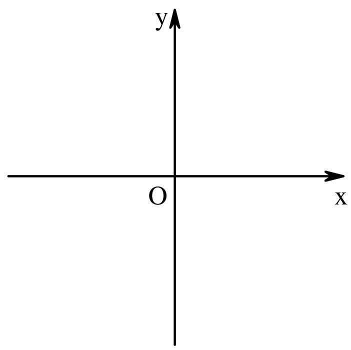
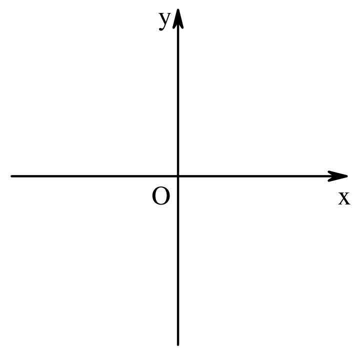
I. 2.1 Le milieu objectif

Le milieu matériel / objectif est constitué :

— de **repères du plan** et de **graphiques fonctionnels**, dessinés dans un des repères du plan ;

— de **chemins** ;

— de **données** ou de **contraintes** amenant à construire des fonctions, ou à répondre à des questions relatives aux propriétés des fonctions construites.

 f (-1) = 2; f (2) = 0 f (0) = -1	 f (-1) < 0 ; f (0) < 0 f (1) > 0	 f (-1) = 1 ; f (0) > 0 f (1) < 0
 ∀x / x < a , f(x) < f(a) et ∀x / a < x < b , f(a) > f(x) > f(b)	 f est majorée mais pas minorée	 Sur $\mathbf{R}^+$, f est minorée mais non majorée, Sur]-2, 0[f n'est pas majorée

<u>Exemple de support graphique — Figure 5.1 ci-dessus :</u>

Dans les six cas, la consigne est : “ Dessine la RGC (Représentation Graphique Cartésienne) d'une fonction f vérifiant les conditions énoncées ”.

<u>Les chemins</u>

Un *chemin* (cf chapitre 2 et chapitre 4) est une trace graphique partant d'un point de l'axe x'Ox ou de l'axe y'Oy, et comportant :

— un segment parallèle à l'un des axes, et aboutissant sur un point d'une courbe ;

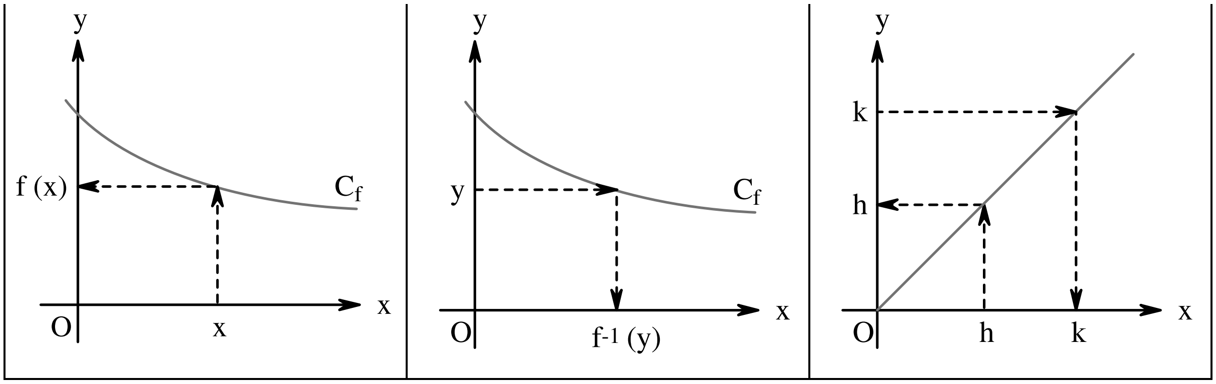
— un segment partant de ce dernier point, parallèle à l'autre axe, et aboutissant sur le premier axe.

Suivant l'axe dont on part, un chemin est un chemin *aller* ou *retour*.

La figure ci-dessous reprend le schéma de la fin du chapitre 4 et représente les trois chemins fondamentaux.

<u>Figure 5.2 :</u>

Aller	Retour	Bissectrice



Un chemin aller permet d'identifier un nombre et son image ; il est noté par le point de départ et le point auquel il aboutit, à savoir (x,f(x)).

Un chemin retour permet d'identifier un nombre et son antécédent ; il est codé : (y, f^{-1} (y)).

Un chemin qui passe par la bissectrice est particulier en ce sens que les chemins aller, retour ne se distinguent que par le sens de parcours, ils sont codés h ou k et correspondent aux trajets (h, h) ou (k, k) dans les deux sens.

Les graphiques et les chemins font partie du milieu pour l'action ; sur les repères ou graphiques, l'élève peut tracer des RGC, placer et coder des points ; avec les chemins, il peut contrôler des images, des antécédents, contrôler qu'une RGC est bien une RGC de fonction ; il peut contrôler des propriétés des fonctions ; il peut associer des RGC par une transformation ou une opération (voir ci-dessous dans II, III, IV l'étude détaillée des situations ; l'ensemble des fiches données aux élèves figure en annexe).

I. 2.2 La situation (le jeu)

La situation s'organise suivant deux composantes fortement articulées l'une à l'autre :

a) Composante « fonctions »

Le but du jeu est de disposer d'un certain nombre de fonctions, et de pouvoir dire si ces fonctions possèdent, ou non, certaines propriétés. Ces propriétés ont été reconnues, par les élèves et le professeur, comme faisant partie du bagage commun de connaissances établies durant l'année de Seconde (cf I.1.1). Il s'agit donc de disposer d'un stock de fonctions sur lesquelles tester les propriétés énoncées. Ce stock de fonctions sera assimilé, dans le milieu prévu, à un stock de RGC, ce qui permettra de le faire en grande partie construire par les élèves. C'est alors une construction de fonctions « libres » ; les premières leçons se situent à l'intérieur de ce jeu.

b) Composante « contraintes »

Le but du jeu est alors de construire des fonctions répondant à des contraintes (spécifications) données. Dans ce cas, il s'agit de disposer d'un stock de contraintes, et d'y éprouver les fonctions soit données, soit construites. L'une des questions posée par cette recherche est de savoir si les élèves peuvent participer à l'élaboration du stock de contraintes.

Les contraintes doivent être, au départ, explicitables avec les connaissances antérieures des élèves, mais elles doivent, pour qu'il y ait apprentissage, poser des questions que les élèves ne savent pas résoudre avec leurs connaissances. La situation comporte une dimension a-didactique si :

— des questions nouvelles, sur les fonctions ou les contraintes, émergent à partir des contraintes ;

— le milieu fournit une rétroaction à ces questions.

c) Validation

Dans les deux composantes de la situation, le but de la validation (et l'état final gagnant) est le même : être capable de dire si la contrainte est réalisée dans la RGC produite. Les moyens de cette validation sont ceux qui sont décrits ci-dessus : moyens graphiques / formels avec les RGC et les chemins, et éventuellement moyens numériques, algébriques si les données (le choix des variables) le permettent.

I. 2.3 Les variables didactiques

Nous avons repéré cinq types de variables a priori, dont le choix sera détaillé dans l'analyse a priori des situations didactiques issues de la situation générique :

a) La nature des fonctions intervenant dans les graphiques (VF)

— fonctions constantes, fonctions affines ; a priori les élèves le perçoivent comme plus facile mais cela peut induire le passage direct au calcul ;

— fonctions quelconques, qui peuvent dérouter de prime abord mais qui permettent d'aborder des propriétés générales de la fonction sans s'attacher à sa nature particulière algébrique (comme déjà dit, le graphique induit lui aussi une particularisation ; il n'est pas possible d'éviter toutes les spécifications, à la fois graphique et algébrique).

Cette variable joue à deux moments de la situation :

— dans les premières leçons, où le fait d'avoir une fonction affine ou de pouvoir dessiner une droite pourrait stériliser la situation, car l'élève retomberait alors sur des propriétés qui ont été, pour la plupart, déjà énoncées en Seconde ; dans ce cas on évitera de choisir cette modalité ;

— dans les leçons sur somme, produit.... le problème est différent, car le fait de choisir une fonction affine (et même parmi celles-ci une fonction constante) amènera les élèves à anticiper, et ces anticipations pourront être validées ou invalidées par le milieu graphique. Il est à prévoir que certaines de ces anticipations seront fausses, amenant à confronter des théorèmes-élèves au milieu : par exemple « la RGC inverse d'une droite est une droite ». Au contraire une fonction quelconque, d'une part constituerait un problème trop difficile, ne permettant pas l'anticipation. Par ailleurs la situation « opérations sur les fonctions » est de celles où il est souhaitable de recourir à l'algébrique pour obtenir ensuite des résultats devant ensuite être établis comme théorèmes. Or une fonction affine est accessible facilement par son équation.

b) La nature des données numériques ou littérales présentes dans certains graphiques (VL)

— nombres entiers ou rationnels facilement repérables, ou nombres irrationnels ;

— par exemple pour la somme et le produit, signe des valeurs prises par f et g ; pour le produit, comparaison avec l'unité (voir l'effet de ces variables dans l'étude de la situation « opérations sur les fonctions ») ;

— valeurs repérées sur l'axe des x ou des y, mais indiquées par une lettre ; suivant la consigne, le travail peut alors entraîner le recours obligatoire aux quantificateurs ; on obtient alors des fonctions différentes suivant les liens entre valeurs, valeurs de la fonction, et suivant la quantification.

c) La nature et la complexité des contraintes demandées (VC)

Les consignes sont de deux types : identification et validation de propriétés de fonctions dont le RGC est donnée ; ou tracé de RGC de fonctions avec des contraintes données. La difficulté du problème à résoudre tient alors à plusieurs modalités :

— la nature du travail demandé (travail sur une courbe déjà tracée ou tracé à réaliser) ;

— le nombre de conditions (contraintes) demandées, qui peut modifier complètement la RGC à obtenir ;

— le fait que les conditions soient données sous forme d'égalités ou d'inégalités, ce qui peut entraîner l'obligation de quantifier ;

— les valeurs : numériques ou valeurs "quelconques" repérées par des lettres, sur les axes ou dans les contraintes imposées ; valeurs quantifiées (variables) ou non ;

— les conditions globales ou locales (par exemple fonction bornée sur un intervalle, ou au contraire maximum localisé) ce qui peut conduire à des fonctions très différentes, et à des procédures de validation différentes.

d) La possibilité ou non de fonctionnement autonome du graphique/formel (nécessité de contrôle numérique / algébrique ou non) (VA et VN)

Il y a donc deux variables à deux valeurs : le milieu graphique / formel est suffisant pour résoudre le problème posé, ou : il faut lui adjoindre une validation par un calcul algébrique ou numérique. A priori cela pourrait faire croître la difficulté, ou au contraire aider à la validation. En effet il y a alors trois registres à articuler au lieu de deux, mais en contrepartie l'outil algébrique ou numérique peut apporter une aide calculatoire. Dans les deux cas la nature du travail demandé, ou des procédures possibles, s'en trouve modifiée.

La **variable algébrique** est commandée par les éléments présents dans la consigne (possibilité ou non de disposer d'une équation, ou de la trouver si la fonction est suffisamment simple, par exemple une fonction affine) ; elle s'appellera VA.

La **variable numérique** est commandée par la présence ou l'absence d'un quadrillage sur les graphiques ; c'est une variable dont la commande sera en particulier intéressante lors du travail sur sommes et produits de fonctions. Si cette variable numérique est absente, ce travail ne peut avoir lieu qu'en relation avec une mesure de l'échelle sur les axes, qui permet de la retrouver par une autre procédure. Mais dans ce cas on peut craindre que ce contrôle par l'échelle soit trop difficile à tenir pour les élèves (en sus du contrôle de la forme de la courbe et de l'anticipation sur la nature de la fonction à trouver), et donc qu'il ne soit pas mis en œuvre. Cette variable sera nommée VN, et elle peut être commandée par la variable quadrillage VQ.

e) La présence ou l'absence de transformations (VT)

C'est un point déjà envisagé au chapitre 4, parmi les tâches proposées. La présence de transformations (modification du graphique et/ou de la formule algébrique donnant son équation) est a priori un facteur complexifiant la tâche, et obligeant à modifier les procédures.

I. 2.4 Les obstacles

Dans ce paragraphe nous traitons des difficultés prévisibles ; certaines pourront être identifiées comme des obstacles, soit a priori, soit après confirmation à l'aide de l'étude empirique. Rappelons qu'un obstacle est une connaissance, qui a prouvé son efficacité dans un certain champ de problèmes ; qui continue à s'appliquer dans un champ de problèmes où elle n'est plus valable ; et qui persiste à se manifester même après que le sujet ait pris conscience de son inexactitude ou inadaptation au nouveau problème qu'il rencontre.

a) Fonctions déjà connues

La connaissance, par les élèves, de fonctions surtout linéaires ou affines, ou des seules fonctions de référence, peut être un obstacle au fait de concevoir des fonctions variées, éventuellement ne possédant pas les propriétés (par exemple continuité) des fonctions connues. Certains élèves ont ainsi tendance à ne tracer des courbes que par segments successifs, voire à chercher systématiquement un coefficient directeur pour une RGC qui n'est pas une droite ni une réunion de segments [67].

b) Contrat classique associé au graphique

Le traitement du graphique dans le contrat classique peut être un obstacle au fonctionnement que la situation souhaite instaurer, car :

— le graphique est vu dans ce contrat classique comme l'aboutissement d'une suite d'opérations algorithmiques et non comme un outil de preuve ou de construction ;

— le graphique peut être vu également comme une « photographie » de la fonction ou comme un idéogramme, la distance de la représentation au concept étant alors supprimée ; dans ces cas les caractères réducteurs et producteurs du graphique ne seront pas perçus, ce qui peut amener à accorder à la fonction des propriétés qui sont en fait celles du dessin ;

— le traitement du graphique dans le contrat classique est essentiellement ponctuel : le graphique est construit à partir de points dont les coordonnées sont connues, ou bien le graphique est utilisé comme abaque pour trouver des coordonnées. Or le fonctionnement ponctuel, non seulement n'induit pas le fonctionnement global (travailler sur les caractères graphiques globaux et opérer avec des courbes) mais plus encore, il se constitue en obstacle au fonctionnement global (cf Duval 1994, 1998 ; Lacasta, 1995 ; et chapitre 4). Ainsi un élève qui voudrait tracer point par point une RGC sur laquelle est donnée une condition globale (exprimée par une variable quantifiée, ou par un propriété comme par exemple « f est majorée ») n'aurait que peu de chances de réussir facilement le tracé.

c) Expertise graphique

L'expertise du fonctionnement graphique opératoire ne fait pas partie des connaissances acquises par les élèves dans le contrat classique ; donc il faut prévoir son apprentissage, qui peut être source de difficultés. Par « expertise du fonctionnement graphique opératoire » nous entendons que le registre graphique est porteur, comme tout autre, d'un certain nombre de spécificités de fonctionnement (dues essentiellement à ses caractères réducteurs et producteurs, cf chapitre 4, II. 5.2), qui doivent être enseignées / apprises et qui, dans le contrat classique, ne font pas partie des connaissances publiques de la classe.

On peut (jusqu'à un certain point) faire l'analogie avec l'expertise nécessaire soulignée par les didacticiens et les professeurs, lorsqu'on utilise une calculatrice graphique ou un logiciel de calcul formel : il y a des choses que la machine permet de faire, et d'autres qu'elle refuse ou transforme suivant sa logique... De nombreux chercheurs ont souligné l'insuffisante prise en compte de cette composante dans un certain nombre d'ingénieries prévues avec un enseignement instrumenté[68] .

d) Etablissement du nouveau contrat et connaissances des élèves

Le contrat relatif au graphique peut être difficile à établir. On constate en effet que, sauf exception, les tâches données dans l'enseignement partent implicitement d'un point de vue algébrique : ainsi le produit de deux fonctions affines étant donné, le professeur fera effectuer le produit algébrique, constater que l'on obtient une fonction du second degré, et trouver éventuellement la correspondance entre les paramètres de la parabole associée et les paramètres de départ des fonctions affines. La base du problème est donc algébrique et l'on s'y ramène, après un détour vérificatoire par le registre graphique.

Le fait de donner dans le registre graphique, une tâche du type prévu dans la situation « graphiques et chemins », entraîne des erreurs non rencontrées dans le registre algébrique :

---

[67] cf. Chauvat 1999.

[68] cf par exemple Artigue 1995, Trouche 1996.

par exemple, les élèves déclarent majoritairement que le « produit de deux segments » est un « segment ». Si l'on veut rendre le travail possible, il faut donc que la situation prenne à sa charge l'établissement d'un certain nombre de connaissances graphiques qui n'ont rien de triviales et qui ne doivent pas rester implicites, de façon à ce que les élèves aient un minimum de contrôle empirique sur la vraisemblance des hypothèses qu'ils peuvent émettre. Par exemple dans le cas précédent, il faut que les élèves puissent anticiper sur la construction de fonctions ou les propriétés des transformées de fonctions en relation avec les propriétés des fonctions déjà connues. Ainsi le milieu graphique permet de se poser des questions qui n'apparaissent pas dans le milieu algébrique : par exemple, toujours pour le produit de deux fonctions affines (le produit de deux « segments » dans le milieu graphique) le sommet de la parabole correspond-il systématiquement au point d'intersection des deux droites (segments) ? et sinon, quelles sont les conditions pour qu'il lui corresponde ? y a-t-il une règle pour trouver ce sommet ? et que se passe-t-il si les deux droites sont parallèles ?

Les premières séances sur les fonctions, où certaines tâches peuvent paraître triviales, sont justement prévues pour l'installation d'un consensus entre professeur et élèves sur ce qu'on admet qu'un graphique permet de voir ou de faire, les validations possibles, et ce qui est à la charge des élèves dans ce milieu, c'est-à-dire pour l'installation d'un contrat didactique relatif à l'expertise graphique, et l'accord sur un socle commun de connaissances.

Remarquons que les connaissances nécessaires, dans un contrat relatif au milieu graphique, se structurent d'une façon différente qu'elles ne le font dans le milieu algébrique. En effet le registre algébrique permet de désigner une fonction sans ambiguité ; le fonctionnement consiste donc à identifier une fonction, puis à décliner, sur cette fonction, un certain nombre de propriétés. Les éventuelles transformations se traitent de la même manière : calcul de l'objet final, et énumération (quand c'est possible) de ses propriétés.

Au contraire, dans le milieu graphique, on est dans une angoissante incertitude quant au « désigné » de la fonction, que la lecture directe ne permet pas d'identifier sans ambiguité ; on procède plutôt par accumulation d'informations sur la fonction, mais les informations recueillies restent en tout état de cause significatives d'une classe de fonctions, et non d'une fonction unique (à moins bien entendu que l'on ne dispose d'une information supplémentaire de type algébrique).

L'identification de ces caractéristiques du milieu graphique fait donc partie du contrat évoqué ci-dessus. Il faut remarquer que pour les élèves, c'est une **rupture** avec le contrat habituel qui, nous l'avons dit, prévoit que le professeur donne une fonction à l'élève (celui-ci n'a donc pas la charge de fabriquer des fonctions, avec quelque ostensif que ce soit) et que l'élève ait à fournir une liste des propriétés vérifiées par la fonction, en puisant dans un catalogue établi par le professeur en classe. Ce catalogue est constitué de propriétés qui n'ont en général pas été problématisées : elles sont données par le professeur en classe de Seconde comme des savoirs établis.

La situation proposée ici ne prévoit pas non plus de problématiser les propriétés des fonctions [69] ; cependant elle met en évidence le fait que l'énoncé de contraintes faisant appel à ces propriétés conduit à des fonctions différentes, non antérieurement connues des élèves.

Cette situation a été construite pour une classe de Première, c'est-à-dire des élèves ayant déjà eu en Seconde un enseignement du concept de fonction. Cela ne signifie pas qu'il serait inutile de leur proposer une situation problématisant des propriétés qui ont été introduites par ostension ; mais une telle situation serait plus pertinente en Seconde, car en Première on peut craindre que les élèves ne voient pas l'utilité de revisiter ainsi des propriétés sur lesquelles ils possèdent déjà des connaissances [70] ; et d'autre part, dans la classe

[69] Elle ne traduit pas en situation la question « Pourquoi est-il intéressant qu'une fonction soit bornée ? » (ou admette un maximum, ou ...)

[70] Du moins en Première Scientifique, où était conduite l'expérimentation.

expérimentale, des contraintes du temps didactique rendaient peu envisageable de reprendre à la base tout l'enseignement des fonctions.

I. 2.5 Structuration du milieu de la situation « Graphiques et chemins »

Le milieu objectif est composé de RGC et chemins, sur lesquels des questions sont posées (le jeu). On peut alors dire que ce milieu objectif est « matérialisé » par des graphiques. Le milieu de référence est le milieu qui permet de répondre aux questions, de formuler, de valider ; il est constitué de RGC, de chemins, de déclarations formelles et en langue naturelle. Il est structuré par des règles de validité (validité des énoncés produits ou acceptés, à contrôler grâce aux ostensifs - outils du milieu).

Les connaissances « ascendantes » associées à chacun des niveaux de milieu peuvent être identifiées selon le schéma de structuration du milieu de Margolinas (cf. chapitre 2, et Margolinas 1994) :

- au niveau -3, K ↑E -3 comprend des connaissances sur les tracés et les dessins ;
- au niveau -2, K ↑E -2 est constitué de connaissances sur les fonctions, et de questions sur celles-ci, ainsi que du lien entre les questions sur les fonctions et les RGC. L'élève envisage les possibilités de réponse que lui offrent les différents ostensifs à sa disposition, et les règles de manipulation de ces ostensifs ;
- K ↑E -1 comprend les règles de validité relatives aux réponses possibles, les propriétés antérieures des fonctions (mises en évidence dans une fiche précédente par exemple, ou savoir institué en classe de Seconde), les ostensifs nouveaux introduits dans l'activité de validation (symboles et suites de symboles, par exemple avec quantificateurs, RGC, équations).

Lors de l'étude des situations dérivées de la situation générique, les connaissances identifiées que la situation a permis de construire, font partie des éléments présents dans la synthèse ou l'institutionnalisation. Ces connaissances figurent donc en fin d'étape dans la description de la situation.

I. 3 LES OBJECTIFS DES SITUATIONS DIDACTIQUES ASSOCIEES A LA SITUATION « GRAPHIQUES ET CHEMINS »

I. 3.1 La production de fonctions

La première famille de situations mises en place à l'aide de ce milieu concerne la définition des fonctions et des chemins ; elle englobe la partie du programme correspondant à l'introduction des fonctions « quelconques », mais reprend aussi les équations et inéquations du premier degré, l'existence d'une racine carrée pour tout nombre réel positif... Il s'agit de faire fonctionner les chemins comme outil de validation, en liaison avec des connaissances antérieures des élèves sur les fonctions affines, carré, inverse... et les équations et inéquations.

Le fait d'introduire des validations graphiques suppose d'utiliser des **connaissances spatiales**, ainsi que cela avait été pointé au chapitre 4. En effet les arguments font appel à des critères du type :

— le segment, la droite, coupe (ou ne coupe pas) la courbe, ou la coupe en plusieurs points ;

— le point (resp. la courbe) est au dessus ou au dessous d'un point, d'une courbe ;

— la courbe est dans le même secteur (demi ou quart de plan) que la droite, une autre courbe... ;

— le chemin part vers le bas, vers le haut, à droite, à gauche...

A travers un certain nombre de tâches dont certaines sont familières aux élèves, c'est aussi l'établissement du contrat défini ci-dessus qui est en jeu. Ce contrat comprend la **production** d'objets mathématiques fonctionnels (fonctions, y compris des fonctions inconnues des élèves, par exemple discontinues ; intervalles de définition des fonctions, équations, ...) ce qui est inusité dans le contrat classique. Il comprend aussi la **justification graphique**, qui dans ce même contrat classique est réservé au professeur, et d'usage relativement rare.

Cette première famille de situations vise à rappeler des connaissances communes (vues en Seconde) afin d'installer ultérieurement une situation comportant une dimension a-didactique, sur la base de ce socle de connaissances communes.

I. 3.2 Les propriétés des fonctions

La deuxième famille de situations prévoit l'utilisation des propriétés sur les fonctions, en particulier les propriétés liées à l'ordre : croissance, majorations, extremums. Là aussi le but du jeu est la production d'objets (des fonctions) répondant aux spécifications données. Ceci suppose bien entendu que le savoir soit acquis dans le sens direct, c'est-à-dire que l'élève soit capable de justifier si une fonction vérifie les propriétés annoncées (cf I. 2.2).

Les deux particularités par rapport au contrat classique consistent donc en ce que :

— la justification attendue est graphique (par les chemins et les connaissances spatiales) ;

— il faut produire des RGC de fonctions répondant aux contraintes, ce qui, suivant le jeu des variables, peut amener à construire des RGC de fonctions non connues des élèves. Pour ces RGC inattendues le contrat de justification graphique prend tout son sens (les RGC construites sont-elles bien des RGC de fonctions ?).

Par rapport au contrat classique, le gain est manifeste du point de vue du champ de fonctions qui est ainsi atteint, ainsi que du point de vue de la pertinence de l'introduction de fonctions nouvelles, voire de propriétés qui seront étudiées ultérieurement (ainsi le jeu des variables fait qu'on obtient des courbes avec asymptotes, et des fonctions non continues).

I. 3. 3 Les opérations sur les fonctions

La troisième famille de situations prévoit de faire effectuer des opérations algébriques (somme, produit, inverse) et relatives à la composition des fonctions (réciproque, composée) sur le milieu graphique / formel.

Les opérations ou transformations sur les fonctions font partie du contrat classique, mais de façon restreinte comme nous l'avons dit ; on peut relever ce qui est demandé dans ce contrat classique :

— du registre algébrique au registre graphique, c'est d'identifier par exemple la courbe d'équation $y = f(x + 2)$ comme étant l'équation de la transformée, par la translation de vecteur $-2\mathbf{i}$, de la courbe d'équation $y = f(x)$. Ceci a pour objectif déclaré de faciliter le tracé de fonctions « associées » à partir des RGC connues des fonctions de référence.

— du registre graphique au registre algébrique, la tâche réciproque est aussi demandée quoique de façon moins fréquente, c'est-à-dire, une transformation de courbe étant visible sur le graphique, associer l'équation correspondante.

Les opérations algébriques et les compositions de fonctions sont traitées, dans le contrat classique, presque exclusivement dans le registre algébrique (sauf les tâches répertoriées ci-dessus pour la composition des fonctions dans des cas très particuliers). Quant aux réciproques des fonctions numériques réalisant une bijection entre deux intervalles de **R**, elles ne sont pas habituellement traitées à ce niveau.

a) Opérations algébriques

Les chemins rendent possibles, dans le milieu graphique, une construction des sommes, produits, inverses de fonctions ; il est possible aussi de prévoir les propriétés des fonctions obtenues à partir des propriétés des fonctions de départ, et d'associer ces propriétés à des transformations géométriques opérant sur la courbe, lorsque c'est possible, et producteur - c'est-à-dire lorsque cela facilite l'anticipation et donc la tâche du tracé. Il est possible aussi, lorsque l'équation algébrique de la RGC est connue, de mettre en relation les propriétés mises en évidence graphiquement et la forme algébrique obtenue.

b) Réciproques et composées

Les chemins sont l'outil adapté pour traiter graphiquement les composées et réciproques de fonctions :

— pour les réciproques, ils permettent de poser le problème de l'existence et l'intérêt de f^{-1} comme fonction donnant systématiquement l'image réciproque d'un nombre ; de faire apparaître les conditions sur f pour que f^{-1} existe ;

— pour les composées, ils permettent de donner un sens global à gof en visualisant la RGC ; ils permettent de donner un sens à l'opération « o » dans la mesure où l'on peut multiplier les compositions, y compris avec des fonctions réciproques ou déjà composées.

Faute d'outils adaptés dans le contrat classique, ces notions sont peu abordées dans l'enseignement actuel. L'intérêt de les porter dans le champ des connaissances ou des savoirs dont les élèves disposent pour résoudre des problèmes, est double :

— ils contribuent à la construction de connaissances sur les fonctions comme objets : en effet les concepts se constituent d'autant plus en objets que l'on dispose de moyens pour opérer sur eux ;

— ce sont des outils qui se révèleront utiles, dans la suite du cursus scolaire des élèves, pour effectuer un certain nombre de tâches sur les fonctions, et pour comprendre les grands théorèmes d'analyse relatifs à l'inversion des fonctions, à la continuité, et à la résolution d'équations.

II. PREMIERE FAMILLE DE SITUATIONS DIDACTIQUES : PRODUCTION DE FONCTIONS

II. 1 PREMIERE LEÇON

Cette première leçon consiste en un rappel et une introduction de connaissances, elle ne comporte pas de dimension a-didactique, il n'y a donc pas lieu de parler de variables didactiques.

II. 1.1 Définition des chemins

Objectifs :

— définition des chemins et utilisation par les élèves sur des RGC de fonctions connues ;

— constatation de l'efficaité de l'outil « chemin » pour trouver des images directes et réciproques.

Déroulement:

Les élèves disposent de RGC de fonctions affines, ou de fonctions définies algébriquement, sans dépasser un niveau très simple ; ils doivent chercher des images et des antécédents de nombres donnés.

II. 1.2 Résolution d'équations

a) Objectifs

— relier les chemins et les représentations graphiques et les résolutions d'équations et d'inéquations du premier degré ou du second degré comme produit de facteurs du premier degré ;

— faire travailler sur une représentation fonctionnelle des équations ;

— retrouver, avec ces outils (RGC et chemins) les propriétés des racines carrées, qui jusqu'en Première scientifique posent problème aux élèves.

b) Déroulement et consigne

1. Dans un premier temps :

— les élèves ont des équations et inéquations à résoudre ; ce sont des équations qu'ils savent résoudre algébriquement, de telle sorte qu'une vérification algébrique est toujours possible ; mais les variables didactiques (coefficients des équations) ont été choisies pour que la résolution graphique soit plus aisée (les points d'intersection avec les axes ont au moins l'une des coordonnées entière ou fractionnaire simple) ;

— la consigne est de résoudre les équations, dans un temps donné ; le choix des coefficients et des équations est tel que la résolution graphique à l'aide des RGC et chemins est plus rapide que la résolution algébrique (par exemple résoudre l'inéquation :

$$(2x + 5)(- x + 7) > 0 \ ,$$

en disposant de la RGC des deux droites d'équations $y = 2x + 5$ et $y = - x + 7$).
2. Dans un deuxième temps, retrouver et justifier les propriétés connues de la fonction racine carrée, à partir de la RGC de la fonction carré et des chemins.

c) Synthèse

La synthèse porte sur les chemins comme outils pour trouver l'image réciproque d'un nombre ou d'un intervalle.

Cette leçon ne comporte pas de dimension a-didactique, c'est une leçon de rappels de connaissances, et d'introduction d'outils nouveaux que le professeur demande d'utiliser pour reconnaître et valider ces connaissances.

II. 2 DEUXIEME LEÇON

II. 2.1 Objectifs

— familiariser les élèves avec le milieu matériel (cf fiches en annexe) ;
— commencer à poser les bases de ce qui deviendra l'expertise graphique ;
— établir que les chemins sont un outil de validation permettant de répondre à la question : la RGC construite est-elle la RGC d'une fonction, et si oui sur quel intervalle ?
— permettre de faire fonctionner les chemins à partir de graphiques de fonctions connues;
— rappeler les connaissances sur le programme de Seconde : fonctions affines, fonctions de référence.

II. 2.2 Organisation matérielle

Les élèves sont répartis par groupes de quatre (deux binômes), ceci ayant pour but de faciliter le débat ; et aussi, pour le professeur, d'être sûr que toutes les connaissances nécessaires de la classe de Seconde seront bien remémorées dans chaque groupe.

Ils disposent de la feuille de consigne, d'une feuille de brouillon, de leur manuel s'ils le souhaitent.

II. 2.3 Consigne et déroulement

a) Consigne

« En Seconde, vous avez étudié des fonctions ; le but de ce travail est d'abord de revoir les notions vues en Seconde, mais nous le ferons avec un point de vue graphique. Ensuite, nous approfondirons ces notions ce qui nous permettra d'élargir nos connaissances à l'étude de fonctions plus complexes.

La plupart des graphiques dont nous parlerons seront, dans un repère (O,i,j), des graphiques de fonctions définies sur un intervalle, intervalle dessiné sur l'axe des x.

Qu'est-ce qu'un graphique? nous le définirons comme un ensemble de points du plan, de coordonnées (x,y) dans un repère (O,i ,j).

1) Tous les graphiques sont-ils des graphiques de fonctions? Y a-t-il des graphiques qui ne représentent pas des fonctions? pouvez-vous en dessiner?
Mettez vous par deux binômes ; chaque binôme propose des graphiques à l'autre binôme; il faut dire si ces graphiques sont des graphiques de fonctions ou non.

Peut-on donner des critères pour être sûr qu'un graphique est bien un graphique de fonction?
Ecrivez ces critères. S'agit-il de critères mathématiques ou de conventions de dessin?

2) Tracez des repères et dessinez quelques graphiques de fonctions ; dessinez aussi les graphiques des fonctions que vous avez étudiées en Seconde. »

b) Déroulement prévu

Le professeur distribue la fiche et les élèves produisent des RGC qui doivent être discutées (validées en tant que fonctions ou non). Bilan collectif, synthèse sur les caractéristiques d'une fonction. Les élèves se remémorent ce qu'ils ont appris sur les fonctions en Seconde (fonctions de référence, dont ils tracent les RGC sur leur brouillon).

Avertissement : dans tout ce qui suit, les références des fiches renvoient à l'annexe IV du chapitre 5 (fiches en espagnol extraites de « Metodos de graficacion », Alson 1987).

II. 3 TROISIEME LEÇON : PRODUCTION DE GRAPHIQUES SOUS CONTRAINTES D'INEGALITES

II. 3.1 Objectifs

Une fois acquis que les élèves savent tous tracer des RGC de fonctions et les reconnaître, il s'agit de fixer des contraintes afin qu'ils soient amenés :

— à tracer des fonctions non connues algébriquement, et à se rendre compte que la forme et les caractéristiques des RGC changent lorsqu'on modifie les valeurs, les points...

— à mettre en acte l'influence des quantificateurs, et à élaborer des connaissances sur la façon dont l'existence et la disposition des quantificateurs modifie la RGC obtenue ;

— à trouver des fonctions possédant des caractéristiques non encore connues (discontinuité, asymptotes « horizontales » ou « verticales » autres que les axes) ;

— à élaborer des conditionssur les fonctions pour qu'elles vérifient les contraintes, ou des théorèmes sur les contraintes qui sont données.

Il s'agit bien là des deux composantes de la situation : production de RGC, production de conditions ou théorèmes.

II. 3.2 Organisation matérielle et consignes

Les élèves sont par groupes de quatre ; ils disposent des fiches (cf annexe IV du chapitre 5) n^{os} 1, 2, 4 et 5. Ils disposent également de deux fiches (reproduites aussi en annexe IV) rappelant la définition d'un majorant (minorant) d'une fonction sur un intervalle, et d'un maximum (minimum). La définition « majorant, minorant » est sur la fiche n°2, et la fiche « maximum, minimum » est numérotée 3.

Les premiers schémas ne demandent encore que de la lecture directe, ou la construction de fonctions dont les images de valeurs fixes a,b,c vérifient des inégalités, ce qui ne conduit pas à construire des fonctions inattendues ; mais à partir des graphiques il faut construire une fonction sur un (des) intervalles avec des conditions sur la variable, par rapport aux valeurs (fixes) a et b ; puis des fonctions majorées, minorées, ou au contraire non bornées, sur des intervalles variables. Les intervalles demandés font partie des variables didactiques (à l'intérieur de la variable VC).

Fiche 1:

— construire des RGC avec des valeurs fixées, ou déterminées positives ou négatives ; pas de fonction insolite prévue.

Fiche 2 :

— construire des RGC avec des valeurs données paramétriquement sur l'axe Ox, et des conditions, par exemple f(a) < f(b) ;

— définition d'un majorant / minorant, et schéma.

Fiche 3 :

— définition d'un mximum et d'un minimum.

Fiche 4 :

— tracé de RGC avec conditions sur sens de variations, maximum ou minimum sous forme numérique (par exemple maximum atteint en x = 2).

Fiche 5 :

— tracé de RGC avec conditions sous forme d'intervalles et valeurs paramétrées (par exemple, si x < a, alors f(x) > f(a)). Travail inverse : déterminer sur quel(s) intervalle(s) f(x) vérifie une inégalité donnée;

II. 3.3 Choix des variables

La variable quadrillage est fixée de la façon suivante : pour les fiches 1 et 4, comportant des valeurs numériques entières : quadrillage présent (VQ : 1). La fiche 2 est une transition destinée à ce que les élèves s'approprient l'idée que des valeurs « exactes » ne sont pas forcément nécessaires pour décider si f(a) > f(b).

Pour la fiche 5: quadrillage absent (VQ : 0). En effet pour ces fiches, il n'est pas souhaitable que les élèves puissent recourir à des procédures numériques, ce qui pourrait limiter le choix des fonctions ; on constate en effet que la présence du quadrillage conduit les élèves à vouloir construire des RGC de fonctions répondant à des conditions numériques simples, comme f(1) = 0 ; ce n'est d'ailleurs pas en général possible, cela imposerait des contraintes supplémentaires qui ne sont pas forcément compatibles avec celles qui sont données. De plus le recours au numérique remplacerait les chemins, or les chemins peuvent et doivent rester l'outil de validation dans ce travail, car ceci permet d'ouvrir les possibilités de discussion des contraintes et de construction de RGC.

Les variables entrant en jeu sont ici la nature des lettres indiquant des points sur les axes (constantes ou variables, donc quantifiées) (VL) et les inégalités données dans les contraintes (VC).

Ainsi les RGC de la fiche 5 (Annexe IV) imposent, par le jeu des variables, ou des questions issues des graphiques, de tracer des fonctions non encore connues des élèves, ainsi par exemple :

—pour la RGC 5 - 7, une fonction non continue en a, puisque les inégalités conduisent à un « saut » des valeurs de f(x) entre les x plus petits que a et les x compris entre a et b ;

— la RGC 5 - 2 n'impose pas a priori une fonction inhabituelle, mais le jeu des questions peut faire surgir des RGC non envisagées antérieurement, car la condition donnée (si a < x < b, alors f(a) > f(x) > f(b)) est, dans un premier temps, confondue par certains élèves avec le fait pour f d'être décroissante, ce qui sera contesté par certains ; or le jeu va consister à produire un contre exemple, c'est-à-dire une fonction qui vérifie la contrainte et qui n'est pas décroissante ; un tel exemple de fonction ne fait pas partie du bagage de fonctions connues des élèves ;

— la RGC 5 - 8 impose comme première condition à f, d'être bornée sur un intervalle a priori non borné (nous disons « a priori non borné », car la condition énoncée est : si a < x , alors f(a) > f(x) > f(b) ce qui peut vouloir dire que x est élément de] a , + ∞ [, mais laisse aux élèves la possibilité d'opter pour un ensemble de définition borné (rappelons que l'actuel programme de Seconde n'envisage que des fonctions définies sur un intervalle borné) ; le fait de considérer l'intervalle] a , + ∞ [conduit également à une RGC inusitée à ce niveau : soit une fonction oscillante, soit une fonction ayant une asymptote à l'infini. La deuxième condition : si x < a, f(a) < f(x) , peut conduire, soit à une RGC ayant une branche parabolique, soit à une fonction bornée à l'infini.

— les RGC de la fiche 6 doivent répondre à des conditions exprimées de façon globale, ce qui constitue un pas supplémentaire dans les contraintes, et risque de mettre certains élèves en difficulté ; cela devrait aussi susciter des questions sur les propriétés globales (fonction bornée, extremum...) suivant que ces propriétés sont à mettre en œuvre sur un intervalle borné ou non. La fiche 6 fait partie de la deuxième situation.

Tableau 5.1 - Variables :

VF	Fiches 1 à 6 : fonctions quelconques
VL	Fiche 1 : valeurs numériques Fiches 2 à 6 : lettres a,b,c représentant des constantes et x variable
VC	Fiches 1 à 6 : tracer des RGC sous contraintes d'égalités et d'inégalités *Variable contrainte relative aux intervalles :* Fiches 5 et 6 : intervalle borné, puis intervalle non borné, f majorée ; puis intervalle ouvert borné, f non majorée. On fixe successivement les valeurs de ces variables de façon à engendrer des fonctions différentes (« oscillantes », à asymptote parallèle à Ox ou Oy, à limite infinie à l'infini... - ces différentes catégories n'étant pas exclusives l'une de l'autre)
VA	Absente
VN-VQ	Fiche 1 : présente Fiches 1 à 6 : absente
VT	Fiches 1 à 6 : absente

II. 3.4 Déroulement prévu (analyse a priori)

Les élèves ne devraient pas rencontrer de difficultés dans les premières fiches, et leurs connaissances de Seconde doivent pouvoir leur permettre de répondre sans mal. Il faut s'attendre cependant à ce que le côté inhabituel de la consigne (tracer des RGC de fonctions dont on ne connait pas de représentant algébrique) provoque quelques incertitudes : a-t-on bien le droit de ... ? Mais la validation par les chemins est suffisamment familière à ce stade, pour qu'elle puisse fonctionner sans difficulté.

On peut s'attendre par contre, à ce que les schémas suivants (à partir de la fiche 5) provoquent des interrogations : en effet le choix des variables conduit à des RGC de fonctions possédant des propriétés inconnues des élèves, ou à une discussion sur l'analogie des propriétés énoncées avec d'autres propriétés connues.

Ainsi le schéma 5 - 2 est-il donné avec une condition qui peut très facilement être confondue avec celle qui est donnée comme définition de : f est décroissante sur l'intervalle]a,b[; on peut donc s'attendre à des discussions sur ce fait. Si des élèves ne trouvent pas seuls que la condition est différente, c'est alors au professeur de pointer la différence (absence de quantification portant sur deux variables) et de demander de justifier cette différence, en mettant plusieurs propositions à l'épreuve :

— soit la condition donnée dans le schéma 5 - 2 signifie bien que f est décroissante sur l'intervalle]a,b[, et dans ce cas la condition donnée en Seconde pour « f décroissante » est inutilement compliqué, ce qui est tout de même bizarre ;

— soit il y a une différence, et alors on peut justifier cette différence par la construction de fonctions non décroissantes bien que vérifiant la condition.

Reprenons alors le modèle que nous avons précisé au chapitre 2 (la structuration du milieu, complétée par l'analyse ascendante du rôle du professeur). A partir du schéma présenté par Margolinas nous obtenions celui qui figure ci-dessous, où seules les fonctions du professeur dans les niveaux didactique et a-didactiques ont été complétées :

<u>Tableau 5.2 :</u>

M3 : M-de construction		P3 : P - noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur-
M2 : M-de projet		P2 : P - constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P - projeteur	S1 : situation de projet	tique
M0 : **M-d'apprentissage**	**E0 :** **Elève**	**P0 :** **Professeur-pour-l'élève**	**S0 :** **situation didactique**	
M-1 : M-de référence	E-1 : E-apprenant	P-1 : ***P - en action****	S-1 : situation d'apprentissage	a-
M-2 : M-objectif	E-2 : E-agissant	***P- observateur****	S-2 : situation de référence	didac
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective	tique

* Le professeur observateur est redescendu au niveau objectif, comme prévu au chapitre 2 ; le professeur de la situation d'apprentissage est un professeur qui interagit avec les connaissances des élèves, en mobilisant ses connaissances à lui. Nous disions au chapitre 2 que le milieu de référence est un milieu *pour l'action* du professeur.

Le professeur doit prévoir la nécessité éventuelle d'alimenter le milieu de référence avec des questions et des fonctions si les élèves en ont besoin, c'est-à-dire s'ils s'avèrent incapables de confronter seuls leurs conjectures aux RGC que le milieu permet en principe de construire. Ceci nécessite au minimum qu'il soit en mesure de faire l'analyse a priori portant sur les variables didactiques, et qu'il puisse anticiper non seulement sur les fonctions qu'il est possible d'obtenir à partir des conditions données, mais encore sur les fonctions « voisines », c'est-à-dire celles qui sont spécifiées par des conditions de même type, mais avec quantificateurs ou inégalités... en plus ou en moins.

Le professeur va donc être amené à anticiper fortement sur tout un ensemble de fonctions non seulement construites effectivement par les élèves, mais aussi un ensemble « voisin » de fonctions, ce que lui permet bien évidemment, contrairement aux élèves, sa culture mathématique. Il doit aussi évaluer quelles sont les fonctions « voisines » dont les élèves peuvent se saisir pour un exemple ou un contre-exemple, et quelles sont celles qui sont hors de leur portée (trop difficiles, ou bien la validation graphique est rendue impossible à cause du caractère réducteur du graphique).

Il devra prévoir aussi d'avoir à gérer les débats sur les différences entre RGC répondant aux conditions et RGC « voisines », sans exclure le fait que certaines RGC voisines peuvent très bien être des solutions possibles, mais non nécessaires, et qu'il devra donc gérer en même temps le débat sur condition nécessaire et suffisante. C'est le cas du schéma 5 - 2, où une fonction décroissante peut répondre à la condition imposée ; mais si l'on se contente de cette réponse, on passe à côté de la connaissance vraiment importante et *utile* dans ce schéma.

Il faut bien parler de *connaissance utile* car on est là dans le même cas que celui qui a été étudié au chapitre 2, dans l'épreuve d'une fonction non majorée : ainsi que le dit F.Conne, « c'est ce que j'entend par "utilité": c'est un savoir parce que c'est une connaissance utile, qui fait que autant l'exemple permet d'éprouver le critère donné, que le critère permet de trouver un exemple. Telle est l'utilité de la connaissance en jeu. Et ce n'est qu'en regard de ce savoir qu'on peut alors considérer, en général dans l'après coup, que l'on a effectué cette tâche en deux sous-tâches (la seconde ne se définissant que par rapport à la première) ».

Si la situation proposée permet donc de prévoir une activité mathématique du couple enseignant / enseigné, c'est bien parce que ces occasions d'interactions de connaissances / savoirs vont se répéter.

Ainsi les schémas de la fiche 5 et 6 donnent-ils des occasions de ces mêmes confrontations de connaissances ; l'analyse en a été faite au chapitre 2.

II.4 DEROULEMENT EFFECTIF ET EVALUATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES A L'ISSUE DES TROIS LEÇONS

La situation a été expérimentée en 1996/1997 dans une classe de Première Scientifique du lycée Saint-John Perse, à Pau. Cette classe était composée de 31 élèves, et d'un niveau moyen pour une Première scientifique ; elle comportait néanmoins deux très bons élèves, une dizaine d'élèves très intéressés et d'un bon niveau, et d'autres (2) nettement moins sûrs de leur choix scientifique ; 4 élèves étaient en grande difficulté dans cette section. Sur les 31 élèves de la classes, 4 ont redoublé, dont un dans une section ES (économie) ; une est allée en Terminale litttéraire, il y a donc 26 élèves qui ont présenté l'année suivante un baccalauréat scientifique. Sur ces 26 élèves, 24 ont été reçus (soit 92,30 % pour les élèves ayant présenté ce baccalauréat, et 77,4 % de l'effectif total de la classe de Première), dont 11 avec mention (1 mention Très Bien, 4 mentions Bien, 6 mentions Assez Bien). L'élève qui a présenté un baccalauréat littéraire avec option mathématiques, a été reçue avec mention Assez Bien.

Les élèves ont cours de mathématiques :

— le lundi matin de 9H à 11H ;

— le mardi après-midi de 14H30 à 15H30 ;

— le mercredi matin de 10H à 12H.

Ils ont par ailleurs 1H de modules, en demi-classe, soit le mardi après-midi, soit le vendredi matin. Ces heures sont consacrées à du travail autonome d'approfondissement et d'entraînement.

Le travail s'est déroulé sur un nombre de séances relativement important, entre septembre et novembre, puis en janvier 1997 :

— une séance de deux heures en septembre, sur la définition des chemins et les résolutions d'équations, avec applications en module ;

— les séances de mathématiques du mercredi 6/11/96 au mercredi 20/11/96 pour les premières fiches (construction de RGC sous contraintes d'inégalités, et de RGC de sommes et produits) ; parmi ces séances, celles du 6/11 et du 13/11 ont été filmées, et celle du 20/11 a été partiellement observée ;

— les séances concernant les réciproques et composées ont été menées les lundi 6 et mardi 7 janvier ; des notes ont été prises sur le travail des élèves.

Le travail a eu lieu durant 2H le 06/11, 1H le 12/11, 2H le 13/11, 2H le 18/11, 2H le 20/11 et 1H le 25/11.

II. 4.1 Déroulement effectif des première et deuxième leçons

a) La première leçon (septembre 1996)

Elle donne lieu à des apports de connaissances de la part du professeur (définition des chemins, résolution graphique d'équations) et à des questions, essentiellement liées :

— à la résolution graphique d'inéquations du type $(ax + b)(cx + d) > 0$: comment, à partir des RGC des deux fonctions définies par $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$, peut-on « lire » sur le graphique les ensembles de valeurs de x tels que $cx + d > 0$ ou $cx + d < 0$ par exemple, et de façon équivalente pour $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$; comment peut-on alors lire de même l'ensemble des valeurs de x tel que $(ax + b)(cx + d) > 0$ ou $(ax + b)(cx + d) < 0$, pour enfin résoudre l'équation ;

— à l'existence et aux propriétés des racines carrées, qui dans cette organisation de l'enseignement sont présentées (on ne peut pas dire introduites, car les élèves les connaissent depuis la classe de Quatrième par le travail sur le théorème de Pythagore) dans une perspective fonctionnelle [71] : à partir de la courbe de la fonction « carré », les chemins retour permettent de définir les images réciproques d'un réel positif par la fonction carré, et de retrouver celui de ces deux nombres qui sera noté : $\sqrt{x}$.

b) La deuxième leçon (novembre 1996)

Lors de la deuxième leçon quelques questions sont énoncées par les élèves, et ils produisent volontiers des graphiques de toutes sortes (voir annexe V), en général conformes à ce qu'ils ont vu en Seconde.

La première constatation est qu'une minorité d'élèves (mais c'est quand même étonnant en Première S, vue l'importance du travail sur les fonctions en Seconde) ne sait pas trouver les images et les antécédents de nombres donnés, ceci étant apparemment lié à un manque relatif au repérage spatial : difficulté à savoir si le chemin doit partir horizontalement ou verticalement, quand il doit bifurquer, dans quelle direction avancer pour rencontrer ou non la courbe, la bissectrice...

D'autre part les chemins mettent en évidence (et permettent de traiter) une difficulté relative à l'image réciproque d'un nombre ou d'un intervalle, c'est ce qui se passe lorsque cette image réciproque est absente, c'est-à-dire **vide**. C'est le cas pour la RGC de la fonction carré, si y est négatif ou nul. Dans ce cas les élèves rencontrent des difficultés, car un chemin réciproque issu de y ne rencontre pas la RGC, ce qui doit être interprété. De plus cette difficulté rejoint les connaissances spatiales, ou leur manque, évoqué ci-dessus : il y a aussi une expertise du tracé des chemins, qui, même modeste, demande une phase d'apprentissage. Le point intéressant est que les questions relatives à cette expertise puissent être traduites en termes de connaissances fonctionnelles.

Il ressort du travail entre élèves et des brouillons recueillis (cf Annexe V) que les élèves savent très bien quels graphiques ne sont pas des graphiques de fonctions (spirales, cercles, droites parallèles...) mais qu'ils ont des questions sur des fonctions un peu "atypiques", par exemple non définies sur un intervalle mais définies ailleurs, ou bien un point tout seul.

Ainsi :

— un cercle ou une courbe qui revient sur elle-même ne représente pas une fonction, mais une droite ou une sinusoide, si ;

— des questions sont écrites sur les brouillons : un point est-il une fonction? et s'il y a des "valeurs interdites"? peut-il y avoir tout un intervalle de "valeurs interdites"? et si la courbe comporte des segments parallèles à l'axe des y? un groupe dessine une courbe ressemblant à 1/x et écrit que ce n'est pas une fonction : les branches infinies sont-elles interprétées comme parallèles à Oy? le problème se retrouvera avec les fonctions bornées et avec les produits.

---

[71] cf Bronner 1997, p. 262 et suivantes.

Les élèves constatent que leur livre ne fournit pas d'aide pour savoir si un graphique est bien celui d'une fonction.

La définition produite par les élèves est que : tout x qui a une image en a une seule ; à la suggestion du professeur cette propriété est traduite en termes de chemin : il y a sur le graphique un seul chemin direct (x, f(x)).

Certaines propriétés des fonctions ressortent : fonction croissante, décroissante ; maximum, minimum. Certaines propriétés, pourtant vues théoriquement en Seconde, ne sont pas évoquées : en particulier tout ce qui concerne la parité, sur laquelle un gros effort est pourtant porté en Seconde, car l'identification des propriétés de parité est supposée aider à la réalisation de la RGC.

En conclusion deux remarques :

— cette première phase de prise en main de l'outil graphique a paru à l'observation pas toujours très productrice, ni très lisible compte tenu du travail en groupes ; il s'avère qu'elle est quand même riche en questions d'élèves et qu'elle leur est nécessaire pour s'approprier l'outil graphique ; la phase : tracé de courbes sous la responsabilité des élèves, n'est pas inutile.

— **certaines questions n'auraient pu être produites dans un cadre algébrique** (par exemple la fonction non définie sur]-1,1[aurait pu être : $\sqrt{(x^2 - 1)}$, mais les élèves ne connaissent pas ce type de fonction au début de la Première).

II. 4.2 Troisième leçon (12/11/96 et 13/11/96)

a) Les fiches en espagnol

La classe expérimentale ne comportait que des élèves ayant choisi l'espagnol comme première ou seconde langue, et parmi ces élèves, une bonne dizaine étaient en classe européenne d'espagnol, ce qui signifie qu'ils avaient des cours (histoire) en espagnol, et un horaire de langue européenne renforcé, soit 5H par semaine.

Or les fiches dont nous disposions provenaient du livre de Pedro Alson, "Metodos de graficacion" ; elles ont été parfois très légèrement modifiées et l'ordre a pu être perturbé pour s'adapter aux connaissances des élèves français. Les fiches 1 à 11 de l'annexe IV sont données en espagnol mais pourraient être facilement traduites en français. Le choix de les conserver en espagnol était dû au fait que tous les élèves de la classe étudiaient l'espagnol en première ou deuxième langue, et à des questions de temps, à savoir le délai entre la décision d'utilisation des fiches, septembre 1996, et leur entrée en classe, presque immédiatement pour la définition des chemins, et en novembre 1996 pour le tracé de RGC. Par ailleurs le professeur pouvait s'appuyer, dans cette classe, sur une motivation culturelle : « nous travaillons sur les mêmes fiches que des élèves ou étudiants d'Amérique du Sud » et sur un travail avec le professeur d'espagnol si nécessaire pour la traduction.

La langue espagnole aurait pu conduire à une difficulté : l'incompréhension de la consigne, ce qui semblait peu probable étant données la simplicité du vocabulaire utilisé et sa répétitivité, et aussi la possibilité de traduction soit par le professeur soit par certains élèves de la classe ; il pouvait y avoir l'avantage correspondant, à savoir que la nécessité de s'informer du sens précis des mots en espagnol évite les fausses évidences de sens et confusions entre le langage naturel et le langage mathématique. C'est le cas par exemple pour les fonctions bornées, où le mot français est équivoque (sens mathématique très éloigné du sens naturel) alors que le mot espagnol est très différent : « acotada », parce qu'une fonction « acotada » est une fonction qui admet une « cota » supérieure et une « cota » inférieure.

b) Le rôle de la répétition dans les tracés

Les fiches originales figurent en annexe IV du chapitre 5 ; certaines de ces fiches ont été reproduites en français dans l'annexe II du même chapitre. Toutes les fiches n'ont pas été refaites car certaines étaient redondantes. Par exemple, dans la fiche 2 en espagnol, il n'y a pas de changement des variables didactiques entre les cadres 7 à 12 ; en effet on remarque que les tracés n'ont aucune raison nécessaire de différer entre les cadres successifs, hormis la position de la courbe relativement à l'axe des abscisses ou des ordonnées ; c'est-à-dire que d'un point de vue topologique, il n'y a pas de différence entre les RGC que l'on obtient. Du point de vue des propriétés de croissance, les courbes ne diffèrent pas non plus sensiblement. Donc le fait de permuter les valeurs a, b, c sur l'axe des abscisses n'offre que peu d'intérêt de ce point de vue, et on peut penser que c'est très formel, avec pour but de faire une étude exhaustive de tous les cas de figure des dispositions différentes de a, b et c, et des différentes inégalités [72].

Mais il serait faux de croire que cette répétition n'a pas de sens pour les élèves, et nous nous interrogeons sur la nécessité d'en passer par cette répétition. En effet pour les élèves il n'est pas du tout évident, de prime abord, que les fonctions construites dans les différents cas soient de même type, et certains élèves montrent, dans l'action, une absence d'anticipation complète sur le type de fonction que telle ou telle condition permet d'obtenir, même dans les cas complètement non problématiques du point de vue du professeur (non problématique quant au résultat, mais manifestement pas quant aux connaissances des élèves).

Il paraît donc raisonnable de penser que la répétition joue un rôle dans la possibilité pour l'élève de construire des connaissances lui permettant ensuite d'anticiper sur les fonctions qu'il obtient ; or ces connaissances seront nécessaires au moment d'opérer sur les fonctions, par somme, produit, inverse, réciproque, ou composée.

Le choix, en partie dû aux contraintes du temps, de conserver les fiches telles quelles, s'est avéré en tous cas sans incidence quant au fait que les élèves aient à traduire l'espagnol ; cela a même plutôt donné lieu à des questions intéressantes sur le sens des formulations, comme prévu.

c) Le débat sur la quantification des variables

Par contre le fait que des expressions contenant une variable x ne soient pas quantifiées, conduit à un débat sur les quantificateurs et les intervalles. Du schéma 1 au schéma 6 de la fiche 5 en effet, les fonctions à tracer ne posent pas de problèmes mais les conditions sont données sans quantificateurs. D'où question des élèves : « Que signifie "si a<x **ou** x >b " : on choisit un x ? x ne peut pas être à la fois plus grand que a et plus grand que b? »

« Ou » signifie la réunion de deux intervalles, pas leur intersection (intervention du professeur) ; quand à la remarque « on choisit un x ? » , elle est particulièrement intéressante car elle amène un débat sur la nécessité de la quantification, quantification dont nous avons dit qu'elle était absente des manuels, avec des conséquences sur un manque relatif à l'identification des nombres en jeu (cf. chapitre 3). Le professeur dans ce cas se borne à une intervention sur l'écriture mathématiquement correcte de ce genre de conditions :

04 E : les premiers, y a écrit si a < x < b , et on sait pas quels x...

05 P : ah, alors c'était une illusion de ma part, ça avait donc posé des problèmes, donc … Alors que veulent dire les spécifications de la feuille n°6 ? alors il y a une difficulté, qui vient de ce que les consignes ne sont pas quantifiées… c'est-à-dire, on vous dit, si a <x <b, alors f(a) < f(x) < f(b) ; encore celui-ci, ça allait à peu près, ceci dit, c'est vrai qu'il manque un quantificateur, alors la difficulté vient de ce que la consigne n'est pas la même que dans l'une

[72] Pour cette raison nous n'avons d'ailleurs repris, dans les fiches françaises, que les cas correspondant à un changement de choix des variables didactiques.

des feuilles précédentes ; vous vous souvenez, le dessin il était comme ça (dessine), on avait par exemple a, b, c (P place c entre a et b) et on vous disait : trace une courbe continue telle que f(a) < f(c), et par exemple f(b) < f(c). Là ça veut dire c appartient à [a,b], et c est le point noté sur le graphique, et ça faisait quelque chose comme ça (dessine une courbe au tableau).

Alors que là, il faut comprendre que c'est pour tout x : on vous demande de tracer le graphique d'une fonction f définie où ça ? où est-elle définie ? d'après ce qui est écrit dans certains cadres, elle n'est pas uniquement définie sur [a,b], puisqu'il y a des cadres où on prend x < a par exemple ; donc elle est définie sur un intervalle qui contient [a,b], ce qui veut dire, sur [a,b], et dans certains cas, si x < a ou x > b, en dehors, sur un intervalle plus grand. Et dans l'un des cadres, par exemple, on dit que si a < x < b, alors f(a) < f(x) < f(b) ; alors en fait pour que ce soit tout à fait correct mathématiquement, il faudrait mettre **quel que soit x** tel que a < x < b

(En annexe III figure la transciption de la séance du 13/11/96, qui voit la fin du débat sur la condition du cadre n°6 de la fiche 5).

d) Le débat sur les fonctions croissantes et la discontinuité

On a alors cet extrait, suite du précédent :

P : Et dans l'un des cadres, par exemple, on dit que si a < x < b, alors f(a) < f(x) < f(b) ; alors en fait pour que ce soit tout à fait correct mathématiquement, il faudrait mettre quel que soit x tel que a < x < b

(P écrit en même temps). Or justement, au début, on avait dit que si on avait c tel que a < c < b et : f(a) < f(c) < f(b), est-ce que la fonction était nécessairement croissante ?

06 E : non

07 P : et là, est-ce qu'elle l'est ?

08 E : oui

09 P : oui, bon … Après, quelquefois, on avait eu du mal à trouver une fonction qui convenait ; ça marchait jusqu'où ?

Or lorsque l'élève répond, au n° 08, que la fonction est croissante, le professeur, qui doit savoir que c'est faux, dit « oui, bon... » et ne traite pas cette question à ce point du débat. On peut faire deux hypothèses :

— soit il est dans les questions sur les quantificateurs et il « laisse passer » involontairement ;

— soit il remet délibérément à plus tard le traitement de cette question.

La question est reposée quelques instants plus tard, lorsque plusieurs élèves redisent, au n°16, que f est croissante, que le professeur ne relève toujours pas, mais que Guillaune, au n°19, s'oppose à cette interprétation en disant :

19 Guillaume : pas obligatoirement ; le tout c'est qu'elle ne dépasse pas…

20 P : oui ? c'est quoi le majorant ?

21 Es : f(b)

22 P : oui… f(b) est un majorant de f si x<a ; et si x > b ? et bien aussi. Là on peut la faire descendre (dessine) et est-ce qu'elle peut remonter ?

23 E : oui, à condition de pas dépasser…

24 P : oui, et de l'autre côté… aussi, elle peut osciller, comme ça (dessin).

Ce fait que la fonction peut osciller, du moins entre a et b, ne sera pas repris tout de suite ; manifestement, le professeur est dans les majorants. Même plus, la même erreur sur les fonctions sera faite au n°25, les élèves déclarant qu'une fonction telle que : si a < x < b , alors f(a) > f(x) > f(b) , est une fonction décroissante, sans que le professeur ne réagisse. Il est vrai qu'à ce moment-là, le débat porte sur la possibilité, ou non, de vérifier l'autre condition, qui amène à une fonction discontinue en a :

P : Alors les difficultés commençaient au 5-7 ; là on tombait sur des types de fonctions qu'on connaissait pas ; on va reprendre parce que je crois que tout le monde n'a pas commencé à réfléchir là-dessus.

Certains avaient dit : c'est pas possible. Et j'avais répondu : si, c'est possible, mais peut-être pas avec les fonctions qu'on connaît déjà. Alors il y a un problème.

On va voir comment on peut enrichir un peu nos fonctions pour répondre à ce type de conditions.

Alors : pour tout x compris entre a et b, f(a) > f(x) > f(b) ; sur [a,b] elle est comment ?

25 Es : décroissante

26 P : et ensuite pour tout x < a, ou pour tout x > b, je dois avoir f(x) < f(b) ; alors comment est-ce qu'on peut faire ça.

On réfléchit à ça ; allez ; faites des essais. Si certains ont des idées, ils peuvent venir le faire au tableau. Je vais placer f(a) et f(b) ; ils sont comment ?

27 Noémie : f(a) > f(b)

28 P : oui, essayez de réfléchir comment on pourrait obtenir une fonction comme ça.

Les élèves travaillent.

29 Etienne : en coupant la courbe…

30 P : tu peux venir dessiner,

Etienne au tableau, dessine une courbe discontinue en a.

31 P : d'accord ; on va la couper. Est-ce que c'est possible de couper les courbes ?

32 Es : oui… non

33 P : alors oui ou non, et pourquoi ?

34 Es : c'est pas une fonction !

35 P : Est-ce que vous vous souvenez quelles sont les conditions pour avoir un graphique de fonction, on va dire que c'est possible si ça répond aux conditions qu'on a données, hein, on va être logique , on va dire que c'est une fonction si ça vérifie ; on a donné une condition qui dit : c'est une fonction à telle condition, hein, si celle-ci le vérifie on l'admettra.

La condition réinvestie est celle qui fait intervenir les chemins. La suite du travail porte sur la possibilité qu'une RGC discontinue soit bien une RGC de fonction ; et comme les élèves ne relancent pas sur la croissance, bien que Guillaune, au n°19, ait effectivement mis sur la voie de la connaissance utile, et que le professeur ait enchaîné en disant que la fonction pouvait osciller, c'est le professeur qui est obligé de reprendre sur la croissance, au n°59, pour cette fois produire un exemple de fonction vérifiant la condition et non croissante. En même temps il pointe la différence entre la condition donnée et la définition de la croissance vue en Seconde, et le fait que cette définition impose des contraintes autrement plus fortes, ce que Benjamin traduit, au n°61, par : « En fait elle est comme on veut ».

e) La recherche d'images réciproques d'intervalles

La deuxième partie de la séance du 13/11 porte sur l'opération inverse, c'est-à-dire sur les conditions à donner sur x si l'on veut pouvoir affirmer que f(x) est plus petit ou plus grand que f(a), ou f(b).... Cette fois la fonction est donnée, et il s'agit de trouver des images récirpoques puisqu'il s'agit de déterminer les intervalles tels que f(x) > f(a) par exemple. Ce travail s'apparente donc à celui qui a été fait à la première séance (résolution d'équations).

A la réplique 91, le professeur semble adopter l'opinion de Marina qui déclare ne pas pouvoir répondre (schéma 5-13) dans le cadre fixé qui impose de donner une condition du type x > a ou x < a ; un élève sugggère alors d'aller plus loin que ce qui est demandé sur la fiche, et de découper sur Ox les intervalles convenables pour pouvoir répondre par une réunion d'intervalles. Cette proposition est adoptée par le professeur et mise en œuvre par la classe.

f) La dimension a-didactique

Sur la gestion de la situation d'action et de formulation, remarquons simplement, dans un premier temps, que dans cette séance 15 élèves identifiés, sans compter ceux qui se trouvaient hors champ, et pouvaient soit être les mêmes, soit d'autres, sont intervenus pour faire des déclarations, faire des graphiques au tableau, ou poser des questions. Or ces quinze élèves sont loin d'être tous des élèves brillants, puisque Benjamin et Facila redoubleront à la fin de l'année. Les élèves ont d'ailleurs spontanément modifé les graphiques de ceux qui les avaient faits au tableau, lorsqu'ils n'étaient pas d'accord, ou proposé à côté un graphique différent. Ceci nous semble significatif du fait que les élèves peuvent utiliser leurs connaissances antérieures (spatiales, graphiques, fonctionnelles) comme point d'appui pour poser des questions, proposer des solutions et construire / éprouver des connaissances nouvelles.

II. 4.3 Evaluation des connaissances des élèves à l'issue des trois leçons

Les faits les plus marquants nous semblent être :

*a) **La production de fonctions nouvelles.***

Il y a deux sortes de fonctions « nouvelles » :

— des fonctions qui, tout en ne possédant pas de propriétés particulières par rapport aux fonctions de référence exhibées en Seconde, sont nouvelles pour les élèves car ils ne sont pas habitués à des fonctions, certes continues, mais qui ont une forme non canonique (ce ne sont pas des droites ou des paraboles, à la rigueur des hyperboles ou des courbes du troisième degré), et surtout qui peuvent être construites sans que l'on connaisse leur formule algébrique ;

— des fonctions possédant des propriétés complètement insolites, par exemple oscillant entre deux bornes, ou discontinues.

*b) **Les questions sur les fonctions***

Cette situation conduit à une grande richesse de questions sur les fonctions, à tel point que le professeur éprouve du mal à les traiter toutes :

— différence entre la formulation, avec des quantificateurs, de « fonction bornée » et « fonction croissante » ;

— questions de quantifications et d'intervalles ;

— questions relatives à la continuité et à l'ensemble de définition, par exemple : est-ce que 1/x peut être considérée comme une fonction discontinue ;

— questions sur les images réciproques (cf transcription, à partir du n° 82 ; ceci concerne les schémas 5-11 à 5-16 et 6-1 à 6-6) ;

— questions sur majorant, maximum (voir III) ;

— questions « métamathématiques » comme « qu'est-ce qu'une variable ? » (cf n°79 dans la transcription).

*c) **La nature des interventions des élèves***

Les élèves, à plusieurs reprises, obligent le professeur à aller plus loin que ce qu'il avait prévu : par exemple en le mettant en demeure de traiter explicitement le problème de la quantification, ou en suggérant de compléter le travail à faire, dans le cas des images réciproques d'intervalles, de façon à pouvoir donner une réponse en termes de réunion d'intervalles même lorsque ce n'était pas demandé dans la consigne.

La situation n'ayant pu être testée qu'une fois, les résultats sont bien sûr donnés sous réserve de vérification de la reproductibilité.

Les connaissances des élèves à l'issue des trois séances peuvent être décrites par le fait que leur bagage fonctionnel et leur capacité à poser des questions sur les RGC s'est considérablement augmentée, comme dit ci-dessus. Au chapitre 2 nous analysions comment cette augmentation de connaissances se traduirait en final par :

— d’une part, la capacité à solliciter les connaissances du professeur sur des propriétés concernant les fonctions ;

— d’autre part, la demande de savoirs organisateurs afin de ne pas être obligé de replonger dans le milieu objectif à chaque question.

A l’étape correspondant à ces trois leçons, on peut considérer que les élèves n’en sont pas encore à ce dernier stade, mais à celui d’épouver leurs questions sur le milieu qui est fourni par la situation. Ces trois leçons correspondent donc à une phase d’action et de formulation, et au début de la phase de validation. A l’issue de ces leçons, peu de savoirs ont encore pu être institutionnalisés.

III. DEUXIEME SITUATION DIDACTIQUE: PROPRIETES DES FONCTIONS

Entre les deux situations, le professeur traite les équations du second degré, la factorisation et le signe de $ax^2 + bx + c$.

III.1 ANALYSE A PRIORI

III. 1.1 Objectifs

Le principal objectif de cette phase est de passer plus clairement à des propriétés de la fonction, en se détachant des valeurs de la variable et des images. Il s'agit de donner un sens à des propriétés qui ont été définies en Seconde, et revues dans les fiches 2 et 3, à savoir « f admet un maximum » , « f admet un majorant », « f n'est pas bornée ». Il s'agit aussi de déterminer les rapports qu'entretiennent entre eux ces différents énoncés, et leurs éventuelles négations.

L'étude faite au chapitre 2 a montré que ces objectifs peuvent être poussés assez loin dans le milieu disponible, jusqu'à une formulation avec des quantificateurs des propriétés énoncées.

On peut donc dire que cette deuxième famille de situations correspond à l'entrée dans la deuxième partie de la composante « contraintes » de la situation, c'est-à-dire non seulement à la détermination empirique de RGC vérifiant les contraintes, mais aussi à l'énoncé des critères théoriques permettant d'affirmer qu'une fonction possède bien une propriété ; et plus encore, à un travail sur les énoncés de propriétés.

III. 1.2 Organisation matérielle et consigne

Les élèves sont toujours en groupes, et ils disposent de la fiche n°6. Le travail concerne les schémas 6-7 à 6-18. La consigne est comme précédemment de déterminer une RGC répondant aux contraintes énoncées. Exemple de consigne : sur R+ , f est minorée mais pas majorée, et sur]-2 , 0[f est minorée mais pas majorée.

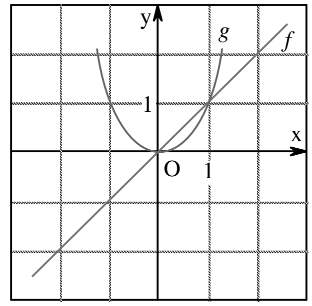
III. 1.3 Choix des variables

Le repère n'est pas quadrillé car la donnée de valeurs numériques risquerait de focaliser le travail sur les valeurs de f(x), donc d'occulter l'énoncé de l'existence d'un — ou l'inexistence d'un — majorant ou minorant ; on pourrait aussi avoir des élèves qui décident de donner un exemple de telle fonction, ce qui conduirait à un schéma mais pas de travail mathématique sur la propriété. Comme rappelé au chapitre 2, dans le milieu de référence, le but n'est pas d'accomplir la tâche, mais de la déterminer.

De plus dans ce cas on se trouverait devant un problème de validation : un graphique étant majoré, si un élève dessine une RGC qui « s'arrête » à une valeur au bord du dessin ou à un carreau, comment justifier que f est ou n'est pas majorée ?

Figure 5.3

Par exemple la fonction g ci-contre est-elle majorée ?



Les variables « intervalles » et « f majorée ou non majorée » sont à croiser pour obtenir des fonctions diverses, et non encore connues des élèves.

Tableau 5.2 - Variables :

VF	fonctions quelconques
VL	x variable intervalles ou réunion d'intervalles ouverts, fermés, bornés, non bornés.
VC	tracer des RGC sous contraintes de propriétés globales *Variable contrainte relative aux intervalles :* intervalle borné, puis intervalle non borné, f majorée ; puis intervalle ouvert borné, f non majorée. On fixe successivement les valeurs de ces variables de façon à engendrer des fonctions différentes (« oscillantes », à asymptote parallèle à Ox ou Oy, à limite infinie à l'infini... - ces différentes catégories n'étant pas exclusives l'une de l'autre) ; voir ci-dessous l'étude schéma par schéma.
VA	Absente dans les fiches ; introduite par le professeur pour donner des exemples de fonctions connues lors des débats et validations.
VN-VQ	Absente
VT	Absente

Schéma par schéma, les attendus sont les suivants :
Schéma 6-7 : intervalle I non borné ; f bornée. Type de RGC attendu : fonction « oscillante » type sinusoide, ou fonction à asymptotes parallèles à Ox.
Schéma 6-8 : intervalle I non borné ; f non bornée. Type de RGC attendu : fonction polynôme, second ou troisième degré. Discussion prévisible sur le second degré (non borné signifiant non majoré ET non minoré).
Schéma 6-9 : intervalle I non borné ; f minorée mais non majorée. Type de RGC attendu : fonction polynôme, second degré.
Schéma 6-10 : intervalle I non borné ; f majorée mais non minorée. Type de RGC attendu : fonction polynôme, second degré, coefficient de x^2 négatif (symétrique de la RGC précédente par rapport à Ox).
Schéma 6-11 : réunion de deux intervalles, dont un est borné et l'autre non ; f majorée et non minorée sur l'intervalle non borné **R+** ; f est majorée sur]-1,0[, mais pas minorée. Type de RGC attendu : courbe ayant une branche parabolique sur R+, et une asymptote parallèle à Oy sur]-1,0[(d'autres types de courbes sont possibles, mais peu probables à ce niveau). Type de discussion attendue : comment construire une RGC de fonction non minorée ou majorée sur un intervalle borné.
Schémas 6-12 à 6-14 : pas de changement des variables didactiques. Les élèves sont invités à réinvestir dans des cas variés les mêmes connaissances. On peut tout au plus s'attendre à des courbes plus « fantaisistes », par exemple ayant une forme analogue à celle de x + sinx au

lieu d'une branche parabolique ; mais aucune variable didactique ne contraint l'obtention d'une telle variante, donc elle peut parfaitement ne pas se produire.
Schémas 6-13 à 6-18 : intervalle **R** ; f est bornée par des majorants / minorants précisés, sur un intervalle borné, ou sur **R** . Type de RGC attendue : courbe ayant une branche parabolique sur **R** ou **R+** ou **R-** ; ou courbe à asymptote parallèle à Ox. Pas de nouvelle courbe imposée par les variables, là encore il s'agit de réinvestissement. Cependant là aussi, les élèves ne le savent pas à l'avance, ces schémas jouent donc un rôle de réinvestissement, mais plus encore, ils servent aux élèves à construire des connaissances sur *ce qui, dans les conditions données, fait que des fonctions sont différentes*.

III. 1.4 Déroulement prévu

Le déroulement prévoit que les élèves auront recours à des fonctions connues pour répondre aux spécifications des schémas ; et que dans certains cas, les fonctions connues ne leur permettront pas de répondre. Ils devront alors tenter, à partir des fonctions qu'ils connaissent, de trouver des RGC conformes aux contraintes ; ceci leur impose de pouvoir justifier *pourquoi* la RGC ou la fonction est bien conforme, c'est-à-dire que cela conduit à des questions sur la nature de la contrainte, et sur le comportement des fonctions : « Existe-t-il des fonctions qui... ? (ont une asymtote parallèle à Ox / Oy, qui ont un maximum sur un intervalle et ne sont pas bornées sur un autre intervalle, etc...).

III. 2 DEROULEMENT EFFECTIF ET CONNAISSANCES DES ELEVES

III. 2.1 Déroulement de la séance du 13/11/96 (deuxième heure)

La première leçon a occupé la deuxième heure du cours du 13/11/96 ; ce qui était prévu au départ, c'est que les élèves auraient seulement à remplir les cadres graphiques par des RGC appropriées ; mais la difficulté de certaines contraintes, qui empêchait les élèves de donner une réponse empirique en se basant uniquement sur le graphique, a transformé cette séance en un débat *sur les contraintes*. L'analyse a priori du milieu était insuffisante : **le milieu graphique ne permet pas de répondre à certaines questions**, sauf à produire un exemple. Cet exemple peut être produit si les élèves sont déjà en possession de fonctions « de référence » ; mais le milieu ne permet pas, de par ses seules propriétés, la production de fonctions répondant à la consigne. Dans ce cas il est nécessaire de se placer explicitement dans un milieu formel, pour obtenir une définition qui pourra aussi fonctionner comme une règle d'obtention.

Le déroulement de cette leçon dans la classe a donc été marqué par la reprise des définitions de majorant et maximum ; en effet les schémas 6-7 à 6-10 peuvent être complétés par des fonctions du type « fonctions de référence », vues en Seconde par les élèves. Mais dès le schéma 6-11, les élèves disent ne pas comprendre la définition d'un majorant et pourquoi elle est différente de celle d'un maximum.

L'idée est énoncée que tout majorant est un maximum. Un élève contredit cette affirmation ; une phase de débat est amorcée.
<u>1ère idée</u> : tout majorant est un maximum ;
<u>2ème intervention</u> : non, un majorant peut être plus grand qu'un maximum ; la classe s'accorde sur cette possibilité (cf annexe III, n°98) ; mais un maximum est le meilleur majorant ;
<u>3ème question</u> : une fonction qui a un majorant a forcément un maximum, et là la classe est divisée ;

4ème formulation : la question précise est posée par un élève, "existe-t-il des fonctions qui ont un majorant sur un intervalle mais pas de maximum?"

D'autres difficultés apparaissent au sujet de ce qu'est une fonction bornée : au n°113 de la transcription, le professeur propose la fonction cosinus ; un élève dit que c'est une sinusoide, donc elle n'est pas bornée. Il est clair que dans cet échange, le professeur parle de la notion mathématique de majorant / minorant, alors que l'élève, lui, parle sans doute de « non borné » au sens du langage naturel, la courbe ne s'arrête pas, elle continue à l'infini ; ou bien il veut dire qu'elle n'est pas bornée sur l'axe des abscisses.

Il se peut en effet que le graphique soit ici à la source d'une difficulté, déjà remarquée dans le cas des tableaux de variations au chapitre 4 : le registre graphique met x et y sur le même plan, à une rotation près. Il ne met pas en évidence ce qui est la variable et ce qui est la fonction, laquelle dépend de l'autre ; il y a une symétrisation des rôles de x et y. Il s'ensuit que l'énoncé des propriétés comme « fonction majorée, maximum » demande un contrôle autre que graphique ; ce contrôle, c'est de pouvoir discerner quand une affirmation porte sur des valeurs de la fonction, repérées sur Oy, et quand elle porte sur des valeurs de la variable, repérées sur Ox. C'est donc un contrôle qui suppose de considérer la fonction comme objet, opérant sur des valeurs identifiées comme valeurs de la variable, et donnant des valeurs qui sont cette fois-ci des valeurs de la fonction (variable commande et variable commandée pour reprendre l'image de la situation fondamentale). Comme pour les tableaux de variations, ce contrôle se construit sous forme de connaissances et ne fait pas partie des savoirs mathématiques, mais cela peut circuler dans la classe sous forme de connaissances publiques.

On s'aperçoit à la lecture de la transcription de la séance du 13/11/96 qu'une grande partie du travail de la deuxième heure est consacrée à la clarification des notions de majorant, minorant, maximum... et que le professeur fait intervenir successivement plusieurs fonctions afin que les élèves se saisissent de ces notions. Le travail sur la fiche est en fait laissé de côté, il sera repris plus tard ; il y a là un travail d'approfondissement qui n'est pas pris en charge par la situation, et que le professeur est donc obligé de prendre à son compte. Il fait des apports (essentiellement de fonctions *sous forme algébrique*) dans le milieu afin que les notions en jeu puissent être discutées, travaillées, validées. Il y a donc une introduction de la variable VA pour aider à la validation. Le travail fait se déplace et porte alors sur la définition des contraintes et non plus seulement sur la réussite à la consigne, de tracer des RGC vérifiant les propriétés indiquées.

III. 2.2 Connaissances travaillées

Les connaissances qui sont travaillées sont des connaissances aussi bien locales que globales sur les fonctions.

a) Connaissances locales

1. un majorant sur un intervalle n'est pas forcément majorant sur un intervalle plus grand ;

2. prouver qu'une fonction est minorée / majorée c'est lui trouver un minorant / majorant (Facila au n°160 : Prouver que f est minorée c'est prouver qu'il y a un minorant ?).

On peut s'étonner du point 2 : mais dans le contrat classique c'est le professeur qui donne le majorant, et l'élève n'a pas à prendre en charge cette partie du travail ; la formulation qui est faite en classe prouve bien que c'est pourtant ce travail de recherche de majorant qui fait accéder au sens de cette propriété. En effet c'est cette formulation qui est une connaissance utile, donc un savoir : une réponse générale, universelle à la question « Comment faire pour prouver qu'une fonction est majorée ? » . Alors que l'élève qui ne s'est pas posé cette question et n'y a pas apporté cette réponse, ne voit dans chaque exercice que des cas d'espèce, où le professeur a sorti le majorant de nulle part comme un lapin d'un chapeau[73] .

b) Connaissances globales

3. comment définir une fonction non bornée (à cette séance cela reste sous forme de question) ; y a-t-il une différence entre fonction non bornée sur un intervalle borné et fonction non bornée sur un intervalle non borné ;

4. un maximum, s'il en existe un, est le meilleur majorant sur l'intervalle considéré ;

5. il y a des fonctions qui ont un minorant, c'est le meilleur minorant, mais il n'est pas un minimum car on ne peut pas trouver de valeur de x tel que f(x) est égal à ce minorant.

Le point 5 est en fait une expression de la propriété de borne inférieure d'un intervalle ouvert. Cependant les propriétés de la topologie de **R** ne sont pas enseignées en classe de Première, et donc le professeur est dans l'impossibilité de souligner ce point.

Ce sont ces questions sur les contraintes qui amènent la deuxième leçon, où ces questions sont prises en charge et débattues.

A ce stade il est possible de faire la remarque que le milieu graphique ne permet pas de résoudre certains des problèmes qu'il permet de poser ; faute d'une analyse a priori plus rigoureuse sur ce point, le professeur anticipe un enseignement par ostension. Celui-ci a des chances de réussir si les connaissances des élèves sont effectivement en adéquation avec la production de RGC de fonctions de référence, ou dérivées de celles-ci, et répondant à la question posée. Faute de quoi, le professeur ne pourra tenir l'enseignement prévu. C'est déjà ce que nous avions remarqué au début de ce paragraphe.

III.3 DEUXIEME LEÇON : DEROULEMENT EFFECTIF ET CONNAISSANCES

III. 3.1 Définition d'une fonction non bornée

La deuxième leçon a lieu le 20/11/96, après une séance d'exercices non enregistrée où le problème de la différence entre fonction majorée et fonction qui admet un maximum a été reposé, de même que la question : « Quelle est la définition d'une fonction non majorée ? ». Cette leçon n'était en fait pas prévue, c'est une séance de débat portant sur la possibilité de trouver une fonction non majorée sur l'intervalle]-2,0[. Le cours du 19/11 a vu l'échange suivant :

Bastien : mais elle coupe forcément cette droite, là, en -2.
Fabien : ah non, c'est pas possible, sinon elle est bornée.
Bastien : mais on a dit... elle peut pas être verticale!
Fabien : la courbe, non! mais elle se rapproche de plus en plus...
Prisca : ça existe, des fonctions qui se rapprochent... pas verticales
P : c'est toujours le même critère, pour savoir, hein, le chemin... ça marche?
Les élèves font quelques essais pour se convaincre. La question n'est pas close, elle est reportée à la séance suivante.

Cette leçon a été étudiée au chapitre 2, dans la perspective de l'étude du milieu du professeur. Sans reprendre intégralement ce qui a été dit à cette occasion, remarquons que :

— les fiches demandent de tracer un exemple de RGC vérifiant la condition (f non majorée sur]-2,0[ ) ; le contrat pourrait être un contrat d'ostension empirique, ce qui correspond peut-être aux attentes du professeur ; ***le milieu graphique, ici, ne permet pas de répondre en dehors de ce type de contrat***. C'est ce qui explique sans doute que la

[73] Lapin qui pourrait bien être un canard ainsi que le dit B.Sarrazy.

transcription fasse apparaître plusieurs ruptures de contrat, et des allers-retours entre milieux numérique, formel, graphique.

— ce contrat d'ostension ne peut s'établir faute de connaissances des élèves sur des fonctions ayant une asymptote parallèle à l'axe Oy ;

— les élèves avaient déjà demandé des savoirs quant aux majorants et maximums ; là encore, ils font une demande de savoirs sur la *définition* d'une fonction non majorée sur un intervalle borné. Ce savoir ne peut s'exprimer que dans un milieu d'ostensifs formels.

Le professeur doit donc mettre dans le débat des suites possibles de quantificateurs, c'est-à-dire les formulations symboliques qu'on peut envisager pour définir une fonction non majorée. Le milieu comprend les connaissances sur les quantificateurs, des graphiques (sans quadrillage, c'est-à-dire sans recours au numérique) pouvant aider à la recherche empirique ; il ne comprend pas de fonctions sous forme algébriques, ni de fonctions de référence, même sous forme iconique. Le travail se porte donc essentiellement, dans la première partie de la séance, sur des formulations symboliques.

Dans la deuxième partie, il s'agit d'éprouver le critère trouvé ; le travail est d'une part algébrique (suite d'inégalités à traiter), d'autre part relatif au choix du majorant (travail numérique) et en dernier lieu porte sur les images réciproques d'intervalles (trouver un x dans $f^{-1}(]\ 1/\sqrt{M}\ , +\infty\ [\ )$ qui appartienne bien à l'intervalle de départ,]0,1]).

III. 3.2 Connaissances des élèves

Les connaissances (pertinentes ou non) mises dans la situation par les élèves concernent :

— les intervalles et les fonctions non bornées : mais le problème posé par le fait qu'une fonction non majorée est forcément une fonction qui n'est pas définie quelque part, n'est pas débattu. Nous avions dit que le professeur se réservait une possibilité de recours à l'ostension d'une RGC ayant une asymptote en x = -2, en déclarant que c'était « en -2 » que la fonction n'était pas majorée. On trouve les questions relatives aux intervalles lorsque le débat se porte, en début de séance, sur le fait que la courbe ne coupe pas la droite d'équation x = -2 ; mais le professeur ne pousse pas plus loin la discussion sur ce fait ;

— l'infini : f n'est pas majorée en -2 signifie $f(-2) = +\infty$;

— la négation du quantificateur existentiel (Christian au n°23) ;

— la vérification qu'une suite de symboles dit bien ce qui est prévu, à savoir que f n'est pas majorée ; cette vérification s'opère, nous l'avons dit, à la fois sur la fonction et sur le critère, la situation ne permettant pas de séparer les deux ;

— le choix d'un nombre supposé servir de majorant potentiel à nier ;

— les difficultés que l'on rencontre lorsqu'on cherche l'image réciproque d'un intervalle : condition suffisante, condition nécessaire.

Un point n'est pas traité par le professeur, c'est le fait qu'avoir pris 0,2 comme valeur de M permet de conclure rapidement, puisque pour tout x de]0,1] on sait que $f(x) \geq 1$ donc $f(x) > 0{,}2$; mais cela ne donne pas de renseignement supplémentaire sur le fonction. Autrement dit, contrairement à ce que disent les élèves lorsqu'ils proposent des valeurs de M, tous les choix ne se valent pas, du moins du point de vue de l'heuristique. En effet si l'on veut démontrer qu'une fonction n'est pas majorée, le fait de savoir qu'elle est minorée sur tout l'intervalle que l'on considère n'apprend rien ; par contre, prouver qu'elle peut dépasser un nombre donné, sous certaines conditions, est plus intéressant ne serait-ce que parce que cela donne le schéma de la démonstration (même si évidemment 10^{98} et 0,2 jouent a priori le même rôle, et si le fait de prouver que f dépasse 10^{98} ne prouve *pas plus,* du point de vue du résultat à obtenir, que d'avancer que f dépasse 0,2).

Le professeur ne peut pas traiter de ce type de connaissance car le savoir, ici, est attaché à la démonstration formelle, et non aux exemples numériques : c'est uniquement le cas « général » M qui prouve quelque chose, les autres n'étant là que comme des préalables jouant le rôle d'exemples convaincants, ou d'expérience décisive ainsi que le dit N.Balacheff et comme nous le retrouverons pour les limites [74]. Cependant le professeur insiste peu sur le fait que seul le cas général et la démonstration faite dans ce cas prouvent ce qui était avancé, à savoir que f n'était pas majorée sur]0,1] . La raison en est sans doute que, comme nous l'avons déjà signalé, il se sent très à la marge du programme d'une Première même scientifique.

Cette leçon clôt la deuxième situation sans que probablement, les connaissances sur les propriétés des fonctions aient été exploitées autant qu'elles l'auraient pu, ceci pour les raisons énoncées plus haut.

[74] cf. chapitre 6.

IV. TROISIEME SITUATION DIDACTIQUE: OPERATIONS ALGEBRIQUES SUR LES FONCTIONS

IV. 1 SOMME ET PRODUIT DE FONCTIONS : ANALYSE A PRIORI

IV. 1.1 Objectifs

1. obtenir de nouvelles fonctions par des opérations algébriques sur des fonctions (RGC) déjà tracées, en s'aidant de règles numériques qui font partie des connaissances antérieures ;
2. travailler sur les fonctions comme objets en interprétant de façon globale la RGC obtenue ;
3. établir des règles (théorèmes) relatives à la somme pour certaines fonctions identifiées (constantes, affines…)
4. introduire un travail entre les registres graphique et algébrique, où le registre algébrique aide à la validation.

IV. 1.2 Organisation matérielle et consigne

Les élèves travaillent toujours sur les fiches ; la classe est disposée en groupes, et il y a des phases de bilans collectifs, débats et institutionnalisation des résultats que la situation permet de prouver.

Les élèves travaillent également chez eux les fiches sommes et produits, et lors des phases en classe, ils disposent d'un rétroprojecteur et de transparents où ils dessinent les RGC demandées. Des reproductions de ces transparents figurent dans l'annexe V.

IV. 1.3 Choix des variables didactiques

Dans cette situation, il y a intérêt à introduire la variable numérique : c'est elle qui permet de construire les courbes points par points, et aussi d'anticiper sur le résultat en utilisant des connaissances numériques. Cette variable étant commandée par le quadrillage, il est réintroduit. Il y a d'ailleurs intérêt à le réintroduire dans les graphiques de la fiche 7 de l'annexe IV, où il n'apparaît pas toujours ; en effet les élèves, à ce stade, n'arrivent pas à anticiper sans le secours du numérique, même lorsque ce serait possible. De plus la nécessité de construire des RGC en se servant des propriétés des nombres est l'occasion, pour les élèves, de voir fonctionner ces connaissances numériques dans une situation où elles servent d'outil, et pour certains, de les questionner et d'en (re)découvrir la fonctionnalité.

La variable algébrique est nécessaire dans cette situation si l'on veut engager les élèves dans une activité d'anticipation et de preuve sur la nature du résultat (la fonction) trouvé. De plus, comme pour le numérique, les élèves ont l'occasion d'utiliser et de questionner leurs connaissances algébriques en liaison avec la nature de la fonction trouvée / à trouver. Le déroulement effectif prouve que c'est un point délicat du travail, conformément aux prévisions (les travaux de Duval par exemple ayant montré que le passage d'un registre à un autre était difficile - cf. Duval 1994 ; et les travaux sur l'algèbre font état des difficultés quant à la signification des écritures algébriques, nous en avons parlé au chapitre 4).

La nature des fonctions qui figure sur les fiches est fixée également de façon différente de ce qui était choisi dans les situations précédentes : si, dans une première phase, il est souhaitable que les élèves puissent effectuer des sommes et produits sur des RGC de fonctions quelconques, dans un deuxième temps il faut favoriser, comme dit ci-dessus, l'anticipation sur des fonctions connues, en liaison avec les connaissances algébriques et numériques. Donc les fonctions seront des fonctions constantes, affines, polynômes de degré 2 (qui ont été étudiés d'un point de vue algébrique). On peut aussi combiner des fonctions constantes ou affines et des fonctions quelconques, pour montrer la validité de certains théorèmes et faire le lien avec les transformations géométriques.

Par contre, contrairement à la situation sur les propriétés des fonctions, il n'est nul besoin de compliquer les intervalles, donc le travail se fera sur UN intervalle, en général **R** tout entier (du moins la restriction que le graphique permet d'en voir).

Dans le tableau ci-dessous figure en gras ce qui a changé dans le choix des variables par rapport à la situation précédente.

Tableau 5.3 - Variables

VF	fonctions quelconques ; **fonctions affines, polynômes de degré 2**.
VL	x variable **intervalles « simples** »
VC	tracer la RGC d'une somme ou un produit de deux fonctions dont on a la RGC
VA	**Présente** chaque fois que les fonctions sont identifiables algébriquement.
VN-VQ	**Présente**
VT	**Présente** (translations, affinités)

IV. 1.4 Déroulement prévu

Les choix faits pour les variables didactiques doivent inciter les élèves à utiliser dans un premier temps leurs connaissances numériques. Cependant, à notre avis le lien entre ces connaissances et le résultat de la somme ou du produit de deux RGC n'a rien d'immédiat, tout particulièrement dans le cas du produit (nombreux cas à prendre en compte : x peut être positif ou négatif, de valeur absolue plus petite ou plus grande que 1…). Pour cette raison, la fiche 9 prévoit une série de questions sur les points d'intersections avec l'axe Ox des courbes facteurs et de la courbe produit, et sur les signes respectifs des courbes facteurs et de la courbe produit. Il est raisonnable d'envisager une phase d'institutionnalisation relative aux propriétés ainsi dégagées.

L'anticipation de la RGC à obtenir risque, surtout dans le cas du produit, de conduire à des théorèmes - élèves comme par exemple : « le produit de deux segments est un segment ». Le rôle du registre numérique est de permettre d'invalider ce type de théorème (il suffit de construire trois points dont on connaît les coordonnées pour constater que ces points ne sont pas alignés). Le rôle du registre algébrique est alors de valider ce qu'est le « produit de deux droites » (segments sur le graphique) et éventuellement d'aller plus loin, en déterminant par exemple l'abscisse du sommet de la parabole en fonction des abscisses des points d'intersection des droites avec l'axe Ox.

La somme conduit certainement à moins de difficultés, mais est aussi moins riche en connaissances à exploiter, ceci pour trois raisons au moins :

— d'un point de vue numérique, les élèves maîtrisent mieux les sommes que les produits ;

— la somme de deux ordonnées est directement visible et constructible sur le graphique, ce qui n'est pas le cas du produit ;

— la somme ne conduit pas à une rupture dans la nature des fonctions (la « somme de deux segments » est bien un segment).

On peut donc s'attendre à ce que les questions sur la nature de la courbe somme restent implicites, les élèves n'ayant pas besoin de se les poser pour réussir le tracé. Par contre il n'en sera pas de même lors du tracé du produit, où comme dit plus haut les conceptions spontanées vont entrer en conflit avec l'aspect du tracé, même sur trois points.

Du point de vue du professeur, son rôle dépendra de ce que les élèves réussiront ou non à faire, et des questions qui émergeront. Il paraît préférable que le professeur n'intervienne qu'à la demande des élèves lors des constructions des RGC sommes, afin de ne pas provoquer une institutionnalisation prématurée des moyens de validation de la nature de la fonction somme ; sachant que cette question va forcément se reposer lors de l'étude du produit, où elle fera sens par confrontation au milieu. Par contre le professeur peut institutionnaliser ce qui aura été trouvé sur les transformations comme façon d'obtenir la somme de deux RGC lorsque l'une des fonctions est constante.

IV. 2 DEROULEMENT EFFECTIF

Toutes les séances n'ayant pas été prises en vidéo et / ou transcrites, pour des raisons matérielles, nous ne disposons que de notes et de productions d'élèves (notamment les transparents faits par eux).

IV. 2.1 La fonction somme

Dans la transcription (annexe IV) la fin de la séance du 13/11/96 concerne la somme de deux fonctions (n° 167 à 186). Ce qui ressort de ces échanges, est la règle à appliquer lorsqu'une des fonctions est constante (on applique à l'autre courbe une translation de vecteur colinéaire à **j**). Comme prévu les questions sur la nature de la courbe somme n'émergent pas.

La fiche a été ensuite travaillée par les élèves chez eux ; elle est reprise en classe, les élèves faisant des courbes sommes sur transparents. A ce moment la seule propriété énoncée est celle de la translation.

a) Anticipation sur la nature de la fonction trouvée

Les élèves ont aussi commencé à regarder chez eux la fiche sur les produits ; le produit est le travail déterminant qui fait que les questions sur la nature de la fonction obtenue peuvent émerger. Ces questions se trouvent du même coup reposées pour la fonction somme, comme l'indiquent les notes prises et reproduites ci-dessous :

« Suite de la séance : les élèves ont préparé des fiches de sommes et produits de fonctions (voir annexe IV). Le professeur corrige les sommes :

01 P : si on ajoute à f une fonction constante, ça revient à faire une translation... c'est ce que vous avez fait... on obtient une courbe parallèle...

Pour la parabole et y = x (schéma 7-11), construction de trois points sur un transparent par un élève, puis jonction par une courbe. Il y a donc prise en compte du passage information partielle à courbe continue.

Pour les produits, les élèves ont rempli les premières fiches sans éprouver le besoin de justifier leurs résultats (dans les premiers cadres les fonctions sont constantes).

02 P :1) quand les fonctions sont constantes… *(Le professeur parle des sommes)*

03 E : qu'est-ce que c'est une fonction constante?

04 P : ah! (le P fait dire pour tout x de a,b , f(x) = C) ça se traduit par..?

05 E : droite parallèle à l'un des axes, l'axe des abscisses : le graphique est un segment parallèle à Ox

06 P : oui, alors la somme de deux fonctions constantes ...

07 E : est constante

08 P : et 2) si f est constante, g est affine? de quoi est-on sûr?

09 E : un segment

10 P : on aura toujours un segment? f = C, et g...

11 Fabien : ax + b ; f + g ... C + ax + b

12 P : c'est affine?
13 E : oui
14 P : ce qui a changé, c'est l'ordonnée à l'origine. Et fg ? C(ax + b) ... Cax + Cb
C'est affine?
(Sur certains dessins, ce n'est pas un segment)
15 P : 3) Et maintenant deux fonctions affines : la somme. *(Malgré une écriture de la somme de ax + b et cx + d, une partie de la classe a dessiné la somme de segments comme une courbe).*

Remarque de l'observateur : le rapport algébrique/graphique fonctionne-t-il du point de vue de la preuve? La preuve... »

Ce qu'on peut noter, c'est que l'anticipation est très faible sur le résultat à obtenir (nature de la fonction somme). De plus on se trouve confronté à l'un des caractères réducteurs du graphique : comment être sûrs que trois points sont alignés ? Faute d'anticipation les élèves construisent point par point la courbe somme, puis ils joignent les points, mais l'épaisseur du trait fait qu'ils n'identifient pas l'alignement comme étant assuré.

b) Effet de contrat

De plus s'ajoute certainement à ces caractéristiques du milieu graphique, un effet de contrat propre à la suite des situations mises en place : depuis le début des séances, on travaille sur des fonctions quelconques, on se garde bien de prendre des droites ou des courbes connues. Légitimement méfiants, certains élèves supposent donc a priori que les fonctions que l'on obtient ne sont pas forcément des fonctions affines, même si les fonctions de départ le sont. Ils ne pensent pas non plus spontanément à réintroduire le registre algébrique comme élément de preuve. Ce fait prouve d'ailleurs que ce registre ne se mobilise pas spontanément, même lorsque les élèves ont affaire à une droite ; ce qui, étant donné le temps passé au collège et en Seconde sur les équations de droites, interroge sur l'efficacité de l'enseignement dans ce domaine.

Or la séance sur les sommes a pour effet de réintroduire dans le champ du travail de la classe, les fonctions particulières vues en Seconde ; les conséquences de cette rupture de contrat vont se faire sentir dans le travail sur les produits.

IV. 2.2 La fonction produit

Le produit de deux fonctions constantes ne pose pas de difficultés aux élèves, qui raisonnent comme pour la somme. Le produit d'une fonction constante et d'une fonction affine n'est pas, pour tous les élèves, l'occasion d'une anticipation réussie : sur certains graphiques, ce n'est pas un segment. Le professeur fait alors faire le travail algébrique (cf. à l'échange n°14 ci-dessus). Cependant il est clair qu'il y a là une difficulté et que le registre algébrique est loin de jouer spontanément le rôle de registre servant à la validation. Il apparaît que pour certains élèves au moins, il y a peu de coordination entre ce qui peut être prouvé grâce au registre algébrique et ce qui peut être anticipé dans le milieu graphique.

Le produit de deux fonctions affines donne lieu à moins d'incertitude, car il est évident, en faisant le travail point par point, qu'au moins le résultat n'est pas une fonction affine ; ce qui, nous l'avons dit, met en défaut les théorèmes-élèves comme : « le produit de deux segments est un segment ». Ceci ne prouve évidemment pas que les élèves ont une idée de ce qu'est ce produit ; cette phase (somme et produit de fonctions affines) a tout au moins le mérite d'établir que la fonction à obtenir peut être ou non de même nature que les fonctions de départ, et que la validation n'est pas, a priori, possible dans le registre graphique : on peut par contre valider dans le registre algébrique.

Les notes succinctes prises à cette occasion font état d'une remarque du professeur :
« **P** : donc c'est une courbe, pas une droite ; faudra se caler sur les propriétés du produit *(le*

professeur veut dire : le produit numérique des ordonnées)... une solution, pour l'instant, faire point par point.
Remarque : plusieurs élèves se demandent si on peut continuer au delà des segments, certains se l'interdisent, les allures de courbes ne prennent pas en compte ce qui pourrait se produire après... (L'utilisation des prolongements... ça pourrait être intéressant?) »

Il y a manifestement trois niveaux d'action des élèves, qui ne sont pas coordonnés chez tous :

— l'idée dans la tête, traduite directement sur le graphique, sans référence aux valeurs des abscisses ;

— le travail point par point ;

— le travail algébrique.

Par manque de temps, et sans doute aussi à cause d'une analyse a priori insuffisante de la situation, le produit de deux fonctions n'a pas été exploité comme il l'aurait pu. Nous n'avions pas, au départ, perçu le rôle déterminant du produit (par rapport à la somme) dans la production de questions et d'anticipations sur le résultat. Nous pensons qu'une exploitation du travail sur les produits graphiques, conjointement avec le travail algébrique sur les expressions du second degré, serait une piste pour obtenir une interaction graphique / algébrique. Il serait possible par exemple de lier anticipation sur le graphique et connaissances algébriques, en demandant aux élèves de prévoir graphiquement la valeur de l'abscisse du sommet de la parabole ; ou d'expliquer pourquoi, en faisant le produit de deux fonctions affines, on n'obtient que des paraboles qui coupent l'axe des x et donc le discriminant de la fonction du second degré associée est positif (on pourrait par exemple demander « Comment choisir les fonctions facteurs pour obtenir la parabole d'équation $y = 3x^2 + 4x + 1$? ou $y = x^2 + x + 1$? ») ; ou de déterminer les conditions sur les droites « facteurs » pour que la parabole ait un maximum ou un minimum, et que l'ordonnée de ce maximum ou minimum soit positive ou négative…

De telles questions conduiraient à une interaction effective algébrique / graphique, qui installeraient le registre algébrique dans une position de système de preuve pour certaines questions graphiques. En effet demander les contraintes sur la fonction produit conduit à déterminer les conditions nécessaires sur les fonctions facteurs pour que le produit soit conforme aux spécifications, et oblige donc les élèves à prouver que ces conditions sont bien les bonnes. Ceci s'avère conforme à ce que dit D.Fregona du rapport effectif au savoir : il s'obtient par un rapport à des objets spécifiés, et non des objets « généraux ». Faute d'avoir fait cette analyse avant d'expérimenter la situation, il ne nous était possible d'obtenir que des constatations de propriétés, faites par les élèves sur les courbes fournies.

IV. 2.3 Connaissances des élèves

Les connaissances mises en jeu dans cette situation concernent :

— les nombres relatifs (somme et produit suivant signe et valeur absolue) ;

— le résultat global d'une opération sur les fonctions, suivant la nature des fonctions données au départ ;

— des méthodes pour produire de nouvelles fonctions, à partir de fonctions connues.

IV. 2.4 La courbe « quotient »

Il était au départ prévu de faire construire des courbes inverses (au sens de la multiplication) et des courbes quotient de deux courbes (voir fiche 10 bis de l'annexe IV). Ceci n'a pas été possible faute de temps. De plus, l'intérêt de cette dernière opération était d'essayer d'anticiper au voisinage d'un zéro de la courbe donnée au départ. Or à la période où étaient traitées les courbes somme et produit, les élèves ne diposaient pas encore de connaissances suffisantes sur les asymptotes pour que cette anticipation soit possible, avec des chances raisonnables de succès et avec un contrôle théorique envisageable.

l'étude de la « courbe quotient » aurait pu être renvoyée à une prériode ultérieure ; les contraintes du programme ne l'ont pas permis.

V. QUATRIEME SITUATION DIDACTIQUE: RECIPROQUES ET COMPOSEES DE FONCTIONS

V. 1 ANALYSE A PRIORI

V. 1.1 Objectifs

— travailler sur les fonctions comme objets ;

— enrichir les ostensifs formels dont dispose l'élève, afin d'augmenter ses capacités de preuve (le registre formel est, comme dit au chapitre 4, un registre efficace pour la validation des résultats généraux sur les fonctions) ;

— associer des ostensifs graphiques à des opérations formelles qui ne sont pas, d'habitude, visualisées de cette façon ; donc permettre d'associer une courbe à un symbole comme fog, quelles que soient les fonctions f et g ; et par là aussi :

— améliorer l'expertise graphique.

V. 1.2 Organisation matérielle et consignes

Les élèves disposent de fiches, et travaillent toujours en groupes. Rétroprojecteur et transparents des fiches sont prévus pour permettre les tracés et les débats collectifs sur les tracés.

Description des fiches (dues à P.Alson ; cf annexe IV)

Fiche n°11 : rappel des noms des trois chemins fondamentaux, chemin aller, chemin retour, chemin par la bissectrice ; exercices graphiques pour nommer des chemins.
Fiche n°12 : définition du chemin de la réciproque ; la courbe choisie n'est pas strictement croissante ou décroissante sur l'intervalle du graphique.
Fiche n°13 : tracés de fonctions réciproques ; conjecture sur la détermination globale de f^{-1} et validation (analytique) de cette conjecture : d'après la configuration du chemin de la réciproque, il suffit de trouver les formules analytiques de la symétrie par rapport à la bissectrice y = x. Cas de x^2.
Fiche n°14 : tracés de courbes réciproques dans des cas où f est bijective et dans des cas où elle ne l'est pas.
Fiche n°16 : identification de chemins plus complexes par exemple f(f(x)).
Fiche n°16 : le chemin de la composée de deux fonctions. transformation horizontale pour obtenir (x, g(f(x))) à partir du point de même ordonnée de g, soit (y, g(y)).
Fiche n°17 : composer des fonctions, par chemins ou globalement (passage de la composée points par points à une anticipation de la composée globale, quand c'est possible, avec l'aide du registre algébrique éventuellement). Ordre de la composition.
Fiche n°18 : composée de trois fonctions, exercices.

V. 1.3 Choix des variables didactiques

Les variables didactiques sont ici d'une part la nature des fonctions (bijections ou non par exemple pour la réciproque) et d'autre part la complexité des chemins demandés ou tracés. Le savoir sur les chemins n'est pertinent et efficace, donc identifiable comme savoir, que s'il s'applique dans des cas non triviaux, c'est-à-dire ici à des fonctions non "évidentes" (pas trop régulières, par exemple pas directement les fonctions de référence) et à des transformations ou compositions de courbes d'un certain degré de complexité : si l'une des courbes est « simple », par exemple une droite, les effets de la composition seront plus visibles sur une autre courbe « quelconque » ; et d'autre part ils seront interprétables d'une seule façon, ce qui n'est pas le cas si par exemple les deux fonctions sont affines. Dans un premier temps du moins, il vaut donc mieux se borner à des exemples facilement interprétables.

Tableau 5.4 - Variables

VF	fonctions quelconques
VL	x variable intervalles « simples »
VC	- tracer les chemins correspondant aux dénominations du graphique - nommer les points initiaux ou finals des chemins - tracer, quand c'est possible, la RGC de l'inverse d'une fonction dont on a la RGC - tracer la RGC d'une composée de deux fonctions dont on a la RGC
VA	Absente sauf pour étude de quelques cas particuliers, en particulier pour anticiper la courbe réciproque ou la courbe composée dans des cas simples
VN-VQ	Absente
VT	Présente pour interpréter les effets des composées lorsque les fonctions sont simples

V. 1.4 Déroulement prévu

La fiche 11 est une fiche de rappels sur les chemins ; les exercices doivent conduire à une plus grande aisance dans le maniement des noms de fonctions et de points. La fiche 12 demande de construire des chemins inverses dans le cas d'une fonction qui n'est pas strictement monotone ; donc le problème du choix de l'image réciproque se pose d'emblée. Dans cette fiche, une synthèse locale doit être faite sur la façon « experte » de repérer les chemins dès qu'ils sont un peu complexes : en notant au fur et à mesure les coordonnées des angles (les tournants) du chemin.

La fiche 13 permet d'énoncer des résultats sur la fonction f^{-1} , lorsqu'elle existe, et sur sa représentation graphique (symétrie de sa RGC par rapport à la RGC de f, dans la symétrie d'axe la première bissectrice). La fiche 14 est une fiche d'entraînement par rapport à cette propriété. La fiche 15 prépare la composée.

La fiche 16 indique la façon systématique de construire la RGC de fog point par point ; la fiche 17 pose la question de l'ordre de la composition. Enfin la fiche 18 est une fiche d'exercices de synthèse.

V. 2 DEROULEMENT EFFECTIF

V. 2.1 Les séances en classe

Le travail sur les graphiques est laissé en suspens après les séances de novembre, et repris le lundi 6 janvier 1997 ; deux séances sont consacrées entièrement à ce travail, le lundi 6/1/97 (2 H) et le mardi 7/1/97 (1 H). Cela peut paraître peu, mais :

— d'une part la plupart des élèves, habitués maintenant à ce travail graphique, sont très rapides ;

— d'autre part le programme de Première scientifique est lourd, et le professeur est pressé par les contraintes de l'institution.

Fiche 11 :

La fiche n°11 ne pose guère de difficultés aux élèves, sauf à quelques uns qui semblent découvrir que Cf signifie : la RGC de la fonction qui à x associe f(x).

Fiche 12 ;

La fiche 12 (le chemin de la réciproque) :

— les élèves construisent les points demandés, et d'autres ;

— certains élèves disent immédiatement que la RGC de f^{-1} est symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice ; puis dans un deuxième temps, ils se rendent compte qu'il y un problème pour certains points, ceux pour lesquels, après avoir « rappelé » la valeur x sur l'axe Oy grâce à la bissectrice, on trouve deux antécédents. Un élève (Fabien T.) déclare alors :

Fabien : ça ne marche vraiment bien que si la courbe est strictement croissante ou strictement décroissante.

Accord des autres élèves ; on convient de traiter les exemples de la fiche 13 et le professeur déclare qu'on regardera, sur l'exemple 4 de la fiche 13, ce qui se passe lorsque la fonction n'est strictement monotone.

Fiche 13 :

L'exemple 1 est vu sans problème, les élèves décident après quelques vérifications point par point d'appliquer la remarque faite dans la fiche 12 (symétrie de la RGC de f^{-1} par rapport à celle de f, l'axe étant la première bissectrice ; ce résultat sera démontré par le professeur analytiquement dans la suite du programme).

L'exemple 2 pose un problème d'intervalle ; f est définie sur [1,3] ; les élèves sont réticents à admettre que f^{-1} est aussi définie sur ce même intervalle, d'autant qu'ici f et sa réciproque sont confondues, et donc ils ont du mal à visualiser f^{-1}. Ceci prouve bien que le théorème, pourtant trouvé par les élèves, sur la symétrie des RGC de f et sa réciproque, lorsque celle-ci existe, n'est pas encore opérationnel dans des cas « limites », ici une fonction qui est sa propre réciproque. On peut aussi penser que l'exemple donné, à ce stade, n'est pas très heureux ; un meilleur choix de la variable didactique « nature de la fonction » serait sans doute de faire tracer d'abord des RGC de fonctions réciproques différentes de la fonction donnée, puis de poser une condition (contrainte) afin que les élèves soient amenés *par la situation* à construire une fonction égale à sa réciproque.

L'exemple 3 (dont on peut penser que la RGC est celle de la fonction exponentielle) donne lieu à des constatations qui surprennent : les chemins qui partent des abscisses négatives ne donnent pas de point, donc f^{-1} n'est pas définie si $x < 0$; et d'autre part, les chemins qui partent près de 0, avec $x > 0$, donnent les symétriques des points d'abscisse négative ; plus x est proche de zéro, plus le point $(x , f^{-1}(x))$ est le symétrique d'un point « éloigné » sur Ox, du côté des x négatifs. Ceci est interprété comme l'indice que f^{-1} aurait une branche qui « descend » vers les y négatifs lorsque x se rapproche de zéro, mais rien n'a été fait sur les limites dans cette classe, donc il est impossible d'aller plus loin.

L'exemple 4 est interprété comme étant la RGC de la fonction carré, à un coefficient multiplicatif près. Un élève propose de faire « comme si il y avait deux fonctions ». les élèves cherchent donc la réciproque de la fonction $f_1 :]-\infty, 0[\rightarrow R$ qui à x associe x^2, et la

réciproque de la fonction f_2 :] 0, + ∞ [→ R qui à x associe x^2. On obtient bien chaque fois une réciproque.
P : quelles sont les fonctions correspondantes ?
Es : $\sqrt{x}$ **P** : et l'autre ? **Es** : - $\sqrt{x}$

Synthèse : lorsqu'une fonction n'est pas strictement monotone, mais que son ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur lesquels elle est strictement monotone, on peut trouver, sur chacun de ces intervalles, une fonction réciproque de f restreinte à l'intervalle considéré.

Fiches 14 et 15 :

Se déroulent sans question notable. Pour l'exemple d'une fonction qui est sa propre réciproque, les élèves proposent x → 1/x . On peut remarquer qu'ils proposent une fonction sous forme algébrique et non graphique, alors même que la consigne la demandait sous forme de RGC. Dans la fiche 15, les élèves déclarent : « C'est comme un jeu de piste, on s'amuse comme des petits fous. » avec un rien d'ironie certes (à 17 ans on ne reconnaît pas sans réticence jouer comme un gamin, même sur des graphiques de mathématiques!), mais il est vrai que c'est pris comme un jeu et se passe dans une bonne humeur totale. Les élèves sont maintenant très à l'aise avec ce milieu, et certains nettement plus rapides que le professeur, ce qui signifie que l'expertise graphique est bien atteinte.

Fiches 16, 17 et 18 :

La définition graphique de la composée, la constatation graphique de la non commutativité... se déroulent sans heurts. Le lien est fait avec la non commutativité d'un point de vue algébrique (vue en Seconde sur des fonctions simples). Le schéma 5 de la fiche 17 est destiné à mettre sur la voie de ce que la fonction Id_R est l'élément neutre pour la composition des fonctions, mais il n'a été fait qu'individuellement par quelques élèves, et pas exploité faute de temps.

Il faut dire que le facteur temps devient primordial, ce qui fait que ces séances n'ont pas été observées ; d'ailleurs les élèves ont fait une partie du travail chez eux. La fiche n°18 est presqu'entièrement donnée à faire à la maison, et suscite les mêmes réactions que la 15 : jeu de piste.

Le principal problème rencontré à ce stade dans l'expérimentation est un problème institutionnel : ce travail, bien que permettant la confrontation des élèves à un milieu plus riche que celui qui est habituellement fourni pour l'étude des fonctions, et bien que suscitant des questions mathématiques importantes, est long par rapport au temps usuellement imparti à cette partie du programme de Première.

V. 2.2 Connaissances des élèves

— expertise graphique : grande habileté à tracer des chemins, en contrôlant le but (réciproque ou composée) ; anticipation très rapide pour une majorité d'élèves, leur permettant de faire des conjectures très sûres sur le résultat du travail graphique ;

— connaissances sur les fonctions : fonction réciproque, et conditions pour que celle-ci existe ; rapport entre le RGC de f et celle de sa réciproque ; composée de deux fonctions, non commutativité de la composition, composée d'une fonction et sa réciproque.

En conclusion, nous pouvons noter que les savoirs des élèves quant aux fonctions ont fait des progrès notables, et que ces savoirs ont été mis à l'épreuve d'un milieu permettant l'action ; que ces savoirs dépassent ceux qui sont usuellement introduits à ce niveau (notamment sur les propriétés liées à l'ordre, sur les sommes et produits, et sur la composition et les fonctions réciproques), et qu'à ces savoirs sont liées des connaissances utiles en particulier lors du passage dans l'enseignement supérieur, lorsque les fonctions considérées sont moins restreintes que dans l'enseignement secondaire.

VI. CONCLUSION

VI. 1 SUR LE DEROULEMENT

Bien que la reproductibilité des situations n'ait pu être testée, nous pouvons faire quelques remarques sur leur déroulement :

VI . 1.1 Points positifs :

— le milieu graphique a effectivement permis, après quelques tâtonnements, à la majorité des élèves de produire des fonctions, et des questions sur ces fonctions ; ainsi que ds questions sur les contraintes ou conditions affectées aux fonctions ;

— ces questions ont pu être formulées comme des connaissances ou même des demandes de savoir, de sorte que le professeur et les élèves s'autorisent la gestion de formulations et validations d'un niveau mathématique dépassant le programme de Première ;

— les résultats institutionnalisés concernent les propriétés des fonctions (propriétés liées à l'ordre) et les opérations sur les fonctions. Ces résultats sont relativement nombreux et mathématiquement intéressants, notamment pour la suite de l'étude des fonctions dans l'enseignement supérieur ;

— la dimension a-didactique de la situation nous paraît attestée par :

- l'importance de la production de questions par les élèves, et la pertinence mathématique de ces questions ;
- les interactions de connaissances professeur / élèves, qui ont à plusieurs reprises obligé celui-ci à mettre dans le débat des savoirs dépassant le niveau qu'il visait au départ, et des objets mathématiques supplémentaires, afin que les élèves puissent valider ou infirmer leurs conjectures.

VI. 1.2 Points négatifs :

— les insuffisances de l'analyse a priori n'ont pas permis de dégager suffisamment clairement l'intérêt de faire porter sur les produits le travail concernant les opérations sur les fonctions ; il s'ensuit que la situation n'a pas été exploitée au mieux dans ce sens ;

— le temps que requiert la mise en œuvre de cette situation dans une classe n'est qu'en partie compatible avec les exigences institutionnelles. La fin du travail s'en est ressentie (exploitation insuffisante, manque à contrôler véritablement les connaissances acquises par les élèves).

VI. 2 SUR LES OBJECTIFS DE LA SITUATION

VI. 2.1 Points positifs :

— les élèves se sont investis à chaque séance de façon importante, et ont produit de nombreuses questions, des graphiques, des exemples ;

— des connaissances de Seconde ont été remises en jeu, en particulier dans le travail sur les fiches 1 à 6, et réaménagées à la lumière des questions et savoirs présents dans la situation ;

— les institutionnalisations ont eu lieu à la demande des élèves, suite aux questions posées grâce à l'interaction avec le milieu, ce qui prouve l'efficacité de celui-ci ;

— ce travail a eu pour effet de munir les élèves d'outils de validation graphiques et formels, qui ont prouvé leur efficacité par la rapidité avec laquelle, à la fin du travail, les élèves étaient capables d'anticiper le résultat (la RGC) à obtenir. Ces connaissances sont des outils de validation utiles, tout particulièrement pour la suite du travail sur les fonctions à la fin de l'enseignement secondaire et au début de l'université, où les étudiants arrivent en général sans aucune notion sur le maniement des ostensifs formels et sur leur capacité à intervenir dans un processus de preuve.

VI. 2.2 Points négatifs :

— les fiches se sont révélées très opérationnelles dans le travail en classe, y compris pour permettre les débats et bilans collectifs ; par contre du point de vue de l'évaluation individuelle, il reste à inventer un support qui puisse permettre une évaluation qui tienne compte des connaissances acquises et soit suffisamment fiable ; une tentative a été faite au début du travail, d'intégrer une fiche graphique dans un devoir en classe, mais peut-être par défaut d'objectifs clairement fixés, cette fiche (annexe IV n°19) n'a pas apporté de renseignements notables sur les connaissances des élèves, si ce n'est qu'ils savaient presque tous, à ce stade, tracer des RGC et dire si un nombre était ou non majorant d'une RGC donnée : il y a eu très peu d'erreurs. Mais la fiche d'évaluation, telle qu'elle était conçue, ne permettait pas de dire si, pour répondre, l'élève avait bien utilisé les connaissances prévues (par exemple la définition des fonctions par les chemins) ou s'il avait répondu par imitation ou effet de contrat.

L'évaluation n'a sans doute pas non plus porté sur la partie la plus pertinente du travail ; cette première phase était une phase de mise en route et d'adaptation au milieu graphique. Les autres phases, où les connaissances graphiques devenaient plus opérationnelles, devraient se prêter mieux à une évaluation individuelle.

Il est clair que ce travail fait en classe ne se prête pas à une évaluation standard du type « devoir en temps limité » ; dernièrement, des groupes comme « Prospective bac » à l'APMEP ont proposé d'autres types d'évaluation, comme des travaux en groupes, avec rédaction de recherche. Cela constituerait peut-être une piste pour évaluer les connaissances acquises par les élèves lors de cette situation. Dans l'état actuel des documents relevés, ce sont les transcriptions, les observations et les graphiques d'élèves qui constituent la base de nos résultats.

L'évaluation individuelle des connaissances acquises par les élèves dans cette situation est donc un problème qui reste ouvert. La piste des sommes et produits est certainement, là encore, productive : ainsi les questions relatives aux conditions à déterminer sur les fonctions facteurs pour que la fonction à obtenir vérifie telle ou telle propriété, constitueraient une base intéressante pour construire cette évaluation, en obligeant les élèves à manifester les connaissances nécessaires pour répondre.

Une telle évaluation individuelle est à envisager pour deux raisons au moins :

— valider les résultats et vérifier la reproductibilité, en termes de connaissances acquises des élèves ;

— assurer la compatibilité de la situation avec l'institution « enseignement secondaire » : on sait bien la difficulté qu'il y a à introduire et à faire vivre dans les classes, un travail qui ne peut pas faire l'objet d'une évaluation relativement standardisée.

La classe expérimentale a fait l'objet, au mois de juin 1997, d'un test commun aux cinq classes de Première scientifiques du lycée Saint-John Perse. Les questions posées dans ce test concernaient les fonctions et les limites. Les résultats de ce test sont également des facteurs d'évaluation du travail fait dans cette classe sur les fonctions. L'étude de ces résultats figure au chapitre 7.

VI. 3 SUR LE SPA

Les élèves se sont confrontés à un milieu qui comportait bien des éléments du SPA : inégalités, variables quantifiées, intervalles, images d'intervalles et images réciproques d'intervalles. Ils ont émis des conjectures sur ces éléments ou à l'aide de ceux-ci ; ils ont validé ou infirmé ces conjectures en utilisant des quantificateurs, des propriétés de l'ensemble **R**… Nous pouvons donc considérer que de ce point de vue, la situation a atteint ses objectifs (modestes) : favoriser un premier contact avec les éléments du SPA et une première utilisation de ceux-ci ; et par là, enclencher une rupture avec le mode de validation algébrique qui jusqu'alors a constitué, dans ce domaine des fonctions, la seule approche connue des élèves.

CHAPITRE 6

CHAPITRE 6

LES LIMITES : LA SITUATION DU FLOCON DE VON KOCH

All for you
Diana Krall

I. ETUDE DE LA SITUATION GENERIQUE DU FLOCON DE VON KOCH

I.1 INTRODUCTION

I. 1.1 Les objectifs visés par la situation

Il s'agit de construire une situation pour l'enseignement de la notion de limite. Le travail mené au chapitre 3 a permis de dégager les caractéristiques de la situation fondamentale de cette notion, et du milieu des preuves de l'analyse. En se basant autant que possible sur ces éléments théoriques, il doit être envisageable de réaliser une situation en classe, qui permette aux élèves de faire des conjectures sur des limites, et de valider ces conjectures avec des outils de preuve issus du SPA. Le principal objectif de la situation est donc de mettre les élèves en contact avec le SPA, de façon à ce que l'introduction de la notion de limite se fasse de concert avec l'usage du système de preuve spécifique à l'analyse mathématique.

I. 1.2 La recherche d'une dimension a-didactique

Pour les raisons énoncées au chapitre 3, il paraît difficile d'imaginer que les élèves puissent construire les critères de preuve uniquement par confrontation avec le milieu. Il est plus que probable que le professeur sera obligé d'apporter, au moment choisi, dans le milieu de référence, les règles concernant la vérification de : "L est (ou n'est pas) une limite de la suite u_n ou la fonction f". Cependant il est souhaitable d'instaurer une interaction de connaissances professeur / élèves, donc une activité conjointe[75] qui permette aux élèves de mettre dans la situation leurs connaissances sur les nombres et les fonctions, afin de confronter ces connaissances au milieu et d'être en mesure de demander un apport de savoirs du professeur s'ils l'estiment nécessaire.

I. 1.3 Les objectifs de la recherche

La mise en œuvre, dans une classe de Première Scientifique, de la situation construite, répondait au souci d'en tester la validité empirique : faisabilité, compatibilité avec l'enseignement en amont et en aval, identification des connaissances et des savoirs acquis et mise à l'épreuve de la qualité de ces apprentissages. D'autre part, la situation étant axée sur la recherche de limites mais aussi la validation de ces limites, l'un des objectifs de la recherche est de déterminer si cette validation est bien possible et effective dans les conditions de la situation construite. Il nous importerait aussi de savoir si les élèves se saisissent des éléments de validation pour être capables de prouver ultérieurement, dans une autre situation, qu'un nombre L est bien limite d'une suite ou d'une fonction ; cependant, les conditions de l'expérimentation (dans une classe de Première scientifique, où le programme est loin d'être léger) n'ont pas permis de travailler l'enseignement de l'analyse suffisamment dans cette direction : le programme de Première prévoit surtout un apprentissage centré sur l'algèbre des limites.

I. 2 L'ORGANISATION GENERALE DE LA SITUATION ET SES VARIABLES DIDACTIQUES

Le but général du jeu est de déterminer la limite d'une fonction ou d'une suite, et d'engager la preuve de la limite avancée. Pour cela, il faut disposer d'un milieu "matériel" constructible par les élèves, ou accessible dans un environnement d'ostensifs qui leur soit familier ; d'un milieu objectif, issu du précédent, sur lequel faire des conjectures de limites ; d'un milieu de référence permettant de formuler et d'étayer ces conjectures, et d'un milieu propre à la validation, qui comprend nécessairement des éléments du SPA, voire, sous une forme ou sous une autre, la définition d'une limite.

Dans l'organisation de la situation, certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu'ils seront amenés à faire en rapport avec la notion de limite. Tel est le cas :

1. du choix entre fonction et suite ;
2. de la nature des fonctions ou des suites choisies : quelconques – de terme général connu – d'un type connu antérieurement des élèves ;
3. du milieu matériel sur lequel les élèves vont pouvoir engager des calculs et des conjectures ;
4. de la nature de la ou des limites pressenties ;
5. des moyens de vérification et de validation disponibles dans le milieu.

I. 2 1 Limite de fonction ou de suite

Le problème constituant la base de la situation est un problème de recherche de limite. A priori il est possible de choisir une limite de fonction ou une limite de suite. Cependant les limites de fonctions amènent à manipuler l'infini continu dans les deux ensembles de départ et d'arrivée ; par référence à la situation fondamentale rappelée au chapitre 3, il faut définir des

[75]Cf. chapitre 2.

applications allant de l'ensemble des voisinages de x_0 vers l'ensemble des voisinages de L, et de l'ensemble des voisinages de L vers l'ensemble des voisinages de x_0 , qui ont leur image dans un voisinage de L. Ceci dans le cas d'avoir à prouver que L est limite ; mais pour prouver qu'une limite pressentie ne convient pas, il faut envisager une application de l'ensemble des voisinages de x_0 dans P(F), et prouver qu'il existe un voisinage de L, tel que, quel que soit le voisinage de x_0 considéré, au moins un x de ce voisinage n'a pas son image dans ce voisinage de L. Il faut donc gérer des ensembles de voisinages du côté de x, et du côté des images et de L.

Or les voisinages dans **R** étant des ensembles contenant des intervalles ouverts, ce sont bien des conditions sur le continu qu'il faut gérer à chaque étape.

Pour les suites au contraire, la condition sur les éléments de l'ensemble de départ est une condition sur du discret dénombrable, au voisinage de l'infini, ce qui revient à gérer des conditions du type : pour tout n à partir de N, soit ($\forall n > N$). De plus, la limite d'une suite ne s'envisage qu'au voisinage de l'infini, alors que pour une fonction, il est possible de choisir une limite à l'infini ou en x_0 .

La justification qu'on peut donner, à ce niveau de l'enseignement, de la recherche d'une limite de fonction, est une justification graphique : savoir ce que devient la courbe au voisinage d'une valeur où f n'est pas définie, ou à l'infini. Mais les particularités du graphique, pointées au chapitre 4, font que cette justification est très sujette à caution : puisque justement le caractère réducteur du graphique ne permettra pas de représenter ce qu'on dit chercher pour lever cette indétermination de la RGC : quel est l'intérêt de chercher, pour préciser le graphique, une limite qui ne pourra se voir sur ce même graphique ?

Il est donc plus facile de justifier la recherche de la limite d'une *suite* dans la logique et la culture de la classe ; en effet les renseignements que l'on peut avoir sur les premiers termes de la suite ne nous disent rien sur ce qui se passe "à l'infini", autrement dit lorsque n continue à augmenter indéfiniment (idée de l'infini potentiel). De plus, comme dit au chapitre 3, cette recherche peut s'appuyer sur des paradigmes culturels et des supports visualisant la progression de n "vers l'infini".

I. 2.2 Supports culturels et matériels

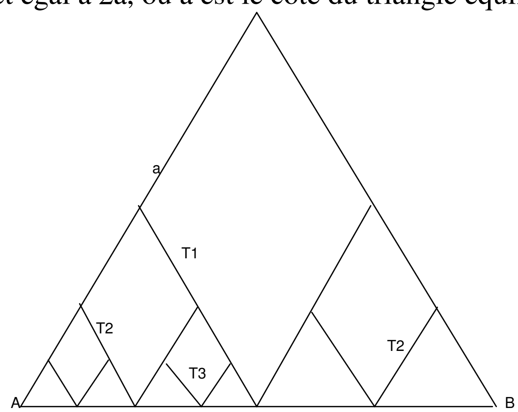
Ces supports peuvent être de type cinématique comme le paradoxe d'Achille et la tortue, qui illustre bien l'idée de l'infini potentiel, par un personnage qui continue à avancer et ne s'arrête jamais ; ou géométrique, comme les polygones inscrits dans un cercle, dont on double à chaque étape le nombre de côtés ; ou numériques, comme la recherche d'une solution d'une équation par encadrement et dichotomie, qui pourrait sembler être une bonne entrée dans l'analyse, car ce problème pose d'emblée la question de l'existence de la limite.

En effet d'après ce qui a été dit au chapitre 3, le travail sur les nombres est le plus adapté à la validation en analyse, car il permet d'introduire la représentation par un voisin, c'est-à-dire le fait qu'à partir d'un certain rang, le terme de la suite diffère de la limite de moins que ε , 10^{-p}, un nombre fixé à l'avance. Mais la résolution d'une équation par dichotomie pose d'entrée le problème de l'intersection d'une infinité d'intervalles emboîtés, problème dont les élèves n'ont à ce stade pas les moyens (les connaissances) de se saisir. D'autre part cet exemple présente un inconvénient majeur : la suite dont on s'occupe n'est pas explicitable, on ne sait pas exprimer son terme général en fonction de n, donc tout travail sur des ostensifs à la portée des élèves est rendu très difficile à organiser, en particulier l'utilisation du numérique explicite (calculs) est impossible, or le numérique :

— d'une part comporte des connaissances antérieures des élèves, sur lesquelles s'appuyer ;

— d'autre part permet d'introduire la représentation par un voisin.

L'approche géométrique a pour elle de donner des ostensifs à visualiser, c'est-à-dire de permettre la construction d'un milieu matériel dans un environnement familier aux élèves, et dans lequel ils peuvent réinvestir des connaissances. Mais les "limites géométriques" comme la suite de polygones dont le périmètre a pour limite le périmètre du cercle, ont l'inconvénient de pouvoir donner lieu à confusion entre la limite d'une grandeur attachée à la figure géométrique considérée, et ce que serait une limite de la suite de figures avec la topologie de $\mathbf{R}^2$; or on sait bien que ces deux limites peuvent ne pas marcher de concert, et que les représentations géométriques des limites sont dangereuses à cause de ces hiatus. Un exemple classique est celui des triangles qui tendent vers la base du plus grand d'entre eux, alors que le périmètre de la figure ainsi formée à chaque étape ne tend pas vers la longueur de ce même diamètre, car il est constant et égal à 2a, où a est le côté du triangle équilatéral de départ.



La raison pour laquelle la longueur de la figure T_n formée par les côtés des triangles situés au-dessus de la base, n'a pas pour limite la longueur de la base, est due au fait que même si on peut "coincer" la figure à l'ordre n dans une bande de largeur ε au-dessus de la base, la figure oscille de plus en plus dans cette bande. Mathématiquement, pour que la longueur de la courbe T_n tende vers la longueur de la courbe limite, à savoir la base du triangle de départ, il faudrait que la dérivée de la fonction associée à T_n (si l'on prend un repère où l'axe des x ait le même support que le segment base [AB] du triangle, et l'on définit une fonction u_n dont la RGC dans ce repère est la courbe T_n) ait pour limite la dérivée de la fonction associée au côté base, c'est-à-dire zéro. En effet la longueur se calcule en intégrant $1 + (u'(t))^2$, où t est un paramètre de la courbe, et u la fonction, laquelle est dérivable sauf sur un ensemble dénombrable ; or u', en tout point de T_n où elle existe, est égale au coefficient directeur des segments, c'est-à-dire soit $\sqrt{3}$ soit - $\sqrt{3}$. Elle ne peut donc pas avoir pour limite zéro.

Si l'on analyse l'exemple cité ci-dessus, et l'exemple de la suite des polygones inscrits dans un cercle, on s'aperçoit que l'idée implicite que si T_n a pour limite le segment [AB] , alors la longueur de T_n a pour limite la longueur a = AB, peut venir aussi de ce que la "figure limite" est visible, et donc que l'élève peut identifier la figure limite (au sens de la topologie du plan) et la limite de la grandeur, attachée à cette figure, considérée ; et ceci sans avoir les moyens (les critères) de décider quand la limite de la grandeur est bien la grandeur de la "figure limite", et quand c'est faux.

Par conséquent si l'on veut pouvoir utiliser les connaissances attachées au domaine numérique, et l'avantage, du point de vue de l'ostension, que représente le fait de pouvoir s'appuyer sur une figure, il faut éviter que la "figure limite", au sens des points du plan, soit visualisable, afin que la confusion analysée ci-dessus ne puisse s'installer.

En récapitulant les conditions auxquelles la problématique de départ doit être soumise si l'on veut obtenir l'apprentissage souhaité, il vient :

- Le problème de départ est géométrique donc visualisable ;
- La "figure limite" n'est pas connue ni accessible facilement ;

- Le terme général de la suite peut s'exprimer en fonction de n, et si possible par une suite connue des élèves ou accessible à leurs connaissances ;
- La nature de la suite permet le travail numérique : conjectures sur la limite, et évaluation de ce que le terme u_n diffère de L de moins de ε .

Il existe des figures répondant à ces différentes spécifications, ce sont les fractales[76] : pour certains d'entre eux, les premières générations de figures sont constructibles facilement par les élèves : la courbe limite n'est pas facile à décrire ; on peut associer à la suite des générations de figures, un périmètre ou une aire qui est une suite dont l'expression du terme général n'est pas trop complexe ; ils ont des propriétés curieuses, qu'on ne peut déterminer que par passage à la limite (par exemple, aire finie et périmètre infini). Ce qui devra cependant rester implicite dans la situation, ce sont les raisons pour lesquelles on ne rencontre pas, dans le cas choisi, de paradoxe comme celui signalé ci-dessus : les élèves n'ont aucune raison de mettre en doute, à leur niveau, le fait que la limite du périmètre est bien le périmètre de la figure limite[77].

I. 2.3 Dialectique limite finie / limite infinie

Une approche empirique de limite par le calcul peut donner lieu à deux éventualités / conjectures : la limite est finie ou infinie (écartons pour l'instant la troisième alternative, d'une suite sans limite). Au niveau envisagé, les élèves n'ont aucune connaissance sur les limites de suites. Ils ne peuvent donc se référer à leur expérience pour décider si une suite "ressemble" plutôt à une suite divergeant vers l'infini, ou à une suite convergente. Il semble donc qu'il serait souhaitable de leur présenter les deux cas, afin qu'ils puissent construire des connaissances et des critères sur **ce qui fait que ces deux suites diffèrent**, et en quelque sorte se référer à l'une pour pouvoir affirmer que l'autre n'est pas de même nature. De cette façon la situation comporterait au moins une référence interne, pour permettre de décrire le comportement différent des deux suites.

Du point de vue de la dimension a-didactique, on peut prévoir que c'est là qu'un apport de connaissances du professeur sera nécessaire, pour :

— valider lors du débat sur la différence entre les deux suites ;

— introduire le vocabulaire pour parler de cette différence (ostensifs oraux de l'analyse);

— introduire les critères de validation permettant de prouver que les deux suites ont des limites qui ne sont pas de même nature.

Pour disposer de deux suites dont l'une converge, et l'autre diverge vers plus l'infini, il suffit de trouver un fractal d'aire finie et de périmètre infini : le **flocon de von Koch** vérifie cette propriété. De plus, de par son mode de construction, le périmètre et l'aire s'obtiennent comme des suites géométriques ou sommes de suites géométriques ; or les élèves ont étudié ces suites peu auparavant.

I. 2.4 Moyens d'exploration et de validation

a) Exploration

Les élèves doivent pouvoir explorer la ou les suites calculées, afin d'être en mesure de faire des conjectures sur les limites. A cette fin il semble utile de prévoir l'usage de la calculatrice, afin qu'ils aient une première approche numérique de la limite.

Ceci comporte deux aspects :

---

[76] Cf. IREM de Poitiers (1996) Les fractales, réflexions et travaux pour la classe.

[77] Voir en annexe la note sur F_n suite de Cauchy dans $K(R^2)$ muni de la distance de Hausdorf, et la référence sur lim périmètre(F_n) = périmètre de lim (F_n) cf. par exemple Kolmogorov et Fomine, éd de Moscou. Egalement dans annexe 1, figure un extrait de « Les géométries fractales » de Alain Le Méhauté, sur les courbes non rectifiables et le flocon de von Koch.

— ils doivent pouvoir réinvestir et sans doute aussi questionner leurs connaissances numériques ;

— il faudra gérer les effets de la calculatrice : les problèmes d'arrondi, éventuellement les problèmes de représentation graphique de la suite, car les élèves à ce niveau ont presque tous des calculatrices graphiques ; il faut donc prévoir aussi de faire le lien entre les propriétés numériques de la suite et la représentation graphique de la fonction associée.

b) Validation

Le milieu de référence doit comporter des outils de formulation et de validation des conjectures faites. La définition classique de la notion de limite paraît très abstraite et n'est d'ailleurs plus au programme ; sauf à faire une incursion du côté de l'analyse non standard, ce qui nécessiterait l'introduction d'une autre théorie, il est pourtant difficile de s'en passer. On peut néanmoins l'adapter en ne prenant comme voisinages de l'infini que les intervalles du type $]10^p , +\infty[$ et comme voisinages de zéro les intervalles $]-10^{-p}, +10^{-p}[$, ou $]0, 10^{-p}[$ si l'on n'a affaire qu'à des suites positives.

Ceci suppose que les élèves soient capables de gérer des inégalités du type $u_n > 10^p$, ou $u_n < 10^{-p}$, et d'en déduire une condition sur n. Faute d'éléments préexistants de la théorie dans les connaissances des élèves, il faut prévoir qu'ils aient à le faire « à la main ». Or ceci implique que les suites soient très simples.

Pour une suite arithmétique, il n'y a pas de difficulté ; mais les suites arithmétiques n'ont pas de limite finie. La suite la plus simple ayant une limite finie, envisageable à ce niveau, est une suite géométrique comme dit ci-dessus. Ceci suppose de savoir extraire une condition sur n d'une égalité comme $a^n > 10^p$; c'est-à-dire de savoir utiliser les propriétés de la fonction logarithme.

Il faut donc envisager un apprentissage minimum de la fonction logarithme. Ceci peut être fait lors de l'étude des suites géométriques, qui est au programme. Dans les manuels, on trouve des questions sur le doublement d'un capital, ou la valeur de n à partir de laquelle u_n vérifie une inégalité. Dans les classes où la situation a été expérimentée, il y a eu une demande d'apport de savoirs du professeur, concernant la façon mathématique de résoudre les équations données, comme $a^x = 10^p$. A ce niveau, les élèves n'ont aucune raison de penser qu'il existe des équations pour lesquelles on ne sait pas "tirer x". Ceci nécessite d'ailleurs une explication, car bien entendu on ne "tire x" que parce que la fonction logarithme a été construite « ad hoc ».

L'accès à la fonction logarithme peut être obtenu grâce à la calculatrice[78] : les élèves tracent sur l'écran de la calculatrice graphique la RGC de la fonction, et en déduisent qu'elle n'est pas définie si $x < 0$; que $\log 1 = 0$; que la fonction est croissante, donc si $0 < x < 1$, alors $\log x < 0$, et si $1 < x$, alors $\log x > 0$. La propriété fondamentale de la fonction logarithme : $\log xy = \log x + \log y$, est un apport du professeur ; les élèves en déduisent $\log x^p = p \log x$, et comme $\log 10 = 1$, $\log 10^p = p$.

Moyennant cette introduction, on se trouve avoir résolu les difficultés techniques relatives à la validation : en effet les critères de validation des suites géométriques de limite nulle, comme celles qui tendent vers l'infini, en deviennent accessibles par le calcul. Il devient

[78] Il faudrait étudier les inconvénients que peut présenter, à ce niveau, une telle introduction de la fonction log. Mais ils ne nous paraissent pas comparables à ceux que l'on peut observer lors de l'introduction de la fonction "racine carrée" en classe de Quatrième. En effet, au niveau de la Première scientifique, les élèves identifient bien que l'on introduit une *fonction*, et pas une notation ; ils ont les moyens (les connaissances) nécessaires pour faire entrer cette nouvelle fonction parmi celles qu'ils connaissent déjà, avec ses propriétés particulières. Ils ont aussi les ostensifs pour en parler et travailler *avec* cette nouvelle fonction (et les ostensifs nouveaux qui lui sont attachés). Les élèves de la classe expérimentale prouvent d'ailleurs, en utilisant la fonction logarithme pour la recherche de la limite de A_n , qu'ils contrôlent bien l'usage qu'ils en font (voir ci-dessous au III. 2).

possible de jouer sur les valeurs de p avec des critères du type donné ci-dessus, comme $u_n > 10^p$ ou $u_n < 10^{-p}$ .On peut donc organiser le jeu des élèves, l'un des joueurs donnant une valeur de p, et l'autre devant fournir la valeur de n à partir de laquelle u_n vérifie la condition demandée, ou bien prouver que ce n'est pas possible.

Il paraît raisonnable, pour une première approche, de s'en tenir à ces critères, et de ne pas essayer de généraliser avec la définition de Weierstrass. On peut penser que le jeu avec n et p suffit, dans un premier temps, à la construction de connaissances sur les limites.

I. 3 LE FLOCON DE VON KOCH

La situation expérimentée est donc celle du calcul de l'aire et du périmètre du flocon de von Koch, après construction des premières générations des figures F_n .

La construction est classique : la figure F_0 de départ est un triangle équilatéral ; on coupe chaque côté en trois segments de même longueur ; on supprime celui du milieu, que l'on remplace par deux côtés d'un triangle équilatéral construit sur le segment supprimé. Suivant le choix fait (flocon ou anti-flocon) les deux segments ajoutés le sont à l'extérieur ou à l'intérieur de la figure F_0 . Ici, comme l'on veut obtenir des aires croissantes, afin de disposer de deux suites croissantes pour lesquelles on sera obligés de trouver un critère de différenciation, on décide de construire le flocon. L'anti-flocon peut être gardé pour réfuter les arguments prévisibles du type : l'aire et le périmètre se comportent nécessairement de la même façon.

I. 3.1 Figures et calculs

Le point de départ est un triangle équilatéral de côté a (dans les figures demandées aux élèves, a = 18 cm).

a) Le périmètre du flocon

P_n est une suite géométrique de raison 4/3.

En effet, à chaque étape, on remplace chaque segment par quatre autres, de longueur égale au tiers du segment remplacé, donc : $P_n = \frac{4}{3} P_{n-1}$

On en déduit que : $\lim_{n \to +\infty} P_n = +\infty$

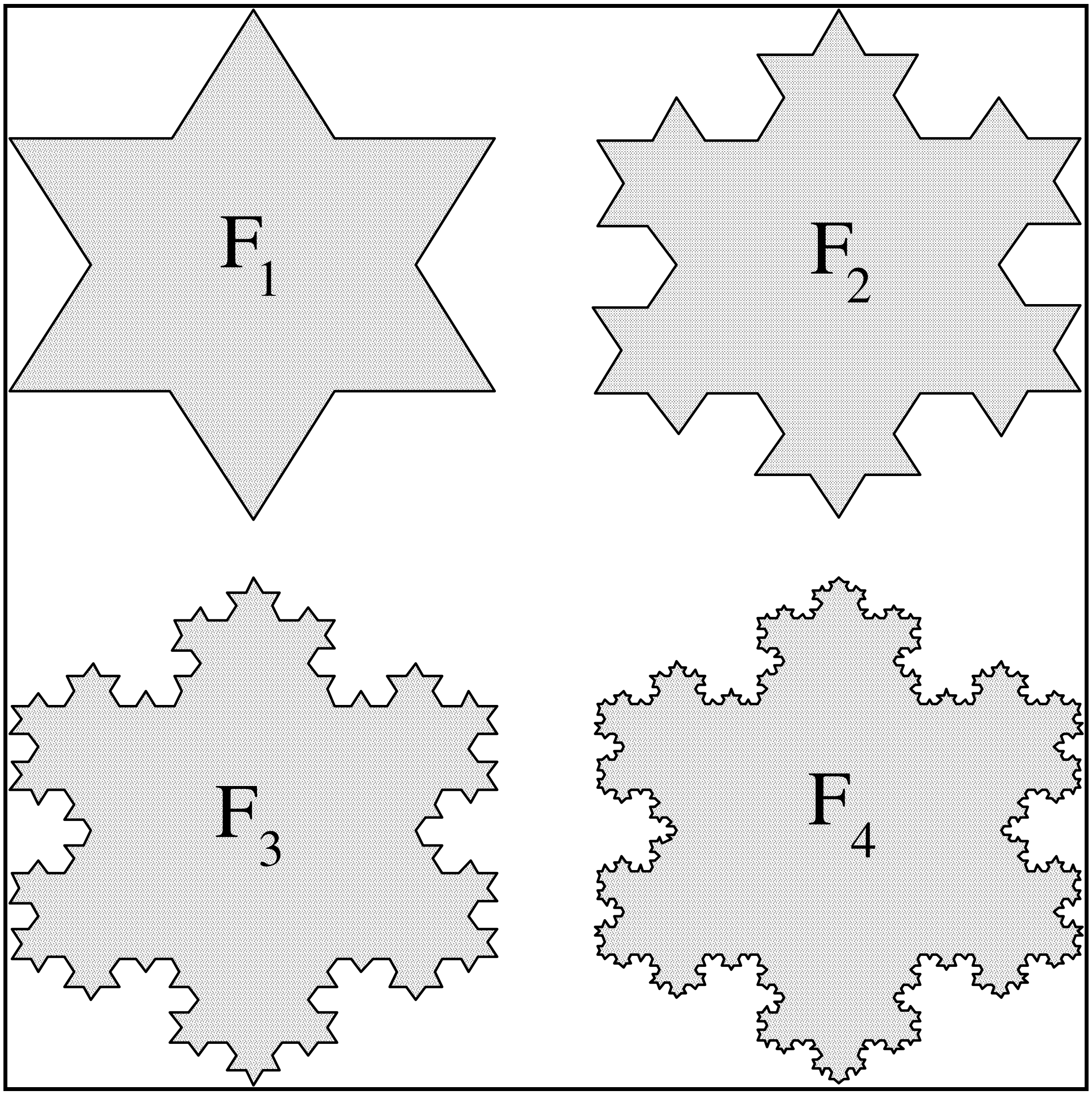
b) L'aire du flocon

L'aire A_0 est celle du triangle équilatéral de côté a: $A_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

A chaque étape, le nombre de triangles est multiplié par 4 et l'aire de chacun des triangles ajoutés est le neuvième de l'aire des triangles précédents : $A_2 = A_1 + 12\frac{A_0}{9^2}$ et $A_n = A_{n-1} + 3\frac{4^{n-1}A_0}{9^n}$

Finalement, en utilisant la somme de la série géométrique, on trouve :

$A_n = A_0\left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ et $A_\infty = \lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{8}{5}A_0$



I. 3.2 Le milieu objectif[79]

Le milieu matériel / objectif peut être constitué des figures F_n résultant de la construction des générations successives du flocon. Ce milieu permet :

— de calculer le périmètre et l'aire des premières figures F_0 , F_1 , F_2, F_3 , F_4 ;

— de calculer le périmètre P_n et l'aire A_n de la figure générique F_n en fonction de n ;

— de formuler des conjectures sur les limites de P_n et de A_n.

I. 3.3 Le milieu de référence

Le milieu de référence est constitué des conjectures sur les limites, et des éléments de preuve de ces conjectures, qui permettent de les confronter. Ces éléments de preuve sont numériques, et c'est certainement là que le professeur devra faire un apport de connaissances, sur le mode de validation de l'analyse.

Questions et éléments de validation qui pourront être mis dans le milieu :

[79] Les connaissances relatives à cette situation et à la structuration du milieu ont été étudiées dans Bloch (1995).

— P_n dépasse la capacité de la calculatrice "vers le haut" ; peut-il également dépasser n'importe quel nombre ?

— A_n semble se stabiliser lorsque n grandit : l'aire devient-elle constante ? et sinon (comme le milieu matériel infirme cette conjecture) comment interpréter ce phénomène ?

— quels sont dans cette situation, les éléments variables, ceux qui peuvent être interprétés comme des fonctions ? quel est leur comportement (devenir "grand", devenir "petit", osciller...) ?

— en analyse, on peut traduire « devenir aussi grand qu'on veut » par : dépasser 10^p , et « devenir aussi petit qu'on veut » par : devenir plus petit que 10^{-p}. Peut-on utiliser ces validations pour interpréter le comportement de P_n ? et celui de A_n ?

I. 3.4 La situation (le jeu)

Le jeu est celui qui a été décrit au chapitre 3 : étant donnée une suite, par exemple P_n , avancer une conjecture sur un nombre atteint par P_n , moyennant une condition à donner sur n. Un joueur A a en charge d'avancer des conjectures sur P_n , et l'autre B de donner n, à partir duquel P_n atteint la valeur proposée, ou de réfuter que P_n puisse atteindre cette valeur. A gagne si B n'est pas capable de fournir n ou de réfuter ; B gagne s'il donne n et peut prouver que c'est le bon, ou s'il réfute la valeur atteinte par P_n .

Le jeu avec A_n est plus complexe : les connaissances des élèves ne leur permettant sans doute pas de raisonner directement sur une limite éventuelle de A_n , il faudra d'abord que le jeu se centre sur le terme fonctionnel de cette suite, celui qui dépend de n, à savoir $(4/9)^n$; ceci implique que les élèves soient capables d'identifier ce terme, ce que la situation ne garantit pas. Il faut compter sur les connaissances des élèves relatives aux fonctions ; si ces connaissances sont défaillantes, le professeur devra intervenir. Après quoi le jeu est du même type que pour P_n , mais en montrant que A_n peut devenir plus petit que 10^{-p}.

I. 3.5 Les variables didactiques

Parmi les variables de la situation « recherche de limite », on trouve, comme dit ci-dessus, le choix du support (fonction ou suite) ; une fois ce choix fait, s'il s'agit des suites, une variable est le type de suite ("quelconque", "quelconque explicitable", arithmétique, géométrique...) ; et le nombre de suites que l'on considère en même temps (une ou plusieurs).

Ces variables ayant été fixées dans la situation choisie du flocon, il reste à fixer les variables spécifiques au jeu avec cette situation :

a) La calculatrice

L'usage de la calculatrice a été retenu pour permettre une exploration numérique des suites construites, et étayer des conjectures.

b) Le calcul des valeurs de P_n et A_n

Les valeurs maximales de n pour lesquelles on calcule effectivement P_n et A_n dépendent de la capacité de la calculatrice donc ne sont plus accessibles comme variables didactiques ; du reste il n'est pas sûr qu'elles auraient pu jouer ce rôle, ou alors cela aurait pu être au détriment de la nécessité de valider, si la classe disposait d'un instrument de calcul assez puissant pour inspirer l'idée que "on a atteint la limite".

c) Les valeurs de p pour lesquelles $P_n > 10^p$

Les valeurs de p pour lesquelles le jeu est organisé sont des variables didactiques car il n'est pas équivalent, pour les élèves, de prouver que $P_n > 10^2$ ou que $P_n > 10^{2500}$, même si en fait le raisonnement est le même ; d'ailleurs dans le premier cas, cela pourra être fait directement à la calculatrice, sans nécessité de passer par le raisonnement. Il faut donc que la situation, ou le professeur, impose des valeurs de p telles que le calcul de P_n ne puisse pas être fait directement à la calculatrice, celle-ci ne devant avoir qu'une fonction exploratoire, et le recours à la preuve devant s'imposer pour certaines valeurs de p (et a fortiori pour le cas général, mais il n'est pas souhaitable de l'introduire d'emblée sous peine de didactifier la situation).

d) La nature du nombre limite L

Dans le cas de la suite ayant une limite finie, la principale variable didactique est la valeur de cette limite, ou plutôt la nature du nombre L : entier, décimal ou idécimal. En effet une limite entière entraînera certainement une réponse par effet de contrat ; si par exemple la limite est 4, le calcul donnant des valeurs du type 3,999998 incitera les élèves, qui ont l'habitude de fonctionner dans le contrat classique où les nombres à trouver sont des nombres "simples", à donner la valeur "4" comme réponse la plus probable. Or le savoir sur le fait que "derrière" une suite de décimaux dont seules les dernières décimales changent, peut se cacher un nombre réel qui est la limite de cette suite de décimaux, ce savoir ne fait bien sûr pas partie des connaissances des élèves sur les nombres à ce stade de la scolarité. C'est justement l'un des objectifs de la situation, que de montrer la nécessité, dans ce cas, d'une validation spécifique, faute de pouvoir connaître la limite uniquement par le calcul de quelques termes de la suite, à la calculatrice. C'est aussi une première étape, par rapport à l'objectif plus général sur l'ensemble **R**, de pouvoir considérer tout nombre réel comme étant lui-même une limite (objectif qui ne fait pas partie des finalités de l'enseignement secondaire).

Il faut donc que la limite cherchée soit idécimale, ce qui imposera d'avoir à la calculer par une autre méthode que l'ostension de la valeur numérique approchée de quelques termes.

Le flocon de von Koch est bien adapté à cette exigence, puisque le fait de partir d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est un entier a, aboutit à une aire A_0 égale à : $a^2\sqrt{3}/4$, c'est-à-dire un irrationnel. Comme la suite des aires est une somme de suite géométrique dont la raison est rationnelle, il s'ensuit que toutes les aires sont irrationnelles, et la limite de la suite A_n est également irrationnelle puisqu'elle ne dépend que de A_0 , avec des coefficients rationnels. Ceci imposera donc aux élèves, qui ne pourront anticiper la limite facilement, d'avoir à valider la valeur de cette limite.

I. 3.6 Les obstacles

Les obstacles prévisibles sont de deux sortes :

a) Ceux qui sont liés à l'emploi de la calculatrice et aux conceptions sur les nombres

La capacité de la calculatrice est dépassée « vers le haut » pour P_n , ce que les élèves peuvent interpréter comme le fait que le périmètre grandit indéfiniment, ou du moins plus que l'on ne peut le calculer. Mais surtout elle est dépassée « vers le bas » pour A_n , les valeurs de la suite n'ayant plus l'air de changer ; l'interprétation de ce phénomène risque d'être une difficulté.

b) Ceux qui sont liés aux conceptions des élèves sur les grandeurs et les fonctions

- conceptions relatives aux grandeurs, en particulier le fait de faire un lien entre variation de l'aire et variation du périmètre ;

- conceptions relatives aux fonctions, en particulier la difficulté à identifier n comme variable, et à savoir faire le lien entre une expression qui est variable et le fait qu'elle contienne la variable n.

On peut alors prévoir a priori plusieurs types d'interprétations du calcul de A_n , suivant les conceptions des élèves sur les nombres et sur les grandeurs et les fonctions :

— l'aire est constante à partir d'un certain rang (conception du type « tout nombre est égal à la valeur lue à la calculatrice, soit un décimal ayant au maximum 10 chiffres après la virgule », à rapprocher de la conception « carré approché CA » rencontrée par Bronner (cf. Bronner 1997 page 182) ;

— l'aire augmente indéfiniment, comme le périmètre.

II. DEROULEMENT PREVU

II. 1 CALCULS ET TESTS A LA CALCULATRICE

II. 1.1 Calcul de Pn et An

Le calcul de P_n ne devrait pas poser de difficultés, car cette suite est géométrique de raison 4/3. Celui de A_n est plus délicat, car :

— il faut compter correctement le nombre de triangles que l'on ajoute à chaque étape, or ce nombre est 3×4^n pour passer de la figure F_n à la figure F_{n+1} , et donc 3 pour passer de F_0 à F_1 ;

— à chaque étape l'aire de chacun des triangles ajoutés est égale à 1/9 de celle des précédents, si bien que les exposants de 9 et de 4 ne sont pas les mêmes ; or beaucoup d'élèves de première ont encore des difficultés avec le maniement des exposants ;

— l'aire de F_n est une somme de suite géométrique, ce qui nécessite de contrôler le nombre de termes de la somme ; or on sait que c'est une difficulté pour les élèves.

On peut envisager que le professeur apporte une aide à ce calcul, par exemple en suggérant de faire un tableau permettant de compter les triangles ajoutés et l'aire de chacun d'eux, lorsque l'on passe de F_n à F_{n+1} .

II. 1.2 Transformation de l'écriture algébrique de An

La deuxième étape importante consiste à mettre A_n sous une forme plus propre au travail numérique, en utilisant la formule de somme d'une suite géométrique. Il peut apparaître à cette occasion des difficultés relatives à la compréhension de cette formule et à son utilisation dans ce cas précis, c'est-à-dire à la mise en œuvre des connaissances d'algèbre des élèves. Là encore il est possible qu'une aide du professeur soit souhaitable ; cependant l'organisation du travail en groupes de quatre élèves devrait assurer la réussite de cette phase ; en effet si certains élèves ont des difficultés avec l'algèbre, d'autres au contraire sont tout à fait performants dans l'application des formules.

II. 1.3 Tests à la calculatrice

a) Pour Pn

Ce que la calculatrice peut permettre de repérer, c'est :

- que la suite P_n est croissante, ce qui peut être validé facilement, et par le milieu matériel, et par les connaissances des élèves sur les suites géométriques ;

— qu'à partir d'un rang à trouver, la valeur de P_n dépasse la capacité de la calculatrice.

Les conjectures qui pourront être faites à partir de ces constatations sont au nombre de deux :

— soit P_n dépasse toute capacité supposée de n'importe quelle calculatrice, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de maximum ;

— soit P_n a un maximum, à déterminer.

b) Pour An

Pour l'aire les élèves vont pouvoir calculer un certain nombre de termes ; mais le phénomène qu'on observe à la calculatrice est moins facile à interpréter que dans le cas de P_n : en effet la suite semble se stabiliser et devenir constante. Cette affirmation peut cependant être contestée grâce au milieu matériel, puisqu'il est clair qu'à chaque étape, on rajoute des triangles, même s'ils sont de plus en plus petits : l'aire est donc strictement croissante. Le premier calcul de A_n doit d'ailleurs confirmer cette propriété, puisque ce calcul fait apparaître une somme de termes tous positifs, un terme étant ajouté à la somme à chaque étape.

Le milieu matériel et objectif fournit donc une rétroaction qui permet de mettre en doute l'apparente constance de la suite des valeurs calculées à la calculatrice ; il ne s'ensuit pas pour autant que le comportement de la suite A_n soit facile à interpréter pour les élèves.

II. 2 CONJECTURES SUR LES LIMITES

II. 2.1 La limite de la suite Pn

Un nombre raisonnable d'élèves devrait conjecturer que la suite P_n tend vers l'infini. Cependant, il ne faut pas surestimer les connaissances des élèves sur les nombres ; certains ne vont sans doute rien inférer de ce que P_n dépasse 10^{99}, qui est la capacité supérieure de la plupart des calculatrices. Il est par contre très invraisemblable que des élèves puissent postuler une limite, qui serait supérieure à 10^{100}, rien dans leur expérience antérieure n'ayant pu les confronter à une telle éventualité. Comme dit ci-dessus, ils peuvent par contre imaginer un "maximum très grand" pour P_n , ce qui serait l'équivalent pour eux d'une limite.

Quelles sont les connaissances qui permettent de faire des conjectures sur la limite de P_n ? L'idée qu'une suite, dont chaque terme est égal au précédent multiplié par 4/3 , "grandit très vite" ; l'idée aussi que la capacité d'une calculatrice plus grande aurait été tout aussi bien dépassée : on aurait pu aussi bien dépasser 10^{999} , ou 10^{9999} , ou toute autre puissance de 10. Le dessin de figures successives offrant un support, on peut penser que cette conjecture pourra être posée par les élèves.

II. 2.2 La limite de la suite An

Il paraît très improbable, étant données les connaissances des élèves sur les nombres, qu'ils soient capables de postuler l'existence d'une limite finie pour la suite A_n . Par contre, ils peuvent grâce au milieu matériel, trouver des arguments pour étayer l'idée que A_n est bornée (le flocon est inscrit dans le cercle circonscrit au triangle de départ). D'autre part la suite A_n est croissante, tout comme P_n ; il y a donc une confrontation due au fait que, bien que toutes deux croissantes, elles n'évoluent pas de la même façon.

Quelles connaissances permettraient de postuler une limite finie pour A_n ? la principale est qu'une suite dont on calcule des valeurs à la calculatrice, et dont les valeurs ne changent presque plus (seuls les derniers chiffres changent puis se stabilisent), est *peut-être* une suite dont le terme u_n calculé diffère de moins de 10^{-p} d'un nombre fixe : autrement dit, pour penser que cette suite "tend vers un nombre L" il faut *déjà* connaître la notion de limite. C'est ce qui fait que l'ostension numérique est inefficace, car elle suppose déjà connue la notion qu'elle prétend introduire.

Par ailleurs l'ostension numérique, à supposer que l'on puisse envisager de s'appuyer sur elle, repose sur un résultat **faux** : disposerait-on d'un ordinateur permettant de calculer une valeur approchée avec un million de décimales, de A_n pour une très grande valeur de n, que l'on ne serait pas plus assuré, théoriquement, de connaître la limite de la suite A_n , ni même de savoir si A_n converge.[80]

[80] C'est d'ailleurs une difficulté importante que pose l'actuel programme de Première et Terminale, relativement à l'articulation avec les savoirs enseignés à l'université : voir chapitre 8.

D'où peuvent alors provenir les conjectures sur A_n ? seulement d'un engagement dans une procédure de reconnaissance d'un terme fonctionnel dans la formule donnant A_n , et des conjectures sur ce que devient ce terme lorsque n grandit indéfiniment ; ou d'une possible reconnaissance d'une symétrie de comportement entre une suite géométrique qui tend vers l'infini et une suite géométrique qui tend vers zéro.

Dans ce processus de reconnaissance d'une suite de même nature que celle obtenue avec P_n , mais de limite différente, il est clair que l'étape de conjectures et de validations sur P_n est essentielle, puisque sans elle, il ne peut y avoir d'engagement dans ce processus. Ceci revient à dire que la situation ne donne pas l'accès directement aux suites de limite finie, mais prévoit un passage obligé par une suite de limite nulle, et ceci par référence à une suite déjà étudiée de limite infinie.

II. 3 DEBAT ET VALIDATIONS

II. 3.1 Débat pour Pn

Il ne peut être prévu de débat que si les élèves ne font pas tous les mêmes conjectures, ou bien ne sont pas capables d'étayer leurs arguments. On peut faire deux remarques :

- la situation mise sur le fait que les connaissances des élèves sont insuffisantes au départ pour trancher entre les deux conjectures pour P_n , à savoir P_n n'a pas de maximum ou P_n a un maximum ;

- il y a donc un débat possible, mais les critères de validation font partie des éléments du SPA inconnus des élèves, donc le professeur devra donner, à un moment du débat, ces critères.

II. 3.2 Débat pour An

Comme dit ci-dessus, pour Pn les critères peuvent être introduits directement à partir de la question qu'on se pose : "Est-ce que Pn peut dépasser 10p ?" , alors que pour An , il va falloir transformer la question en identifiant d'abord que (4/9)n est le terme variable de la suite, et en posant la question pertinente par rapport à ce terme. Puis les élèves devront utiliser implicitement deux règles particulières de l'algèbre des limites : la première, que si un a pour limite zéro, alors k un a pour limite zéro ; puis la deuxième, que si vn a pour limite zéro, alors vn + L a pour limite L. Il n'est pas prévu que ces deux règles soient démontrées à ce moment-là, ou que la situation puisse les valider autrement que par une vérification empirique : on peut calculer à la calculatrice une valeur approchée de la limite L trouvée, et constater que cette valeur approchée diffère peu des valeurs trouvées à la calculatrice lors du calcul des termes de la suite An .

Cependant cette « vérification » ne sera effectuée qu'à la demande des élèves, et en précisant bien son statut ; en effet les règles énoncées ci-dessus font partie du SPA, on est dans une phase de validation et d'institutionnalisation, donc il n'est pas souhaitable de revenir à une phase de recherche dans le milieu objectif.

II. 3.3 Institutionnalisation

Les critères de validation introduits ainsi que les notations usuelles des limites sont institutionnalisés par le professeur en fin d'apprentissage. La définition d'une suite tendant vers plus l'infini est donc institutionnalisée sous une forme équivalente à : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si et seulement si, $\forall p, \exists N / \forall n > N, u_n > 10^p$ (où p, n et N sont des entiers), même si l'écriture formalisée de la définition n'est pas forcément donnée par le professeur, et pas exigée des élèves. De même la définition équivalente d'une suite (positive) convergeant vers zéro est : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ si et seulement si : $\forall p, \exists N / \forall n > N, u_n < 10^{-p}$. Les deux règles énoncées ci-dessus, sur la limite de k u_n et de v_n + L , font aussi partie des savoirs énoncés durant le processus d'institutionnalisation. On peut en effet considérer que ces règles font partie des savoirs de la classe, savoirs réutilisables dans un autre problème de limite.

III. DEROULEMENT EFFECTIF

La situation du flocon a été expérimentée pour la première fois en 1995, dans une classe de Première scientifique du lycée Saint-John Perse, à Pau. J'étais le professeur de la classe. Les séances n'ont pu être filmées, et l'observateur prévu était absent ; il n'y a donc pas de traces vérifiables de cette première expérimentation. J'en ai néanmoins rendu compte, du mieux possible, dans mon DEA (Bloch 1995).

En 1996, la situation a été répétée dans ma classe de Première scientifique. Les séances ont été filmées et observées. On trouvera en annexe II du chapitre 6, les transcriptions des séances filmées.

La classe de 1996 où la situation a été filmée est une classe de 35 élèves, d'un niveau moyen pour une Première scientifique. Trois élèves sont très brillants, une dizaine d'autres ont un bon niveau. En 1997 ces élèves passent le baccalauréat, (dont deux en section littéraire) et seulement 23 le réussissent du premier coup (l'une des élèves avec une mention Très Bien, deux avec mentions Bien, et sept mentions Assez Bien). Ce résultat n'a rien d'exceptionnel, il faut dire que la classe comporte un groupe assez important d'élèves en difficulté (9 élèves en tout, dont certains se voient conseiller le redoublement).

La situation a été reprise l'année suivante, donc en 1997, dans la classe de Première scientifique où la situation "Graphiques et chemins" avait été également expérimentée. Le fait de mettre en œuvre, dans une même classe, deux situations qui demandent un certain temps de travail en classe, tout en se situant un peu en marge des objectifs institutionnels de ce niveau, a cependant introduit des contraintes qui se sont répercutées sur le déroulement. Ces effets sont détaillés au III.

Les séances en classe de 1996 et 1997 ont été filmées ; mais les conditions n'étaient pas celles d'un centre d'observation expérimental ; un seul observateur était présent. Du fait qu'une partie importante du travail s'est déroulée avec des élèves travaillant en groupes de quatre ou cinq, il est clair que la caméra pas plus que l'unique observateur n'ont pu saisir l'intégralité des échanges dans les groupes ou même des groupes avec le professeur. Les transcriptions dont nous disposons doivent donc être considérées comme des successions d'instantanés du travail réalisé par les élèves et le professeur.

III. 1 CALCULS ET CONJECTURES POUR P_n ET A_n

La transcription de la séance du 16/02/96 où ce calcul a été effectué, figure en annexe II du chapitre 6.

<u>III. 1.1 Formule du terme général de la suite</u>

Le calcul du terme général de P_n est relativement aisé. Les élèves utilisent des raisonnements du type : "On remplace chaque segment de longueur x par quatre segments de longueur x/3, donc la longueur est multipliée par 4/3". Ils en déduisent la longueur P_{n+1} en fonction de la longueur P_n , puis P_n en fonction de n, grâce aux connaissances sur les suites géométriques.

Le calcul pour A_n pose comme prévu plus de difficultés ; de plus certains élèves sont bloqués car ils n'arrivent pas à calculer A_0 , et ne peuvent imaginer se lancer dans le calcul sans connaître sa valeur, puisque chacun des petits triangles ajoutés a pour aire une fraction de l'aire du triangle de départ. Le professeur apporte donc une aide au calcul de A_0 , afin de débloquer le travail du groupe. Il apporte aussi une aide à l'organisation du calcul pour la première forme de A_n (suggestion de disposer en tableau, le nombre de triangles ajoutés et l'aire de chacun d'eux).

Utiliser la somme d'une série géométrique pour mettre A_n sous la forme définitive souhaitée n'est pas évident pour certains élèves ; il y a là, comme prévu, l'occasion d'un travail algébrique au demeurant intéressant à ce niveau. On peut d'ailleurs observer, au n°17 de la transcription du 16/02/96, un épisode didactique concernant ce travail algébrique : Flavie comprenant à cette occasion, avec l'aide de Florence, que la formule donnant S_n s'écrit ($\mathbf{q^n - 1}$) / (1 - q) et non $\mathbf{q^{n-1}}$/ (1 - q).

III. 1.2 Recherche empirique à l'aide de la calculatrice

La question étant posée : « Que deviennent le périmètre et l'aire quand on a itéré le procédé 'jusqu'à l'infini' ? » , le professeur demande ce que l'on pourrait faire pour avoir une première idée de la réponse à cette question. Des élèves proposent de calculer P_n et A_n , et se posent alors plusieurs questions :

— pour calculer il faut la valeur de P_0 et A_0 ; elles sont calculées pour a = 18 , la valeur en cm du côté de la figure F_0 tracée par les élèves ;

— certains élèves n'identifient pas une fonction dans les données, or ils ont manifestement l'habitude de calculer f(x) pour des valeurs de x, et sont déroutés (cf. annexe II, n°009 de la séance du 17/02/96) ;

— pour certains élèves, il n'est absolument pas évident, malgré la formulation de la question, qu'il soit intéressant, ne serait-ce que dans un but heuristique, de prendre des « grandes valeurs » pour n. Cette difficulté avait déjà été rencontrée par C. et R. Berthelot lors de l'expérimentation qu'ils avaient faite en classe de Première littéraire pour leur DEA (Berthelot 1983).

Il faut donc croire que l'appui sur l'infini culturel n'entraîne pas automatiquement la compréhension du fait que n peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Pour les élèves qui ne voient pas de contradiction, entre le fait de dire que « n tend vers l'infini » et le fait de se limiter n à des « petites » valeurs, par exemple 5 ou 10, l'approche qui est généralement proposée dans les manuels (calculer u_n pour n égal à 10, 100, 1000, 100000 …) risque de n'avoir guère de sens.

Comment interpréter cette difficulté ? Est-ce que, par manque d'habitude ou effet de contrat, les élèves pensent qu'il n'est pas nécessaire de calculer aussi loin ? D'habitude, pour étudier une fonction, on ne calcule pas f(1000), tout au plus f(10). Est-ce que la difficulté à imaginer la construction de la figure support F_n pour des valeurs aussi grandes de n, fait que ces élèves s'interdisent de calculer sur une figure qu'ils ne peuvent construire ? L'hypothèse de la rupture de contrat semble la plus probable, mais les travaux des élèves n'ont pas permis de l'affirmer.

a) Calcul de P_n

Le calcul de P_n permet de déterminer comme prévu, qu'à partir de n = 786 , P_n dépasse la capacité de la calculatrice.

b) Calcul de A_n

Le calcul de A_n se heurte à une difficulté non prévue : les élèves ont programmé leur machine (TI 81) en tabulation automatique avec deux chiffres après la virgule. A partir du n° 042 (transcription du 17/02/96) s'engage une discussion avec le professeur, où manifestement il y a malentendu. Des élèves (Davy, Flora) disent que A_n est **égal** à 224,48, pour n = 27 ; d'autres pensent que c'est impossible. Le professeur, ayant enfin compris l'origine de la difficulté, intervient pour demander l'affichage de tous les chiffres disponibles ;

mais ceci ne fait que reporter le problème, comme en témoigne la remarque n°60 : « Elle est stabilisée ». Sébastien arrive à calculer A_{33} , et Frédéric A_{36} , mais là encore les élèves butent sur le problème d'arrondi, et trouvent contradictoire qu'une machine puisse afficher 224,47378461 et l'autre 224,4737846091 pour une valeur de n supérieure, alors que la suite est croissante ; ceci prouve bien qu'ils n'ont pas compris le mécanisme d'arrondi.

Le professeur ne fait pas d'intervention plus explicite sur le fonctionnement de la machine. Ceci serait pourtant sans doute nécessaire, car on voit apparaître un obstacle dû à l'instrument, qui ne sera pas traité dans cette séance. Par contre le professeur fait à ce moment là une intervention sur la traduction de ce phénomène (la suite A_n se « stabilise ») en disant que la capacité de la machine est dépassée, mais cette fois dans les petits nombres (n°67 de la transcription du 17/02/96). Or il est loin d'être évident que cette interprétation peut être comprise des élèves : c'est un apport de connaissances du professeur, mais qui ne s'appuie pas sur la base de l'action et la formulation des élèves à ce stade de leur recherche. Cette interprétation n'est d'ailleurs pas reprise par des élèves à ce moment là ; ce n'est que plus tard, après avoir identifié $(4/9)^n$ comme l'élément variable de la suite A_n , que des élèves reprennent cette explication (cf. n°025 à 029 de la transcription du 23/02/96).

III. 1.3 Conjectures sur les limites de P_n et A_n

Les conjectures sur les limites de P_n et A_n se déroulent comme prévu. Pour P_n , il n'y a qu'une moitié des élèves de la classe environ qui pense que la suite « a un maximum infini », les autres pensent que P_n est bornée, même si l'on n'est pas capable de déterminer son maximum.

Pour A_n , comme prévu également, les élèves pensent qu'elle est croissante et bornée ; mais, un élève ayant avancé l'hypothèse qu'elle « se rapproche autant qu'on veut » d'un nombre fixe, la plupart pensent que ce n'est pas possible car comme dit Boubker (n°99) « il y a toujours des chiffres après la virgule » *(sous-entendu : qui changent).*

Lors du débat, les élèves soutiennent plusieurs idées :

— A_n est bornée, car on ajoute des quantités, mais de plus en plus petites ;

— A_n est bornée, car le flocon est inscrit dans l'hexagone construit à partir de la figure de départ (cet hexagone ne sera pas précisé davantage, mais plusieurs élèves le dessinent) ;`

— le périmètre augmente indéfiniment ;

— le périmètre et l'aire se comportent de la même façon (Jérôme au n°118) ;

— n devient infini, mais A_n « prend des valeurs », ça « rajoute des décimales », tout en restant inférieure à l'aire de l'hexagone (Yaëlle au n°121-123).

L'idée de Yaëlle est en fait une affirmation de ce que A_n est une *fonction*, n étant la variable, et que la variation de n ne détermine pas celle de la fonction : autrement dit que les deux suites n'ont aucune raison de varier de la même façon.

Le professeur fait alors un apport de connaissances sur l'aire et le périmètre, avec un contre-exemple, afin de tenter de régler ce qui est un obstacle depuis l'école primaire : en cycle 3 de l'enseignement primaire, on le trouve sous la forme « Deux figures de même périmètre (aire) ont forcément la même aire (périmètre) » ; ici il apparaît comme « l'aire et le périmètre d'une figure varient nécessairement dans le même sens ». La remarque de Yaëlle, et l'apport du professeur, se renforcent mutuellement.

A l'issue de cette phase il apparaît bien que les élèves ne peuvent aller plus loin sans apport aidant à la validation : les critères de validation ne peuvent se dégager seuls d'une phase de recherche empirique. C'est donc à ce moment que le professeur doit prendre en charge l'introduction de savoirs, sous la forme du critère qui doit être mis en jeu : si je donne un nombre, aussi grand que je veux, est-ce que P_n peut dépasser ce nombre ?

III. 2 VALIDATION ET INTRODUCTION DU SPA

III. 2.1 Validation pour P_n

Le professeur donne la règle du jeu : on se donne un nombre, aussi grand qu'on veut, et il s'agit de déterminer n afin que P_n dépasse ce nombre (cf. n°127 de la transcription du 17/02/96).

a) Entrée dans la problématique et compréhension du jeu

Les élèves sont invités à proposer des nombres à dépasser, dans un premier jeu public destiné à familiariser la classe avec la problématique énoncée juste avant par le professeur. Or certains élèves proposent systématiquement des nombres plus petits que ceux qui ont déjà été trouvés empiriquement : ainsi 100, puis, lorsque 100 est rejeté car plus petit que P_{786} , Jérôme propose 5000, qui est rejeté pour la même raison. Jérôme avance alors $5{,}92.10^{128}$; certains veulent alors essayer la calculatrice, bien que les essais empiriques aient prouvé qu'on ne dépasserait pas P_{786} . Même lorsque le professeur a signifié que la phase de recherche empirique à la calculatrice était finie, et fait rappeler par des élèves qu'on pouvait travailler avec la fonction logarithme, certains élèves tentent encore le calcul avec la calculatrice, comme en témoigne l'intervention n°142 du professeur.

Comment interpréter ces comportements ? Effet de contrat (dans le contrat classique comme nous l'avons dit on ne travaille pas avec des nombres « grands ») ? Manque de connaissances sur les nombres ? Ou bien ces élèves n'ont pas compris la problématique : ils n'ont pas associé le fait de chercher si la suite P_n tend vers l'infini, et le jeu proposé.

b) Le jeu et les savoirs

Lorsque la méthode de recherche avec la fonction logarithme s'impose, les élèves trouvent par contre très rapidement les premières valeurs de n. Le professeur a proposé de remplacer $5{,}92.10^{128}$ par 10^{129} pour simplifier le calcul, ce qui donne n >1019 ; le nombre suivant proposé par un élève est 10^{3637} . Un élève propose alors : « Et en général ? une règle générale ? » , sans même attendre que le calcul soit fait pour 10^{3637}. A ce stade de la validation, la réponse à la question est claire pour beaucoup d'élèves : ce qu'on est en train de faire avec 10^{3637} , on pourrait le faire avec 10^p , donc la suite P_n n'est pas bornée. C'est d'ailleurs ce qui est exprimé par Frédéric et Laurent, puis d'autres, et résumé par le professeur (n°160). A la suite de cet épisode le professeur institutionnalise la définition d'une suite tendant vers plus l'infini, et la notation correspondante.

On a rencontré ici une demande de savoirs venant des élèves : on peut considérer que dès qu'ils ont compris le jeu, 10^{3637} joue pour eux le rôle d'expérience décisive ; que 3637, étant un nombre « quelconque » , joue pour un entier quelconque désigné par une lettre, et les élèves sont conscients que le jeu est fini, et que le calcul pour 10^p est le savoir qui permet de conclure.

Il apparaît alors que la modélisation en terme de jeu est intéressante pour le professeur ou le chercheur qui étudie la situation, mais qu'en raison du niveau des élèves, ce jeu ne peut être joué effectivement que de façon extrêmement brève. Ce jeu peut-il néanmoins exister dans la classe comme référence de ce qu'est une suite tendant vers l'infini : il semble que c'est la recherche de la limite de A_n qui le dira. Si la métaphore du jeu est suffisamment forte pour les élèves, en dépit de la brièveté de son existence, alors ceux-ci vont pouvoir la réutiliser en l'aménageant pour trouver le comportement de A_n .

III. 2.2 Validation pour A_n

La validation pour A_n s'engage dans la troisième séance (du 23/02/96) après que le professeur ait rappelé les résultats trouvés pour P_n : $P_n > 10^p \Leftrightarrow n > \dfrac{p - \log 54}{\log \frac{4}{3}}$ (rappel : le côté a du triangle de départ est de mesure 18cm, d'où $P_0 = 54$ cm).

Un premier calcul permet de simplifier l'expression de A_n obtenue par la somme d'une série géométrique. Le professeur fait une intervention (n°004 de la séance du 23/02/96) pour diriger clairement les élèves vers le même type de validation que celui utilisé pour P_n (le professeur est peut-être inquiet de la capacité des élèves à se rendre compte qu'on peut utiliser, pour A_n, un critère symétrique de celui qui a réussi pour P_n). A partir de l'intervention de Karine (n°015) le travail se focalise sur le terme $(4/9)^n$. Frédéric (n°17) entame directement un raisonnement du type « algèbre des limites » pour prouver que A_n a pour limite 8/5 A_0 : mais c'était déjà le seul élève persuadé que la suite A_n convergeait.

Les autres élèves essayent de regarder empiriquement, à la calculatrice, ce que devient ce terme $(4/9)^n$ lorsque n grandit ; on retrouve d'ailleurs la même difficulté, relativement aux valeurs de la variable n, que lors du calcul avec P_n : Ludivine (n°020) propose d'essayer n = 100, et Laure hésite : « C'est un petit peu beaucoup ? ». Du n°026 au 029, des élèves expriment alors que la calculatrice ne peut plus voir les accroissements de $(4/9)^n$. Karine passe au tableau, et exprime que :

Karine : « Si $(4/9)^n$ tendait vers zéro, si on pouvait considérer que ça tendait vers zéro… » et le professeur demandant pourquoi $(4/9)^n$, elle affirme : « c'est la seule chose qui varie, quand n varie ».

Le professeur repose alors la question de savoir si A_n est bornée ; la pertinence d'avoir à prouver ceci à ce moment précis n'est pas évidente, il aurait peut-être mieux valu laisser les élèves continuer à étudier $(4/9)^n$; cependant certains avaient l'air d'être troublés par cette question de savoir si l'aire était bornée, donc le professeur choisit de la régler à cet instant.

Cette question résolue, le professeur repose la question : est-ce que $(4/9)^n$ tend vers zéro, en rappelant le critère utilisé pour montrer que $(4/3)^n$ tend vers l'infini. Après 10mn de recherche, Sandra va au tableau et explique que dans son groupe, les élèves ont cherché si on pouvait avoir : $(4/9)^n < 10^{-99}$. Ils ont trouvé $n > 282$. Le professeur demandant si cette condition ressemble à celle trouvée pour le périmètre, Sandra répond : « **Oui, n augmente** ».

Un autre groupe (n°046) a fait de même avec $(4/9)^n < 10^{-100}$ et a trouvé $n > 284$; Karine intervient alors pour déclarer que son groupe a cherché si $(4/9)^n < 10^{-p}$, avec p quelconque ; Laurent dit alors : « Ça fait $n > \dfrac{-p}{\log \frac{4}{9}}$ » et à Sylvain qui ne comprend pas pourquoi on change le signe (< devient >) Caroline répond : « Mais log4/9 est négatif ! ».

On peut relever les connaissances mises en jeu par les élèves dans cet échange (du n°27 au n°55) :

- connaissances sur les fonctions (identification du terme variable dans une formule) ;
- connaissances sur le sens du jeu et de ce qu'on cherche, ainsi la réponse de Sandra, « Oui, n augmente. » ;
- connaissances sur la fonction logarithme : $\log 4/9 < 0$, donc on trouve bien n supérieur à quelque chose de positif, ce que confirme le sens du jeu.

Remarquons que les interventions du professeur, dans cet échange, ne sont que des reformulations, ou des explications sur le fait que $\frac{-p}{\log\frac{4}{9}} > 0$, ou des questions demandant de préciser le sens des interventions. Il apparaît donc que les élèves manifestent un contrôle du jeu, qui les conduit à interpréter convenablement le résultat trouvé (n **supérieur** à…) et à se servir de leurs connaissances sur la fonction logarithme pour contrôler ce « n supérieur à ». Il y a là un double contrôle qui prouve que les élèves ont réinvesti le critère trouvé lors de la recherche de la limite de P_n , en l'aménageant pour une suite qui converge vers zéro, et que loin d'être déstabilisés par le calcul avec log4/9 , ils sont capables de retrouver la cohérence du résultat : n est supérieur à un nombre qui s'avère bien positif. La mise en œuvre du jeu avec P_n, bien que très brève, a donc permis de construire des connaissances relatives à la validation des limites.

La fin de la séance est consacrée à la mise en forme, par le professeur, du résultat concernant la limite de la suite A_n . Un résultat important de cette étape est que, si une suite u_n a pour limite zéro, alors $k.u_n$ converge aussi vers zéro. Le professeur traite sans doute trop rapidement ce point, mais il ne faut pas oublier que la séance touche à sa fin, et que les élèves manifestent une certaine lassitude, ce qui n'a rien d'étonnant (d'ailleurs le professeur fait une remarque pour qu'ils restent attentifs). De plus cette phase est largement hétérogène au reste du travail fait, puisqu'elle relève de l'algèbre des limites, alors que le travail de la séance porte essentiellement sur la validation à l'aide d'inégalités. Il est donc compréhensible que le professeur ait des difficultés à la rattacher à la situation ; les élèves ne sont pas non plus dans les meilleures dispositions pour acquérir encore un savoir d'une autre nature, après le travail important qu'ils ont fourni dans les deux heures de recherche et de validation des limites de P_n et A_n ; et ceci même s'ils voient bien le rapport entre ce dernier travail à faire et la validation des conjectures sur la limite de A_n .

III. 3 LA SITUATION DU FLOCON : CONNAISSANCES DES ELEVES

III. 3.1 La situation jouée et les connaissances des élèves

La situation qui s'est déroulée est dans une large mesure celle qui avait été prévue : la recherche empirique des valeurs de P_n a permis aux élèves de poser des conjectures sur sa limite ; ils ont utilisé le critère de validation fourni par le professeur pour résoudre ces conjectures.

Le calcul des valeurs de A_n a, plus encore que prévu, fait rencontrer des difficultés relatives à l'usage de la calculatrice et à l'interprétation de ses résultats. La situation n'a pu se dénouer que grâce à l'identification correcte, par les élèves, du terme fonctionnel de A_n . A cette condition, les élèves ont pu réinvestir, en l'aménageant, le critère de validation employé pour P_n , et ont fait preuve de beaucoup d'adresse et de maîtrise dans le calcul d'inégalité permettant de conclure sur la limite de $(4/9)^n$.

Les connaissances des élèves à l'issue de cette situation portent sur :

- le fait que deux suites peuvent être croissantes et ne pas avoir le même comportement à l'infini : celle qui est majorée converge, l'autre tend vers plus l'infini ;
- les critères de validation introduits (réponse aux questions : A quoi reconnaît-on — comment prouve-t-on — qu'une suite tend vers l'infini, ou converge vers zéro ?) ;
- un début d'algèbre des limites.

Et de façon annexe, la situation permet de traiter des connaissances sur :

- l'aire, le périmètre, et leurs variations ;
- les nombres idécimaux, la nature des nombres affichés par la calculatrice ;

- l'usage des formules sur les suites géométriques ;
- ce qui est fonctionnel (dépend d'une variable) et ce qui est constant dans une formule ;
- la fonction logarithme.

En 1996, la situation du flocon, comportant une séance en modules (1H dédoublée), puis une séance de 2H en classe entière, puis une deuxième séance de travail en groupes (2H) s'est avérée compatible avec les contraintes institutionnelles : le programme de la classe ne prévoit pas de consacrer un temps trop long à l'introduction de la notion de limite, laquelle n'est pas, en Première même scientifique, un objectif en soi. Le principal objectif est en effet de parvenir au calcul de dérivées et à l'étude des fonctions usuelles à l'aide du signe de la dérivée.

III. 3.2 L'expérimentation en 1997

En 1997, la situation du flocon a été reprise dans la classe de Première scientifique dont j'étais le professeur de mathématiques ; dans cette classe avait déjà été expérimentée la situation « Graphiques et chemins ». La situation « Graphiques et chemins » s'étale sur plusieurs semaines voire plusieurs mois, et elle occupe beaucoup d'heures ; d'ailleurs le flocon a été traité en avril 1997, alors qu'en 1996 il avait été traité en février. Ces circonstances ont fait que la pression des contraintes temporelles du programme, étant donnés ses objectifs principaux rappelés ci-dessus, était devenue lourde ; il était donc devenu difficile de mener la situation du flocon avec toute la sérénité souhaitable. De plus je me sentais tenue de traiter mieux qu'en 1996 les difficultés rencontrées à propos des nombres et de l'affichage de la calculatrice.

Il résulte de toutes ces contraintes que la situation ne s'est pas déroulée exactement comme en 1996, du moins pour A_n : le professeur a intercalé, après la phase empirique de recherche des valeurs de A_n à la calculatrice, une séquence didactique d'explication sur les nombres et sur le fait que $\sqrt{3}$ a une infinité de décimales. La phase de recherche de limite de A_n en a été aussi rendue plus dirigée, car les élèves, à la suite de la phase d'apport de savoirs sur les nombres, étaient très nombreux à être convaincus que A_n avait une limite.

Cependant les élèves ont réagi, dans le débat, de la même façon qu'en 1996, les principaux points soulevés étant :

- A_n est croissante jusqu'à n = 33, après *la fonction* est constante : affirmation contrée par d'autres élèves par référence au milieu matériel ;
- c'est la calculatrice qui « fait que ça a l'air constant » : « ça augmente de façon tellement infime que la calculatrice ne peut plus le voir » ;
- c'est une *fonction* parce que ça dépend de n (affirmé de façon beaucoup plus massive qu'en 1996 : est-ce un effet de la situation « Graphiques et chemins » ?) ;
- P_n n'est pas majoré, et tend vers l'infini (une majorité d'élèves le pense) ;
- A_n est majorée, et doit avoir une limite (affirmé aussi par un nombre plus grand d'élèves qu'en 1996, même avant le cours sur les idécimaux fait par le professeur) ;
- pour prouver que P_n n'est pas majoré, on peut prouver que $P_n > M$, où M est un nombre arbitraire, ou une puissance de 10 arbitraire (« il faut le faire dans le cas général, le cas général c'est 10^x » dit un élève).

  D'autre part :
- le travail avec la fonction logarithme se déroule sans encombre pour P_n , mais pour A_n certains élèves (un groupe) n'isolent pas le terme $(4/9)^n$ et écrivent $\log \{1 - (4/9)^n\} = \log 1 - \log (4/9)^n = \log 1 - n \log 4/9$, puis n'arrivent pas à conclure ; les autres groupes ne rencontrent pas de difficultés ;

- peut-être par référence à ce qui a été fait dans la situation « Graphiques et chemins », des élèves posent des questions comme : « Alors est-ce qu'une suite qui tend vers l'infini, c'est la même chose qu'une suite non majorée ? » , question que le professeur ne trouve pas le temps de traiter dans le courant de la situation. Mais on peut avancer que ce type de question, non pris en charge habituellement par les élèves, serait à introduire dans la suite du travail, en fournissant un milieu pour les traiter ; car ce type de question est fondamental dans la conception que peut avoir l'élève d'une suite tendant vers l'infini ;
- la question de savoir si A_n est majorée est également posée, et résolue algébriquement comme en 1996 ; mais un groupe avance que A_n est majorée, car elle a une limite qui est le plus petit des majorants (ils l'énoncent exactement dans ces termes mais bien entendu ils ne savent pas le prouver).

Globalement on peut avancer que la situation a permis, comme en 1996, de poser un certain nombre de questions tout à fait fondamentales relatives aux nombres réels et aux limites ; certaines de ces questions ont pu être confrontées au milieu du flocon, et être l'occasion d'une interaction de connaissances professeur / élèves. Cependant une partie de ces questions n'a pu être exploitée autant qu'il aurait été souhaitable, et ceci essentiellement à cause des contraintes temporelles de l'institution. Néanmoins, une analyse plus fine des possibilités engendrées par ces questions (nombres idécimaux et calculatrices, suites non majorées ne tendant pas vers l'infini, limite et majorant, …) et une organisation du milieu et du jeu mieux adaptée, permettraient sans doute que les élèves et le professeur mettent en œuvre, ensemble, davantage de connaissances à propos de ces questions.

IV. CONCLUSION

IV. 1 SUR LES OBJECTIFS DE LA SITUATION

IV. 1.1 Points positifs

La situation s'est bien jouée conformément à ce qui avait été prévu ; la dialectique : suite croissante tendant vers l'infini / suite croissante convergente, a fonctionné. Les critères de validité ont pu être mis en œuvre, et à partir de celui qui a été donné pour P_n , les élèves ont trouvé celui qui était adapté au cas d'une suite convergeant vers zéro.

On peut supposer que ces critères de validité, étant d'un maniement relativement aisé, du moins pour des suites simples, font bien partie des savoirs utiles à la validation que les élèves pourront réinvestir pour l'étude des limites ; il faudrait néanmoins prévoir un temps pour le réinvestissement et l'entraînement (travail de la technique) avant de vérifier ce point.

Le calcul de A_n a permis de poser des questions fondamentales sur les nombres réels, en particulier les idécimaux.

La situation a permis d'institutionnaliser une définition correcte d'une suite tendant vers 'plus l'infini', et d'une suite convergeant vers zéro, tout en ne sacrifiant pas le sens (référence à un milieu matériel et objectif).

IV. 1.2 Points à travailler

Les cinq heures de travail sur la situation du flocon ne suffisent pas à assurer que les élèves ont bien assimilé les critères de validation des limites ; il est nécessaire de prévoir ensuite une phase de réinvestissement, sur d'autres suites peut-être plus compliquées, en tous cas de nature variée. Il est aussi indispensable de ne pas négliger le travail de la technique, tout spécialement dans ce domaine des inégalités, que l'on sait être difficile pour les élèves. Sachant que de plus il faut prévoir l'introduction de l'algèbre des limites, afin de s'affranchir, dans les cas simples, de démonstrations lourdes et afin d'augmenter le champ des exemples disponibles, il est clair que le temps prévu par l'institution pour ce processus est beaucoup trop court. L'introduction de la notion de limite, répétons-le, n'est pas un objectif prioritaire de la classe de Première (mais de Terminale non plus).

Il faut alors se demander si les connaissances travaillées à cette occasion sont superflues, ou si au contraire elles participent de façon fondamentale à la construction du savoir d'un niveau supérieur introduit à l'université ; et dans ce cas peuvent-elles se retrouver dans l'enseignement de la première année post-bac, soit que le professeur les travaille avec les étudiants, soit que ceux-ci soient amenés à retrouver seuls ces connaissances ? C'est une question qui sera examinée au chapitre 8.

La situation du flocon met en jeu deux suites croissantes, dont l'une tend vers l'infini, l'autre a une limite. Le fait que les deux suites soient croissantes induit des propriétés particulières qui peuvent ensuite, si les élèves les généralisent en théorèmes pour les suites quelconques, s'ériger en obstacles (cf. Robert 1982). C'est un point qui avait été repris par M.Legrand (Legrand 1991) et qui avait conduit, pour la situation du pétrolier, à choisir une suite qui oscille autour de sa limite. Ce choix conduit néanmoins à des validations hors de portée des élèves, ou du moins le professeur est obligé de faire un apport massif de savoirs pour valider la convergence, et ces savoirs ne sont pas institutionnalisables et réinvestissables à ce niveau. C'est pourquoi la situation du flocon met en concurrence deux suites (en fait, une suite et une série) géométriques *croissantes*. Cependant il sera nécessaire de confronter ensuite les élèves à des suites moins régulières.[81]

A cette occasion on peut envisager de construire un milieu auquel confronter les questions posées, qui n'avaient pu être travaillées, comme la différence entre suite non majorées et suite tendant vers 'plus l'infini'. On peut aussi prévoir d'introduire un milieu pour travailler les suites adjacentes (cf. la remarque d'un élève sur la limite comme plus petit majorant), ce qui peut conduire à un travail intéressant sur la topologie de **R**.

Le travail sur les nombres pourrait aussi sans nul doute être approfondi ; mais cela nécessiterait la construction d'un milieu et d'une situation spécifiques.[82] Il y a en effet trop de connaissances à traiter, et de savoirs à introduire, pour que cela puisse se faire en marge d'une situation consacrée à une autre notion, même si cette dernière est étroitement reliée aux problèmes numériques et aux propriétés de la topologie de **R**.

IV. 1.3 Sur le SPA

Les élèves se sont confrontés à un milieu qui nécessitait bien, pour la validation, des éléments du SPA : à partir de questions sur des processus infinis, des infiniment grands et des infiniment petits, mettre en œuvre des procédés impliquant qu'à partir d'un certain rang, tous les termes d'une suite sont plus grands ou plus petits qu'un nombre arbitraire, fixé à l'avance. Pour cela ils ont manipulé des inégalités conduisant à des conditions sur la variable n : c'était l'un des objectifs de la situation, celui qu'on pouvait raisonnablement fixer par rapport à la validation.

La situation ne permet pas d'entrer plus avant dans le concept de limite, ou les méthodes de validation de l'analyse. En ce sens, comme dit plus haut, elle nécessiterait une suite qui pourrait prévoir d'entraîner les élèves à ces méthodes de validation, sur un champ d'exemples suffisamment varié. Dans les conditions actuelles de l'enseignement de l'analyse à ce niveau, ce n'est pas envisageable.

IV.1.4 Dimension a-didactique et connaissances du professeur

La situation organise la confrontation des élèves avec un milieu matériel et objectif qui permet de poser des questions, et aussi d'invalider certaines réponses spontanées ou conjectures des élèves (par exemple que la suite A_n est constante à partir de n = 33). En ce sens cette situation comporte des phases a-didactiques. Cependant dans le milieu de référence les conjectures des élèves ne peuvent être validées par la seule confrontation au milieu matériel : le professeur fait des apports de connaissances en réponse aux questions ou aux hypothèses des élèves. D'après ce qui a été dit au chapitre 2, la situation comporte alors une dimension a-didactique s'il y a bien interaction de connaissances, c'est-à-dire si la situation permet bien que les apports du professeur répondent à des nécessités pointées dans les connaissances des élèves, et donc si la situation est conçue pour que le professeur ne prenne pas en main totalement son devenir. D'après les transcriptions, il nous semble que les élèves ont pu manifester des connaissances jusqu'à la validation incluse. Le fait que l'on fasse reposer la dimension a-didactique sur un jeu auquel le professeur doit participer suivant certaines clauses, nous interroge cependant sur les conditions à réaliser du côté du professeur,

[81] Cela ne pourra bien évidemment être fait dans le temps imparti par l'institution 'enseignement secondaire' à l'étude des suites et leur limite.

[82] cf. Bronner 1997 par exemple.

et bien sûr sur la valeur intrinsèque, ou non, de cette dimension[83]. Cela pose également le problème de la reproductibilité de la situation.

IV. 2 SUR LA REPRODUCTIBILITE

La question de la reproductibilité de la situation du flocon, ainsi que d'autres situations expérimentées dans l'enseignement secondaire, nous paraît relever d'une réflexion de fond qui reste assez largement à mener. En effet, on peut dans une certaine mesure dire que la situation s'est jouée à deux reprises conformément à l'analyse a priori ; mais, en l'absence d'un dispositif comme celui du COREM[84], dont a longtemps bénéficié l'enseignement primaire, une situation comme celle-ci, expérimentée en collège, ou en lycée, est l'œuvre d'un chercheur-enseignant qui l'a élaborée et qui la fait jouer deux ou trois fois dans sa classe : la situation n'est pas mise à l'épreuve d'une répétition systématique, avec un enseignant non chercheur. Sans négliger l'importance de l'analyse a priori, il nous semble que c'est cette répétition qui pourrait assurer, par la confrontation à la contingence, que le concept visé fait bien partie intégrante du sens de la situation, et que celle-ci pourrait se jouer à l'identique quant au sens, quel que soit l'enseignant qui entreprendrait de la faire vivre dans sa classe.

On peut tenter de pallier, dans une certaine mesure, à cette carence quant aux possibilités d'expérimentation, par la finesse de l'observation : c'est un but supplémentaire que l'on peut assigner au relevé de connaissances professeur / élèves, témoin de leur activité mathématique conjointe. Ainsi comme il a été dit au chapitre 2, l'analyse des connaissances que le professeur doit mettre dans le milieu de référence est d'autant plus importante que ces connaissances sont en partie la pierre de touche de l'authenticité du savoir mathématique en jeu. D'ailleurs certaines observations réalisées dans l'enseignement secondaire ont fait apparaître une certaine vacance ou une certaine inadaptation du côté des connaissances du professeur[85].

Il en résulte que le chercheur, pour analyser une situation didactique, se trouve être tributaire de ce que le professeur observé peut mettre comme connaissances dans la situation : or on conçoit bien que cela puisse dépendre de la formation mathématique dudit professeur, comme de ses connaissances didactiques. Le chercheur se trouve alors dans la situation d'un ethnologue, qui observe les coutumes d'une population, mais dans un milieu particulier qu'il interprète comme un microcosme de cette population ; ou comme Freud déduisant le fonctionnement de l'inconscient de l'analyse de patients particuliers, et postulant à partir d'eux des lois générales.

Dans différentes recherches, dont celle-ci[86], le problème a été résolu en confondant chercheur et enseignant, mais c'est au prix d'une certaine opacité de la procédure. Dit autrement, il serait possible que dans ces conditions l'étude de la situation renseigne plus sur les conceptions du chercheur / professeur que sur le savoir mathématique que la situation prétend porter. C'est aussi l'une des raisons pour lesquelles nous avons eu le souci d'organiser une autre forme de confrontation à la contingence, à savoir un questionnaire sur les fonctions et les limites, donné à quatre classes de Première, dont la classe expérimentale de 1996/1997. Ce questionnaire, et son analyse, figurent au chapitre 7.

[83] A propos de la validité du travail fait par les chercheurs en didactique, voir Lacasta 1995, Chapitre 2, page 17 et suivantes.
[84] Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Ecole Jules Michelet, Talence.
[85] cf. Comiti et Grenier, 1997. Dans ces conditions il est difficile d'évaluer l'intérêt de la situation prévue.
[86] cf. par exemple Bronner 1997, Trouche 1996, Sensevy 1996.

CHAPITRE 7

CHAPITRE 7

LE QUESTIONNAIRE « FONCTIONS ET LIMITES »

Chet
Chet Baker

« A une de mes amies qui semblait avoir des difficultés à faire ses comptes,
on conseilla un jour d'additionner chaque colonne cinq fois
et de prendre la moyenne des différents résultats. »
Charles Sanders Peirce
Le raisonnement et la logique des choses, Conférence n°4.

I. ELABORATION DU QUESTIONNAIRE

Dans les chapitres qui précèdent, il a été envisagé un enseignement des notions de fonction et de limite, en classe de Première scientifique, qui sort du paradigme habituel. Sans se situer en dehors du curriculum de cette classe, il prévoit pour les élèves des tâches, et une interaction avec un milieu, qui ne sont pas prévus dans l'organisation « classique » de l'enseignement. En particulier, en ce qui concerne les fonctions cet enseignement a beaucoup moins mis l'accent sur les tâches du registre numérique / algébrique que ne le fait l'enseignement classique ; par contre, il a insisté sur le registre graphique / formel, et sur la validation graphique. De même pour les limites : l'insistance a été moins forte sur l'algèbre des limites, au profit d'un temps plus long, et de nature différente, consacré à la recherche de limites et à la validation.

Les élèves ayant suivi cet enseignement expérimental ont-ils développé des connaissances différentes de celles manifestées par les élèves ayant suivi l'enseignement « normal » ? Ainsi que le dit Lacasta (Lacasta 1995) c'est une hypothèse forte sur l'existence du didactique : l'enseignement influence-t-il de façon significative les connaissances des élèves qui l'ont suivi ? et dans le cas où l'on répond « oui » à la question de cette influence, les effets sont-ils bien ceux que l'on en attendait ?

Ainsi l'enseignement expérimental comportait un milieu graphique de nature différente de celui qui est utilisé dans l'enseignement classique ; peut-on mesurer la différence des apprentissages entre le milieu graphique traditionnel et le milieu graphique expérimental ? et cette différence porte-t-elle uniquement sur les apprentissages prévus dans la situation expérimentale, ou s'étend-elle aux connaissances générales sur les graphiques ? Les connaissances sur les fonctions, construites dans ce milieu, sont-elles différentes des connaissances obtenues dans l'organisation classique de l'enseignement ? Ces connaissances sont-elles réutilisées ensuite spontanément dans l'apprentissage des limites ? Par exemple observe-t-on, dans les procédures spontanées des élèves, un plus grand recours aux représentations graphiques ?

C'est pour répondre à ces questions qu'une étude statistique a été envisagée. Les élèves de la classe expérimentale travaillaient dans un lycée de Pau comportant quatre classes de même filière au même niveau. Un questionnaire a été élaboré et proposé à ces quatre classes de Première scientifique.

I. 1 HISTORIQUE

La genèse du questionnaire s'est faite en deux temps :

1. Ce questionnaire a d'abord répondu à un souci de professeur, certes aussi chercheur, mais qui, ayant expérimenté, dans sa classe, des situations d'apprentissage des notions de fonction et de limite différentes de celles proposées par l'enseignement institutionnel, souhaitait les évaluer ; cette évaluation devait être guidée, d'une part par les hypothèses faites sur les connaissances contenues dans les situations expérimentées *(contrôle interne),* et d'autre part par les questionnaires déjà connus, proposés sur le même sujet par des chercheurs travaillant sur le graphique *(contrôle externe).* Il se trouve que les questionnaires disponibles émanaient de chercheurs étrangers, plutôt affiliés à PME, donc suivant une problématique différente de celle d'un chercheur en didactique.
2. La démarche ultérieure a consisté en une analyse des questions et des hypothèses, afin de replacer celles-ci dans une problématique de recherche en didactique.

I. 1.1 Les questionnaires des chercheurs PME : contrôle externe

a) Le questionnaire de Schwarz et Dreyfus

Le premier questionnaire exploré est celui proposé par Baruch Schwarz et Tommy Dreyfus, dans un article paru dans Educationnal Studies in Mathematics (ESM n°29, Schwarz et Dreyfus 1995), *New actions upon old objects : a new ontological perspective on functions*. Il s'agit d'une expérience d'enseignement avec un logiciel de tracé de fonctions, TRM ou Triple Representation Model. Les classes concernées sont des classes de Neuvième en Israël, qui commencent juste l'étude des fonctions. Lorsque le test a lieu, les classes non expérimentales ont eu un enseignement de 24 H (2 H par semaine pendant 12 semaines) sur les fonctions.

Cet article témoigne d'une recherche convergente, sur certains points, avec les recherches sur le caractère réducteur et producteur du graphique ; les auteurs prennent également en compte, dans les autres registres disponibles, ce qu'ils appellent — et nous les avons suivis sur ce point — le caractère partiel et ambigu des représentants (cf. chapitre 4).

La problématique de Schwarz et Dreyfus diffère de celle qui est adoptée dans cette thèse, sur deux points essentiels.

— Pour Schwarz et Dreyfus, les représentants ne sont pas mis tous sur le même plan : les représentants formels font partie du concept-définition (en référence à Tall, Vinner, Dubinsky et Harel), tandis que les RGC feraient plutôt partie du concept-image, donc avec un moindre degré de conceptualisation. Ils soulignent cependant que le graphe formel d'une fonction est un objet conceptuel (un non ostensif dans le vocabulaire de Bosch et Chevallard, vocabulaire qui est adopté au chapitre 4) ; mais selon eux, une RGC est une réalisation matérielle de ce graphe formel, elle est donc « lisible » sans le concept ou avec une conceptualisation limitée. Cette approche nous paraît provenir d'une confusion entre les différents objets — mathématiques ou non — en jeu dans le tracé d'une RGC, et que Chauvat a dégagés (cf. Chauvat 1997), ces différents objets ayant des statuts fort différents (du graphe formel au dessin de la RGC). De plus (cf. chapitre 4) les ostensifs sont tous porteurs de propriétés du concept, ainsi que de limitations dues à leur nature et leurs caractéristiques d'ostensifs ; d'autre part aucun ostensif n'est lisible sans travail sur le concept[87].

— Les réponses à des questions faisant intervenir des ostensifs relèvent, suivant Schwarz et Dreyfus, de *compétences* attribuées aux élèves, ce qui n'a rien d'étonnant dans une approche cognitiviste. Pour nous, il y a lieu de repérer les *connaissances* nécessaires pour répondre : ces connaissances sont une caractéristique des *questions* et non pas des individus. Si dans une certaine mesure ces connaissances peuvent être attribuées aux élèves — et il a été fait mention, au chapitre 2, de la difficulté qu'il y a à identifier et attribuer des connaissances, tant au professeur qu'à l'élève, au travers de leur activité — ce ne peut être que par une hypothèse didactique qui pose que telle réponse signifie (contient) telle connaissance de l'élève qui l'a produite, et ceci résultant d'une analyse a priori des questions permettant d'affirmer que la connaissance est nécessaire pour cette question.

La différence peut sembler formelle ; elle ne l'est pas dans la mesure où pour Schwarz et Dreyfus, le fait d'identifier des compétences des élèves conduit à envisager un enseignement adapté à ces compétences, ou qui vise à obtenir chez les étudiants le développement de telle ou telle compétence, y compris par un détour par les conceptions « culturelles » du sujet ; alors que la problématique de la théorie des situations part bien évidemment du savoir et tente de déterminer les conditions didactiques pour que les élèves puissent accéder au savoir visé[88]. Chez Schwarz et Dreyfus, l'absence de modélisation, du moins dans le cas des situations ordinaires d'enseignement, interdit de théoriser les connaissances produites, ou possibles ou nécessaires ; ils doivent alors renvoyer les réussites aux compétences individuelles des élèves.

Dans l'étude d'un questionnaire, il paraît même nécessaire de ne pas s'en tenir à l'analyse a priori des questions, et des réponses possibles ; si ce sont les conditions didactiques qui sont déterminantes, alors on peut envisager que des élèves ayant suivi des paradigmes d'enseignement différents (par exemple un enseignement basé sur la problématique numérique / algébrique dominante, et l'enseignement expérimental basé sur une problématique graphique / formelle) se différencient nettement dans les réponses, et que cette différence soit significative.

Le questionnaire de Schwarz et Dreyfus doit donc être analysé de ce point de vue : si les élèves fournissent une réponse, celle-ci est-elle un indice de leurs conceptions spontanées, épistémologiques ou culturelles, ou la réponse est-elle dépendante du type d'enseignement suivi, et du contrat dominant de cet enseignement (contrat qu'il faut bien sûr préciser par rapport à chaque question retenue) ? Les élèves expérimentaux testés par Schwarz et Dreyfus ont eu un enseignement avec le logiciel TRM décrit dans l'article. Ceci permet de relier enseignement et réussite aux questions de leur questionnaire. Mais pour les autres élèves, il n'est pas possible de s'interroger sur le *comment* de l'apprentissage des compétences testées ; or c'est une question fondamentale de la didactique. Le questionnaire de Schwarz et Dreyfus apparaît dans une certaine mesure comme un questionnaire *sur les élèves*, plutôt que comme un questionnaire *sur l'enseignement.* Si, en poussant le raisonnement à l'extrême, les élèves acquièrent des compétences de façon uniquement culturelle, quel est alors l'intérêt d'orienter l'enseignement dans un sens ou un autre, puisque les élèves apprendront de toutes façons ?

Le questionnaire donné aux classes de Première scientifique reprend certaines questions de Schwarz et Dreyfus (par exemple Q1, Q2) avec des hypothèses sur les réponses possibles des élèves suivant leur appartenance ou non à la classe expérimentale ; au I. 2 , ces hypothèses sont précisées et explicitées. Les questions retenues et leur analyse figurent au II.

---

[87] Sinon ce n'est pas un ostensif, mais par exemple un « objet médiateur », comme précisé au chapitre 4.

[88] Il a été fait mention, au chapitre 3, des différences de problématique entre la théorie des situations et les approches cognitivistes.

b) Le questionnaire de Funrighetti et Somaglia

Les auteurs (Funrighetti & Somaglia, 1994) proposent un questionnaire à des élèves de 14 à 19 ans ; ce questionnaire porte sur les aspects algébriques et graphiques de la notion de fonction. Funrighetti & Somaglia souhaitent attirer l'attention des chercheurs et des professeurs sur l'intérêt du graphique pour renforcer « l'intuition basée sur la visualisation », dans la continuité des travaux de Vinner et Tall. Elles mettent cependant en garde sur le fait que le langage graphique a ses conventions et symboles propres, qui ne sont pas suffisamment explicités ; et insistent sur le fait que le travail graphique requiert une « participation active des étudiants et un strict contrôle des professeurs dans la phase d'interprétation du graphique et de formalisation ».

Les questions posées par Funrighetti & Somaglia ne s'éloignent en général pas d'un contrat classique ; ainsi à la question 13 un tableau de valeurs de la fonction définie par $f(x) = x^4 - x - 1$ est associé à deux courbes au choix, l'une (figure 2) ayant une forme très canonique pour un élève de lycée, l'autre obtenue (figure 1) en joignant les points suivant un chemin « dans le désordre ». La question est : « Dire laquelle de ces affirmations est vraie :

1. La représentation graphique de la figure 1 est la RGC de f ;
2. La représentation graphique de la figure 1 n'est pas la RGC de f, la RGC de f est représentation graphique de la figure 2 ;
3. La représentation graphique de la figure 1 n'est pas la RGC de f, parce qu'il y a trop peu de points ;
4. La représentation graphique de la figure 1 n'est pas la RGC de f, parce que : ....

On peut se demander suivant quel critère l'élève va répondre : soit un effet de contrat (la courbe qui a une allure familière est la bonne), soit l'élève (surtout s'il est jeune et n'a pas encore étudié les fonctions autres qu'affines) risque de ne pas comprendre la question. Remarquons aussi que trois des quatre possibilités ouvertes contiennent une déclaration que la RGC de f n'est pas celle de la figure 1 ; on peut supposer qu'un élève un peu averti en sera alerté. Cependant les tests fonctionnent aussi souvent sur un paradigme inverse du contrat didactique habituel, le but étant de surprendre l'élève et de déstabiliser ses habitus afin de savoir si ses connaissances résistent ; donc le contrat peut jouer dans les deux sens. De fait chez Funrighetti & Somaglia cette question n'est réussie que par 42% des élèves de 15 ans, et seulement 54% des élèves de 18 ans et 76% des élèves de 19 ans. Les auteurs n'indiquent cependant pas ce qu'elles considèrent comme une bonne réponse (probablement la seule réponse 2), puisqu'en fait 2 , 3 et 4 contiennent toutes la bonne réponse.

D'autre part les questions comportent un choix entre 3 ou 4 possibilités ; il est dit dans la question que seule l'une de ces possibilités est vraie (« Laquelle de ces réponses est correcte ? »). On ne peut donc pas écarter l'éventualité d'une réponse au hasard, dont l'incidence peut être importante vu le faible nombre de réponses possibles (un choix parmi 4 réponses à cocher donne 4 réponses possibles ; toutes les bonnes réponses à cocher parmi 4 réponses donne a priori 20 réponses possibles : $C_4^4 + C_4^3 + C_4^2 + C_4^1$).

Dans ce questionnaire nous avons retenu cependant 3 questions, dont les réponses nous semblaient devoir être suffisamment fiables, sans les ambiguïtés de la question analysée ci-dessus : l'une (Q5 de notre questionnaire) pour vérifier si la lecture directe de racines d'une équation sur une RGC était bien acquise pour tous les élèves de Première ; la deuxième (Q8) afin de tester si la détermination d'un ensemble de valeurs prises par une fonction était réussie également par des élèves ayant fonctionné avec le contrat classique numérique / algébrique, et des élèves ayant eu l'enseignement expérimental graphique / formel ; la troisième (Q11) concerne les écritures formelles et le lien avec le numérique.

I. 1.2 Le questionnaire / évaluation : contrôle interne

Dans la perspective d'un enseignant qui teste une situation expérimentale dans sa classe, ce questionnaire se trouve avoir une valeur heuristique plutôt que probante : il s'agit de se placer, pour l'enseignant, dans une perspective exploratoire ; de voir s'il est possible de déceler des invariants intéressants par rapport à l'enseignement des notions de fonction et de limite en classe de Première, et par rapport aux situations testées.

Du point de vue du professeur, il s'agit aussi d'une évaluation de son enseignement (ou de l'apprentissage des élèves), y compris par rapport à la « norme » de l'enseignement à ce niveau ; les contraintes institutionnelles sont fortes en mathématiques en Première scientifique, et un professeur est supposé au minimum ne pas pénaliser ses élèves par son enseignement, c'est-à-dire leur permettre « la même » réussite que l'ensemble des autres élèves ; le sens que l'on donne à ce « même » est habituellement un sens d'inclusion : les élèves de la classe expérimentale doivent manifester au moins les mêmes compétences que les élèves non expérimentaux sur des items classiques correspondant à ce niveau d'enseignement. Le questionnaire fait donc office d'évaluation pour les élèves et pour le professeur. Dans cette perspective il comprend des questions significatives des habitus d'une classe de Première scientifique dans son organisation classique ; et d'autres qui le sont moins, qui peuvent s'interpréter comme destinées à tester *si la situation expérimentale est bien porteuse de connaissances spécifiques, ou si les élèves ayant suivi un enseignement classique sont également capables de manifester ces mêmes connaissances*.

I.2 DU POINT DE VUE DE L'ENSEIGNANT AU POINT DE VUE DU CHERCHEUR : QUESTIONS ET HYPOTHESES

I. 2.1 Hypothèses envisageables

La question précédente — en italique — constitue une entrée acceptable dans une problématique différente de celle du professeur. En replaçant cette question par rapport aux situations expérimentées dans l'enseignement de la notion de fonction, on peut poser les questions suivantes :

— l'enseignement expérimental faisant porter une partie des apprentissages par un milieu graphique, il est possible d'interroger la spécificité de la situation vécue dans la classe expérimentale, dans son rapport au graphique : par exemple, en se demandant s'il existe dans le contrat classique le même type de travail graphique, ou du moins si l'organisation classique de l'enseignement produit les mêmes connaissances relatives aux graphiques, auquel cas les questions faisant appel au graphique devraient être réussies par tout le monde ;

— le contrat habituel de l'enseignement de la notion de fonction est un contrat numérique / algébrique qui prolonge le contrat de l'enseignement des nombres idécimaux au collège[89] ; l'enseignement actuel considère que le numérique (tableaux de valeurs) est à la charge des élèves, qu'il n'y a pas à le travailler. Donc, là encore, tous les élèves (ou du moins tous ceux des classes non expérimentales) devraient réussir les questions faisant appel au numérique. Si cette conjecture est infirmée, c'est que le numérique n'est pas aussi évident.

Quelles sont donc les questions que les élèves de la classe expérimentale réussissent le mieux ? Y a-t-il une différenciation des questions entre classe expérimentale / classe non expérimentale ? On peut alors, par exemple, essayer de définir un élève graphique, par opposition à un élève numérique / algébrique ; il s'agit dans ce cas de regarder l'ensemble de questions sur lequel ces profils sont suffisamment distants. Une fois ces profils définis, on peut tester la proximité des élèves de la classe expérimentale (resp. des autres classes) par rapport au profil graphique (resp. numérique).

[89] Pour des précisions sur ce contrat au collège, cf. Bronner 1997.

Dans les deux cas pris en hypothèse (élève numérique / algébrique — N/A— des classes non expérimentales, et élèves graphiques — G — de la classe expérimentale), peut-on repérer des transferts de réussite ou de connaissance ? En d'autres termes, les élèves ayant suivi l'un ou l'autre enseignement sont-ils prisonniers de la problématique enseignée, ou sont-ils capables de changer de problématique et de s'adapter à des questions non prévues dans leur paradigme d'apprentissage ? Cette question pourrait s'exprimer en termes de *dépendance du contrat usuel* de la classe (de même que Sarrazy avait défini la sensibilité au contrat). Cette dépendance se manifesterait par un cloisonnement strict dans le profil général de la classe (N/A ou G).

Cependant une autre hypothèse serait que le registre graphique est maîtrisé par tous les élèves, sans apprentissage spécifique ; ce serait alors une propriété intrinsèque de ce registre, de faciliter le travail mathématique sur les fonctions.

D'autre part certaines questions ont été construites dans le questionnaire pour tester si les conversions entre registres sont acquises ou non. Ces questions doivent permettre de dire si les conversions entre registres s'effectuent spontanément, ou si elles ne s'effectuent que lorsqu'elles ont fait l'objet d'un apprentissage spécifique.

Il est maintenant possible de poser des conjectures, qui vont être discutées afin d'évaluer leur intérêt (pertinence, utilité, caractère douteux ou non) et leur faisabilité (coût de la réponse, étendue du champ modifié par celle-ci).

I. 2.2 Conjectures

C1 : les élèves de la classe expérimentale sont plus proches d'un profil « graphique » et les réussites des élèves de la classe expérimentale sont déterminées par leur dépendance du contrat usuel de la classe.
C2 : les élèves des classes non expérimentales sont plus proches d'un profil « numérique / algébrique » et les réussites des élèves des classes non expérimentales sont déterminées par leur dépendance du contrat usuel de la classe.
C3 : les connaissances nécessaires aux conversions de registres ne sont pas acquises spontanément si l'apprentissage ne les a pas prévues.
C4 : le registre graphique favorise la réussite (les élèves sont plus à l'aise dans le registre graphique).
C5 : les élèves de la classe expérimentale sont plus familiers des fonctions « quelconques » (qui ne sont pas des fonctions de référence) que les élèves des classes non expérimentales.

I. 2.3 Discussion des conjectures

C1 : Dire que les élèves de la classe expérimentale sont plus proches d'un profil graphique, c'est dire que leurs connaissances sur les fonctions ont été fortement influencées par le milieu de l'apprentissage. Ceci devrait se voir dans leur réussite plus grande aux questions de type graphique, et éventuellement dans leur moindre réussite aux questions numériques / algébriques. Si cette conjecture est vérifiée, alors il sera pertinent de remettre en cause le milieu de la situation « graphiques et chemins » comme permettant de travailler sur le concept de fonction et d'effectuer un travail global sur cette notion, puisque ce milieu n'aura produit qu'un assujettissement différent, mais pas plus porteur de sens, que le milieu usuel. Cette conjecture s'éprouvera positivement sur les questions étiquetées « graphiques », et négativement sur celles étiquetées « numériques / algébriques ». Cependant il faut prendre en considération le fait que les élèves de la classe expérimentale ont une distance plus grande aux items du contrat classique, et donc que leur réussite moins grande à ces items peuvent venir d'un manque d'entraînement, par rapport aux élèves des classes non expérimentales.
C2 : C2 est le pendant de C1 pour les classes non expérimentales. Si C2 est vérifiée, cela signifie que les élèves des classes non expérimentales sont peu à l'aise dans les registres autres que ceux du contrat classique. C2 s'éprouve sur les mêmes questions que C1. La

même précaution est à envisager pour l'analyse des résultats, les élèves des classes non expérimentales n'ayant pas eu d'entraînement sur les questions relatives aux registres peu manipulés dans le contrat classique.

C3 : Cette conjecture a trait à la distinction entre connaissances acquises spontanément et effets d'apprentissage. Remarquons que, comme cela a été noté au chapitre 4 (IV. 1.4, page 39), certaines conversions sont spontanées mais non pertinentes. On peut considérer qu'une conversion est spontanée si elle n'a pas été proposée par le professeur, ou pas suggérée dans la question, et qu'elle est avérée dans les réponses des élèves. On peut le vérifier si l'on connaît une situation minimale correspondant à une conversion, c'est-à-dire une tâche ou une question que les élèves ne peuvent réussir sans conversion.

Cette conjecture s'éprouvera sur les questions faisant explicitement appel aux conversions. Parmi celles-ci, on distingue les conversions qui sont usuellement travaillées dans l'enseignement actuel (par exemple, de l'algébrique au graphique en passant par un tableau de valeurs numériques) de celles qui sont inhabituelles (par exemple du graphique à l'algébrique, ou du numérique aux tableaux de variations). C3 est vérifiée si les questions faisant explicitement appel à des conversions inhabituelles (Q6, Q8, Q9, Q11) sont moins réussies, en particulier par les élèves des classes non expérimentales, que les questions faisant appel à des conversions usuelles (Q5, Q7).

C4 : Cette conjecture a été introduite car le champ balayé s'y prêtait ; elle avait déjà été examinée par Lacasta (1995), qui avait conclu négativement. Nous nous attendons à voir confirmée cette conclusion. En particulier, les élèves des classes non expérimentales, qui n'ont travaillé du graphique que ce qu'en prévoit le programme usuel de la classe de Première S, n'ont pas de raisons d'être plus à l'aise dans ce registre. Cette conjecture est testable sur les questions relevant du graphique, soit a priori Q1, Q2, Q3, Q4, Q10, Q14. Parmi celles-ci, Q1 et Q2 peuvent être considérées comme des questions classiques, alors que Q3, Q4, Q10 et Q14 sont des questions plus déroutantes par rapport à l'enseignement de Première.

C5 : La vérification de cette conjecture signifie que l'enseignement expérimental a produit une connaissance qui ne se produit pas spontanément, à savoir la capacité à imaginer des fonctions en plus grands nombre et variété que celles qui sont habituellement présentées dans le cadre du programme de la classe de Première S. Cette capacité d'imaginer des fonctions variées est un des objectifs de l'apprentissage de la notion de fonction ; en effet, cette notion est introduite à fin d'interprétation et de modélisation de phénomènes variés de dépendance, comme le soulignent d'ailleurs les instructions du progamme. Il est donc envisageable d'introduire des fonctions en grand nombre, et de disposer d'une « réserve » importante de fonctions, si l'on veut que la notion de fonction soit opérationnelle dans des circonstances suffisamment variées, significatives et intéressantes.

Cette conjecture doit pouvoir se tester sur les questions Q3 et Q4, qui ont été posées dans ce but. (Elle aurait pu se tester aussi sur la question Q9 (voir II. 1) si cette question avait été donnée avec une meilleure formulation). Cette conjecture est, comme C3, associée à une hypothèse d'autonomie des élèves par rapport au savoir sur les fonctions : les connaissances permettant d'envisager des fonctions différentes de celles qui sont déjà connues, sont des outils de travail dans des situations inédites.

Afin de pouvoir tester ces conjectures, il faut maintenant définir la méthodologie d'étude du questionnaire. Ce sera fait en référence à Lacasta (Lacasta 1995, chapitre 2).

I. 3 QUESTIONS METHODOLOGIQUES

I. 3.1 Les objets mathématiques et les connaissances

a) Première question méthodologique

Les objets mathématiques testés sont les fonctions et les limites. Des situations modélisant les connaissances relatives à ces objets, ont été construites dans les chapitres précédents. Dans un questionnaire, les exigences vis à vis des instruments de reconnaissance de ces connaissances seront nécessairement moins fortes que dans des situations construites sur le long terme, et comportant des phases a-didactiques[90]. Il s'agit donc de déterminer les modalités de recueil des données, et ce que nous acceptons comme questions représentative d'une connaissance, sans estimer perdre complètement le sens de cette connaissance. Le premier problème méthodologique est donc de construire des questions dans lesquelles les formes de connaissances qui nous intéressent, et qui correspondent à des savoirs, sont contenues.

b) Deuxième question méthodologique

Les connaissances testées se manifestent sur des questions (des situations minimales) qui sont construites afin d'être significatives relativement à ces connaissances ; mais ceci nécessite de savoir à quoi reconnaître, dans une réponse, que la connaissance est manifestée. C'est donc de savoir identifier et définir un patron de réponse ou des patrons de réponse correspondant à différentes formes de la connaissance contenue dans la question, ou à une absence de cette connaissance. C'est l'étude a priori du fonctionnement d'une situation qui fournit ce patron de réponse.

c) Troisième question méthodologique

La troisième question est de relier les modèles théoriques de la connaissance (les situations modélisant cette connaissance) et les observations. Ainsi que le dit Lacasta :

> « L'approche scientifique de la didactique sera caractérisée par la possibilité de construire des patrons explicatifs théoriques consistants et de les confronter à une certaine contingence, et donc inversement par la possibilité d'interpréter des séquences observées en termes de nécessité et de hasard en leur faisant correspondre des connaissances. » (Lacasta 1995 p.29)

I. 3.2 Le plan d'expérience

Les ensembles des objets mathématiques (fonctions, limites) et des représentants choisis, des connaissances envisagées, et des autres variables qui vont être déterminées, permettent de définir un certain nombre de questions. Ces questions seront sans doute plus nombreuses que ce qui est acceptable pour que le questionnaire soit faisable par les élèves. Il faudra donc réduire le nombre de questions, tout en gardant un certain équilibre par rapport aux différents registres et aux variables supplémentaires introduites.

Les représentants des fonctions appartiennent aux registres numérique, algébrique, graphique, formel, et tableau de variations. D'autre part nous souhaitons tester les conversions entre registres, donc a priori dans les deux sens entre les cinq registres envisagés. A priori il faut donc envisager 5 questions sur le caractère partiel, 5 sur le caractère arbitraire, et A_5^2 soit 20 questions sur les conversions. On peut aussi prévoir de tester les modifications de la courbe / la fonction.

D'autre part des questions sur les limites sont à prévoir. Il est intéressant a priori de tester la sensibilité des élèves à l'ostension numérique, car c'est le paradigme de l'enseignement classique ; il serait aussi intéressant de savoir si les élèves peuvent réinvestir

[90] cf. Lacasta 1995, page 27 et suivantes

des connaissances sur la validation, mais la situation contenant ce type de connaissance peut être trop complexe pour que l'on puisse la simplifier dans un item de questionnaire. A défaut, il est sans doute possible de tester ce que les élèves peuvent restituer du rapport existant entre les termes d'une suite convergente et la limite de cette suite. Il faut donc compter 2 ou 3 questions.

Dans le prolongement des connaissances graphiques, il est souhaitable de tester le réinvestissement de ces connaissances relativement aux fonctions et à leurs dérivées, c'est-à-dire de savoir si les connaissances construites lors de l'étude des fonctions sur un milieu graphique, « contiennent » des connaissances sur l'allure de la RGC de la dérivée f' d'une fonction f. C'est d'autant plus intéressant que ces connaissances sont sollicités ultérieurement, par exemple lors de l'étude qualitative des équations différentielles.

Le total des questions envisageables nous amène à 35 environ, ce qui est incompatible avec des conditions de passation convenables. Il paraît raisonnable de réduire à environ la moitié, ce qui est encore beaucoup : on obtient ainsi 4 questions sur le caractère partiel et arbitraire des représentants (numérique, graphique, tableau de variations) ; 6 questions sur les conversions (algébrique —> numérique , graphique —> algébrique , algébrique —> graphique, numérique —> graphique, numérique —> tableau de variations, formel —> numérique) ; 2 questions sur les limites ; 1 questions sur l'identification de la RGC de la fonction dérivée d'une fonction donnée sous forme de RGC ; 1 question sur les transformations (« fonctions associées »).

Ces questions sont alors décomposées en items (voir II. 2.4).

I. 3.3 Méthodologie d'analyse des réponses

Les connaissances attachées aux questions (la réponse à la question est « explicable » par la connaissance) étant définies, il est possible de définir une matrice des occurrences de connaissances relativement à l'ensemble des questions.

Les réponses des élèves permettent, quant à elles, de construire la matrice active, dont les lignes sont des observations (des caractères, ici les individus testés) et les colonnes des variables contingentes contrôlées, ici les réussites ou échecs aux items.

D'autre part dans le chapitre 4 , des propriétés du graphique (et des ostensifs en général) avaient été étudiées, en particulier leur caractère partiel et ambigu. Ces propriétés peuvent apparaître dans des réponses, ou constituer une composante identifiée dans une question par celui qui l'a posée : dans le premier cas l'apparition sera dite contingente, dans le deuxième cas il s'agit d'une variable proposée comme explicative. Il y a donc une matrice explicative des variables. Rappelons que le caractère explicatif d'une variable est à contrôler par la vérification des dépendances a priori (cf. Lacasta 1995 p. 38).

Sur ces matrices une analyse en composantes principales (ACP) et des analyses factorielles de correspondances (AFC) permettront de déterminer les axes principaux et les questions ou variables liées, et d'interpréter ces axes par rapport aux variables supplémentaires. L'analyse statistique est donc menée en fonction de ces différents types de variables, ce qui permettra d'essayer de voir si les questions sont effectivement expliquées par les variables supplémentaires.

II ANALYSE A PRIORI DU QUESTIONNAIRE

II.1. ANALYSE DES QUESTIONS

II. 1.1 Structure du questionnaire

a) Les fonctions

Les connaissances qu'il est prévu de tester (cf. I. 3) concernent les registres de représentation des fonctions ; il est prévu de tester les registres graphique, numérique, algébrique, formel, et tableaux de variations. Les connaissances sur ces registres ont trait au caractère partiel et arbitraire des représentants, et aux conversions entre registres. A priori il faut donc envisager 5 questions sur le caractère partiel, 5 sur le caractère arbitraire, et A_5^2 soit 20 questions sur les conversions. En fait il faut restreindre pour des raisons de faisabilité : nous pouvons tester le caractère partiel et arbitraire sur les mêmes questions, et seulement pour les registres graphique et numérique par exemple. En effet pour les autres registres c'est plus problématique : tester ce caractère pour les registres algébrique et formel ferait sortir du champ de problèmes accessible à un élève de ce niveau.

Pour les conversions nous sommes amenés aussi à réduire, et donc certaines ont été éliminées :

— soit parce que le transfert était couramment traité dans l'enseignement traditionnel, et donc il nous paraissait inutile de vérifier les connaissances des élèves sur ce point ; les conversions usuelles comme numérique —> graphique ou algébrique —> numérique n'ont pas beaucoup d'intérêt : en principe tous les élèves de Première scientifique savent placer un point de coordonnées données, ou remplacer x par une valeur dans une formule ; une question de vérification des ces connaissances a cependant été prévue ;

— soit parce qu'il paraissait peu commode de le tester à ce niveau ou que cela aurait contribué à trop alourdir le questionnaire, au détriment de connaissances qu'il nous semblait important et nouveau de tester (c'est le cas du lien algébrique / formel, qui n'a pas été testé).

Remarquons d'autre part qu'a priori un transfert peut être testé dans les deux sens ; nous ne l'avons fait que dans l'un des deux en général, toujours pour des raisons de faisabilité du questionnaire. Certaines conversions peuvent être testées dans les deux sens dans la même question (par exemple dans Q11, pour comprendre la question il faut passer du formel au numérique, et pour donner la réponse il faut passer du numérique au formel).

Un point qui a fait l'objet d'une recherche systématique dans le questionnaire, est l'assujettissement des élèves aux fonctions qu'ils ont fréquentées le plus, et en particulier aux fonctions affines. En effet le fait de répondre que trois points ou plus, qui paraissent alignés, sont nécessairement des points de la RGC d'une fonction affine, peut être une marque d'un fort assujettissement aux connaissances du collège, et donc d'une moindre prise en compte des connaissances nouvelles du lycée sur les fonctions. Cependant on peut également l'interpréter comme la marque d'une compréhension du contrat graphique : si les points ont l'air alignés, on n'essaie pas de chercher une fonction autre qu'affine. En physique en particulier, c'est ce contrat qui prime ; il prime aussi en mathématiques, sauf dans quelques circonstances bien précises (test sur l'alignement par exemple).

Par ailleurs une question a été ajoutée sur la lecture graphique d'une fonction et de sa dérivée (Q14) ; et une question sur la lecture de l'ensemble image d'une fonction somme $f + g$ à partir de la RGC des deux fonctions f et g. La réussite à cette question est, selon nous, la preuve d'un très bon niveau de maîtrise du graphique et des propriétés des fonctions à ce stade de la scolarité, et ce d'autant plus que les fonctions choisies sont des fonctions trigonométriques dont le moins qu'on puisse dire est que les élèves ne les apprécient pas particulièrement.

b) Les limites

Deux questions ont été prévues sur les limites ; elles sont un peu hétérogènes au reste du questionnaire. La première concerne l'ostension numérique et les limites, et a pour but de tester si l'ostension numérique est un modèle très prégnant pour les élèves, en particulier ceux qui n'ont pas suivi l'enseignement expérimental ; mais pour des raisons évidentes, il est intéressant de voir si l'enseignement expérimental rend ou non méfiant vis à vis de l'ostension numérique.

La deuxième question porte sur les suites géométriques ; elle vise à mettre en évidence le niveau de contrôle des élèves de ce niveau quant à des suites plus complexes. Nous faisons l'hypothèse que presque tous les élèves savent qu'une suite géométrique positive, de raison inférieure à 1, est décroissante ; par contre nous pensons que la série géométrique associée n'est pas identifiée comme une suite croissante, bien qu'il soit évident qu'elle le soit. L'hypothèse faite porte sur l'insuffisance du milieu numérique classique pour le contrôle des propriétés des suites. Il serait intéressant de voir si les élèves de la classe expérimentale, qui ont travaillé sur un milieu objectif mettant en évidence cette croissance, sont plus capables de transférer ce type de connaissance dans une situation décontextualisée.

II.1.2 Analyse des questions retenues

Les textes des questions sont rappelés en italique ; les graphiques figurent en annexe.

Q1: *On représente dans un repère (O,**i**,**j**) la fonction f définie par: $f(x) = -x^3$. Parmi les graphiques ci-dessous, lesquels ne peuvent pas appartenir à la représentation graphique de f? Expliquer pourquoi.*

Cette question teste la lecture graphique d'un certain nombre de propriétés (croissance, décroissance, éventuellement convexité) sur une courbe connue des élèves. Elle vise aussi à tester si les élèves invoquent le modèle linéaire dans un cas où il n'est pas pertinent, et donc s'ils sont conscients de la « déformation » des branches de la courbe dans une RGC, suivant le repère choisi ; c'est-à-dire s'ils sont conscients de ce que la courbe pourrait être la RGC d'une classe de fonctions, dont certaines éventuellement linéaires.

Q2: *Les graphiques ci-dessous représentent une même fonction f sur 3 intervalles, dans des repères différents. Donner le tableau de variations de f sur **R**.*

Q2 vise à savoir si les élèves sont capables de reconstituer le tableau de variations d'une fonction à partir d'informations partielles données dans le désordre.

Q3: *La représentation graphique d'une fonction passe par les points d'abscisse entière ci-dessous. Alors peut-on dire que:*

a) f est du second degré: Vrai ❑ Faux ❑ Indécidable ❑
b) f est affine: Vrai ❑ Faux ❑ Indécidable ❑

Cette question teste le caractère partiel et arbitraire des fonctions. Cependant le contrat sur lequel se base cette question est une rupture par rapport au contrat habituel, même pour les élèves de la classe expérimentale : en effet pourquoi ne pas imaginer que la fonction cherchée est la plus simple possible, même si l'on sait qu'il peut en exister d'autres. En effet le contrat didactique relatif à la résolution de problèmes sur les fonctions est régi par un ensemble de règles :

- s'il semble s'agir de fonctions de référence, même si l'on connaît d'autres fonctions, on ne complique pas arbitrairement ;

- si on connaît une partie de la RGC, on doit induire le reste sans prévoir de « monstruosités » (en continuité avec le morceau connu) ;
- les données sont suffisantes, donc les indices supplémentaires sont là pour des raisons didactiques ;
- ce qu'on doit voir est montré directement, et la fenêtre contient toutes les singularités. S'il y avait une courbure, elle ne pourrait pas être aussi minime.

(Cette analyse s'applique aussi à Q1).

Cependant dans un test, le contrat didactique est différent : une partie du contrat habituel est violée, on pose des questions « pièges » et l'élève le sait. Le contrat habituel donne des **règles d'action** ; le contrat du test peut être basé sur des **règles de savoir**. Mais si l'élève ne sait pas remettre en cause les règles d'action du contrat habituel, il ne saura cependant pas répondre aux questions. Même s'il se doute que le contrat est caduque, il ne saura pas comment agir *autrement* que par rapport à lui.

Q4: *La représentation graphique d'une fonction f passe par les points d'abscisse entière du graphique ci-dessous.*

Peut-on dire que:

a) la fonction f admet un minimum?

Vrai ❑ *Faux* ❑ *Indécidable* ❑

b) si f admet un minimum pour x = a, c'est pour:

a=3 ❑ *autre à préciser* ❑ *Indécidable* ❑

Cette question teste les mêmes caractères des RGC (partiel et arbitraire). Les points placés sur la RGC le sont toutefois d'une façon (ils sont alignés) qui induit la réponse « minimum pour x = 3 », simplement parce qu'il est plus facile de tracer ainsi une RGC continue. Rappelons que c'est une question de Schwarz et Dreyfus, mais dans leur question il était affirmé que f avait un minimum. Il paraîtrait judicieux de donner cette question avec des points non alignés, ici l'alignement des points est parasite par rapport aux objectifs. On peut penser qu'une RGC de fonction, dont on connaît 5 points, peut être interprétée comme celle de la fonction *la plus simple* dont la RGC passe par ces points, s'il n'y a pas de spécification contraire.

Q5: *Le graphique ci-dessous appartient à la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. D'après ce graphique est-il possible de dire, au sujet de l'équation $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, que:*

a) on ne connaît pas ses solutions; il faut trouver une méthode algébrique pour résoudre cette équation. ❑

b) -12 est solution, car quand x=0, y=-12. ❑

c) -3,-2 et 2 sont solutions. ❑

Q5 teste la capacité de lecture des racines d'une fonction polynôme sur sa RGC. Remarquons cependant qu'elle aurait dû être posée avec une fonction polynôme du quatrième degré au moins, ce qui aurait permis de voir si les élèves étaient conscients de la nécessité de trouver la racine manquante ; telle quelle, il est très peu probable que les élèves se posent la question de l'obtention de la totalité des racines. Telle quelle, c'est une question qui est très proche de celles posées dans le contrat classique. S'il y a des réponses a) , on pourra les attribuer vraisemblablement à une méfiance par rapport à la lisibilité du graphique. La validation algébrique est possible ; il n'est pas sûr que les élèves en ressentent la nécessité, on s'attend plutôt à une « lecture graphique » sans contrôle algébrique.

Q6: *La courbe **F** ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f. Parmi les équations ci-dessous, lesquelles ne peuvent pas être une équation de la courbe **F** ? (expliquez)*

Cette question permet de tester l'existence de la conversion graphique / algébrique. Les raisons invoquées peuvent avoir trait aux asymptotes (As) ou aux racines (Ra). Parmi les équations proposées, 3 sont celles de RGC de fonctions ayant les mêmes asymptotes, 4 ont la même racine -1, 2 n'ont ni la même racine ni les mêmes asymptotes. Trois équations peuvent être éliminées, les trois autres correspondent à des équations de F équivalentes. Cette question est à la portée de tous les élèves de Première, mais on peut s'attendre à une meilleure réussite des élèves de la classe expérimentale.

Q7: *La fonction f vérifie : f(1)=3 ; f(1,1)= 3,1 ; f(1,2)=3,3 ; f(1,3)=3,6 ; f(1,4)=4 ; f(1,5)=4,5 ; f(1,6)=5 ; f(1,7)=5,4 ; f(1,8)=5,7 ; f(1,9)=5,9 ; f(2)=6. Quel est, parmi les graphiques ci-dessous, celui qui correspond le mieux à f?*

Cette question permet de tester l'existence de la conversion graphique / numérique. On peut s'attendre à une bonne réussite, dans la mesure où c'est un lien travaillé dans le curriculum actuel. Certes on peut penser que le sens n'est pas habituel, puisque c'est le graphique qui est donné ; mais la procédure de résolution la plus probable est de tracer une courbe avec les données numériques, et de la comparer à celles qui sont fournies.

Q8: *L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f(x) existe. Par exemple l'ensemble de définition de la fonction $x \to \sqrt{x}$ est **R+.** <u>L'ensemble image</u> d'une fonction f est l'ensemble des valeurs que prend f(x), soit graphiquement l'ensemble des valeurs de y qui ont un antécédent. Par exemple l'ensemble image de la fonction cosinus est : $[-1,1]$. Le graphique ci-dessous est celui des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0,2\pi]$. Peut-on dire que l'ensemble image de la fonction f définie par: f(x)=sinx + cosx est:*

a) $[-2,2]$ ❑ *b)* $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ ❑ *c)* $[0,2\pi]$ ❑
d) $[-1,1]$ ❑ *e) autre (lequel?):* ❑

Cette question teste la conversion graphique / numérique, mais en demandant une réponse sous forme **d'intervalle**, donc prise en compte au moins implicite d'une quantification. A notre sens elle teste aussi la possibilité de valider par le graphique, en traçant le RGC de la fonction somme. Elle devrait être mieux réussie par les élèves de la classe expérimentale, qui ont déjà eu à tracer des RGC de sommes de fonctions.

Q9 : *On donne ci-dessous un tableau de valeurs de la fonction f. Donnez le tableau de variations de f sur* $[-3,3]$*, tel qu'on peut le déduire de ce tableau de valeurs.*

Q9 a pour but de tester la conversion numérique / tableau de variations, et la prise en compte de l'ordre dans les valeurs numériques, puisqu'il faut réordonner le tableau numérique. Mais telle qu'elle est posée, elle ne teste pas le caractère partiel des tableaux de variations, qui avait été signalé au chapitre 4 (un tableau de variations est le tableau d'une classe de fonctions ; ou, un même tableau de valeurs peut correspondre à plusieurs tableaux de variations différents). La question posée renforce même l'implicite du contrat didactique, le fait de donner « le » tableau de variations, comme si cette opération était transparente et non problématique. La question devrait être modifiée, par exemple en demandant justement deux tableaux de variations différents correspondant à ce même tableau de valeurs.

Q10: *La courbe C1 ci-dessous représente la fonction f définie par:* $f(x)= 1/2\ (x-3)^2$ *. Peut-on dire que C2 est la courbe représentative:*

a) de la fonction f_1 *telle que* $f_1(x)=f(3x)$ *?* ❑ *b) de* f_2*:* $f_2(x)=f(1/3\ x)$*?* ❑
c) de la fonction f_3 *telle que* $f_3(x)= 1/3\ f(x)$ *?* ❑ *d) de* f_4*:* $f_4(x) = 1/3\ f(3x)$ *?* ❑

Cette question teste les transformations géométriques des RGC, en rapport avec l'équation algébrique de la courbe. Ici la transformation est l'affinité d'axe Oy, de direction Ox, de rapport 1/3 . Les élèves des classes non expérimentales sont peut-être plus entraînés à ce type de question, car l'étude des équations du type y = f(ax) , y = af(x) , y = f(x - a) , etc …, en rapport avec les modifications de la RGC, fait partie du curriculum de la classe de Première S. Cependant un élève « numérique » a peu de chances de réussite car pour x = 1, a) et d) conviennent ; et pour x = 0, a) et b) donnent la même réponse. Un élève qui raisonne sur le graphique, ou sur les propriétés globales du graphique, est donc en meilleure posture pour répondre ; on pourrait attendre des raisonnements comme : « x est 'dilaté' donc la courbe est 'rétrécie' » ; ou « une valeur de y sur la courbe C_2 correspond à la même valeur de y que sur

C_1, mais pour x trois fois plus grand ». Cependant la question ne demandait pas de justification. Une raison en est le temps : de façon générale, le questionnaire est trop long. Il est difficile de disposer de classes de ce niveau, pour la passation d'un tel test ; c'est ce qui a conduit à tenter de tester, peut-être de façon excessive, un maximum de connaissances.

Q11: *La fonction f, définie sur* ***N*****, est telle que f: $n \to n-1$; g est définie sur* ***N*** *et g: $n \to 3n$.*

Laquelle de ces écritures correspond au calcul de gof(5)? (justifiez): a) $5 \xrightarrow{g} \xrightarrow{f} 14$ ❑ b) $5 \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} 18$ ❑ c) $5 \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} 12$ ❑ d) $5 \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} 64$ ❑

Cette question teste le rapport formel / numérique, et même dans un premier temps la compréhension et l'interprétation correcte des écritures formelles telles que *gof*, et des écritures fléchées comme symboles de correspondance fonctionnelle. La réponse a) correspond au schéma n —> 3n -1 soit *fog (5)* ; b) à n —> 3 (n + 1) ; c) est la réponse correcte correspondant à n —> 3 (n - 1) ; d) correspond à $(n + 3)^2$.

Q12: *La suite (u_n) est définie par: $\forall$ n>0, $u_n = (-1)^n + 2/n$. On donne le tableau de valeurs joint.*

Peut-on dire que: a) (u_n) a pour limite 1 ❑ b) (u_n) n'a pas de limite ❑

c) (u_n) a deux limites. ❑ (Justifiez votre réponse).

Cette question vise à mesurer l'importance de l'influence de l'ostension numérique, et les capacités de validation des élèves CONTRE l'ostension numérique. Elle devrait être mieux réussie par les élèves de la classe expérimentale. D'autre part, il faut s'attendre, dans les justifications, à rencontrer celles qui ont été signalées au chapitre 3, à savoir des « justifications » PAR les symboles de limite ; et ceci, sans doute autant chez les deux types d'élèves.

Q13: *La suite (u_n) est une suite géométrique; sa raison est 0,75 et son premier terme $u_0 = 1$.*

La suite (T_n) est définie par: $T_n = 1+0,75+(0,75)^2+...+(0,75)^{n-1}$

On peut calculer que: $T_n = 4\left(1 - (0,75)^n\right)$ *Peut-on dire que:*

a) la suite (u_n) est croissante ❑ est décroissante ❑ ? (Justifiez vos réponses)

b) la suite (T_n) est croissante ❑ est décroissante ❑ ?

c) T_n peut atteindre 3,98 m, si n est assez grand: oui ❑ non ❑

d) T_n peut atteindre 4,02 m, si n est assez grand: oui ❑ non ❑

Q13 teste le contrôle sur les suites, et le rapport entre la limite et les valeurs prises par la suite. A priori on peut attendre des justifications en termes de savoir pour *(u_n)* car c'est une suite géométrique dont le comportement est supposé connu des élèves ; mais pour *(T_n)* les élèves ne peuvent plus avoir recours à des savoirs institués, leur contrôle est donc affaire de connaissances ; par exemple on peut avoir des arguments comme : « On rajoute des termes positifs » pour la croissance ; on peut aussi avoir : « *(T_n)* est décroissante » par analogie avec *(u_n)* . Pour la valeur atteinte, on peut avoir des arguments du type « croissance majorée », ou des arguments relatifs à la formule donnée (T_n est égale à 4 *moins* quelque chose).

Q14: *La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous. Parmi les trois représentations graphiques a, b, c, quelle est la seule qui puisse représenter f', la dérivée de f?*

Cette question classique vise à vérifier la lecture graphique de signe de f' en relation avec les variations de f. C'est une question graphique donc, mais a priori elle devrait être réussie également par les différents types d'élèves.

II. 2 VARIABLES CONTROLEES DU QUESTIONNAIRE ET CODAGE DES REPONSES

A la suite de cette étude les variables suivantes ont été retenues :

II. 2.1 Variable contingente de réussite

Cette variable notée R concerne les questions 1, 2,5, 6,7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

II. 2.2 Variables explicatives relatives à l'utilisation d'un ostensif et son répertoire

— G : traitement graphique ; nous entendons par là que le graphique est un outil pour l'intuition, ou la validation, pour la question. G concerne les questions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, mais dans 5, 6, 7, 8 nous considérerons plutôt la forme « transformation du répertoire » donc les variables de passage d'un répertoire à un autre. Dans les autres questions, la variable G est difficilement repérable en tant que telle (à quoi peut-on reconnaître que c'est l'intuition graphique qui a déterminé la réponse ?) donc nous ne la coderons pas.

— P : caractère partiel d'un ostensif. Comportement associé : prise en compte du caractère partiel d'une information graphique, numérique, algébrique, formelle. Cette variable sera notée 1 si le caractère partiel est reconnu (dans la réponse, mais pas forcément explicitement) ; 0 sinon. Questions concernées : 3, 4.

— Ar : caractère arbitraire d'un ostensif. Comportement associé : prise en compte du caractère arbitraire d'une information graphique, numérique, algébrique, formelle. Cette variable sera notée 1 si le caractère arbitraire est reconnu (dans la réponse, mais pas forcément explicitement) ; 0 sinon. Questions : 3,4.

— L : caractère linéaire dans un item. Comportement associé : prise en compte de façon privilégiée du caractère linéaire d'une information. Cette variable sera notée 1 si l'élève privilégie l'interprétation linéaire, sans indication sur la courbe ou même en présence d'indications contraires ; 0 sinon. Questions : 1,3.

— Va : utilisation du sens de variations. Questions : 1,4.

— Li : existence de connaissances relatives aux limites dans un item ; sera codée 1 s'il y a prise en compte des limites dans le raisonnement, ou indication des limites dans le résultat, 0 sinon. Questions 2, 12, 13.

— Tv : existence de tableau de variations ; sera codée 1 pour un raisonnement correct sur un tableau de variations, 0 sinon. Questions 2, 9. Ici Tv se confond avec R, donc le seul codage retenu sera celui de R.

— F est la variable correspondant aux questions justifiables par utilisation du répertoire formel dans la justification et concerne les questions 11, 12, 13. La réponse sera codée 1 si le répertoire formel est utilisé dans la justification, 0 sinon.

— N est la variable du répertoire numérique relative à la réponse ou aux justifications et intervient dans les questions 7, 9, 10, 11, 12, 13.

II. 2.3 Variables relatives aux transformations de répertoire entre ostensifs graphiques, algébriques, numériques, formels.

Ces variables seront notées 1 si la conversion entre répertoires est faite, 0 sinon. A priori on peut considérer que tous les liens peuvent être étudiés, mais les items retenus ne permettront pas de tester toutes les combinaisons.

— GA : graphique / algébrique questions 5, 6, 8, 10. GA concerne la question 8, bien que la réponse ne soit pas prévue sous la forme algébrique ; en effet la fonction est donnée sous forme algébrique et le travail à faire est un travail graphique (image des valeurs conduisant à l'image d'un intervalle, sur la RGC).

Cette variable étant trop générale pour analyser certains items, nous considérons également deux variables observables AS : existence d'asymptotes (1 si prise en compte correcte des asymptotes ; question 6) et RA : utilisation des racines des polynômes (1 si utilisation correcte des racines d'un polynôme et de leur « visualisation » graphique ; questions 5 et 6).

— GN : graphique / numérique. Question 7.
— GF : graphique / formel. Question 8.
— AF : algébrique / formel. Rapport non testé.
— AN : algébrique / numérique. Question 5.
— NF : numérique / formel. Question 12.

II. 2.4 Bilan des variables par question

Pour conserver le maximum d'informations en traitant les réponses, certaines questions ont été décomposées en items, relatifs chacun à une courbe ou à une suite ou limite. Ceci permettra d'examiner plus en détail la mise en œuvre de certaines connaissances dans les réponses à ces questions. Il s'agit des questions :

— Q1 : variables 1a, 1b, 1c, 1d correspondant à chaque courbe ;
— Q3 : variables correspondant aux réponses croisées possibles de a) et b), soit :

Q3a : F-V - P :0 ; Ar :0.	Q3c : F-Ind - P :1 ; Ar :0.	Q3e : Ind-F - P :1 ; Ar :1.
Q3b : F-F - P :0 ; Ar :1.	Q3d : Ind-V - P :0 ; Ar :0.	Q3f : Ind-Ind - P :1 ; Ar :1.

Etant donné que Vrai au a) n'est pas apparu, il n'a pas été codé ; il est néanmoins présent dans le questionnaire car son absence aurait pu induire la réponse. La variable P sera codée 1 si « vrai » n'est pas coché dans la réponse au b), sauf la réponse F-F, difficilement interprétable et qui n'est d'ailleurs apparue que trois fois.

La variable L (linéaire) sera codée 1 si 3a, car c'est le profil type de l'élève "qui croit ce qu'il voit", en particulier une courbe est une droite si les points "ont l'air" alignés.

La variable Ar sera codée 1 si Q3b ou Q3c ou Q3e ou Q3f. Remarquons que les variables P et Ar sont difficiles à discriminer, nous n'avons pas réussi à construire des items qui les différencient de façon vraiment significative.

— Q4 : même chose, mais ici il y a plus de combinaisons possibles, soit : en tout 9 combinaisons pour a) et b). Nous nous attendons à trouver majoritairement a) vrai (f admet un minimum) et ce minimum a lieu pour x = 3. Les neuf variables de Q4 sont donc :

Q4a : V- 3	Q4d : F-3	Q4g : Ind- 3
Q4b : V-autre	Q4e : F-autre	Q4h : Ind-autre
Q4c : V-ind.	Q4f : F-ind.	Q4i : Ind-Ind

Ind signifiant « indécidable ». La variable P sera alors codée 1 s'il y a prise en compte au moins partielle du caractère partiel de l'information donnée par les points, soit au moins la réponse « autre » ou « indécidable » au b) : c'est-à-dire si 4b, ou 4c, ou 4e, ou 4f, ou 4g ou 4h ou 4i ; 0 sinon.

La variable Ar sera codée 1 dans cette question si 4f, ou 4i, ou 4e, ou 4h.

On obtient donc le tableau récapitulatif de la prise en compte des résultats de Q4 avec P et Ar :

Q4a : P : 0 ; Ar : 0.	Q4d : P : 0 ; Ar : 0.	Q4g : P :1 ; Ar : 0.
Q4b : P : 1 ; Ar : 0.	Q4e : P : 1 ; Ar : 1.	Q4h : P : 1 ; Ar : 1.
Q4c : P : 1 ; Ar : 0.	Q4f : P : 1 ; Ar : 1.	Q4i : P : 1 ; Ar : 1.

— Q5 : R sera codée 1 si c) est coché, ou c) et a) ; 0 si a) seul , ou b).

— Q6 : on code R, les racines RA, les asymptotes AS (dans les explications ou le résultat).

— Q7 : R si réussite ;

— Q8 : variables a, b, c, d, e correspondant aux cases cochées ; R correspond à b.

— Q9 : R si réussite.

— Q10 : variables a, b, c, d correspondant aux items ; R correspond à b.

— Q11 : variables a, b, c, d correspondant aux items ; R correspond à c ; la justification, si elle est donnée, sera codée par F (formel) ou N (numérique).

— Q12 : a, b, c, sont les variables correspondant aux cases à cocher, les explications concernent les variables F et N. R correspond à b.

— Q13 : a, b, c, d sont les variables correspondant aux cases à cocher, les explications relevant là aussi de F ou N. R correspond au patron 1 1 1 1.

— Q14 : a, b, c sont codées. R s'identifie avec la case c.

II. 3 TABLEAU RECAPITULATIF DES QUESTIONS ET DES VARIABLES GENERALES

Variables: Questions	R	G	P	Ar	L	Va	Li	F	N	GA	AS	RA	GN	GF	NF
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
7	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
10	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
13	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
14	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Rappel des variables : R réussite ; G graphique ; P caractère partiel ; Ar caractère arbitraire ; L linéaire ; Va sens de variations ; Li limites ; F formel ; N numérique ; GA graphique / algébrique ; AS asymptotes ; RA racines ; GN graphique / numérique ; GF graphique / formel ; NF numérique / formel.

III. ANALYSE DES REPONSES

Le questionnaire a été passé par 124 élèves, dont 29 de la classe expérimentale. Ces élèves ont répondu aux questions en une heure, le même jour à la même heure ou à des heures successives, de telle sorte qu'une communication soit rendue impossible. Le questionnaire était anonyme, ce qui n'était peut-être pas judicieux pour assurer du sérieux des réponses de tous les élèves ; de plus cela interdisait d'interroger ultérieurement de façon plus détaillée quelques élèves sur leurs réponses. Il n'était donc pas présenté comme une évaluation individuelle, mais comme un test d'évaluation des connaissances de l'ensemble des élèves de Première scientifique de l'établissement.

Les réponses figurent en annexe, ainsi que les graphiques référencés dans la suite du texte.

III.1. ANALYSE QUALITATIVE

III. 1.1 Analyse question par question

— Q1

La question Q1 est réussie globalement par 72% des élèves. Cependant, elle est réussie par seulement 62% des élèves de la classe expérimentale, contre 77% pour les autres élèves. D'autre part, dans la classe expérimentale comme dans les autres classes 20% des élèves attribuent les graphiques 1 et 4 à des fonctions affines. Cette question était présente dans le questionnaire de Schwarz et Dreyfus ; les classes expérimentales ayant suivi l'enseignement avec le logiciel TRM obtiennent entre 43 et 68% de réussite, contre de 40 à 56% pour les autres, soit une différence certaine mais faible.

— Q2

Cette question est réussie par 83% des élèves, avec un léger avantage pour les classes non expérimentales ; les limites ne sont portées sur le tableau de variations que par 70% des élèves. Cette question est également présente dans le test de Schwarz et Dreyfus, avec une réussite culminant à 83% pour l'une des classes expérimentales, contre 31 à 57% pour les classes témoins.

— Q3

Sur cette question les comportements des élèves expérimentaux et des autres ne diffèrent pas sensiblement : une majorité (76%) interprète les points comme étant une partie d'une RGC de fonction affine. On peut interpréter cette convergence comme un signe de ce que les élèves, confrontés à des points semblant alignés, ne jugent pas nécessaire de recourir à des fonctions plus complexes que des fonctions affines pour rendre compte de la RGC. Cette interprétation probable avait été signalée dans l'analyse a priori des questions.

— Q4

Par contre la question Q4 donne lieu à des réponses nettement différenciées : si seuls 3% élèves des classes non expérimentales optent pour la réponse Q4-i, ils sont 24% dans la classe expérimentale. La réponse Q4-a est elle choisie par 80% des élèves non expérimentaux, conte 58% des élèves expérimentaux. Sur l'ensemble des items, 41% des élèves expérimentaux choisissent une réponse conduisant à une prise en compte du caractère partiel, et 31% à une prise en compte du caractère arbitraire, contre 20% et 11% pour les classes non expérimentales. On peut sans doute voir là un effet de l'enseignement ; en effet les élèves de la classe expérimentale ont beaucoup plus de pratique sur des fonctions quelconques dans un milieu graphique, comme il a été dit.

Cette question est présente dans le test de Schwarz et Dreyfus ; les résultats vont de 47 à 72%, mais il est impossible d'interpréter les résultats car Schwarz et Dreyfus ne donnent pas les critères de réussite.

— Q5

Cette question est réussie par 88% des élèves, c'est une question classique dans l'enseignement français. Les élèves de la classe expérimentale la réussissent un peu moins bien ; il faudra étudier si les différences de réussite sont significatives. Cette question est présente dans le questionnaire de Furinghetti et Somaglia ; les réussites, pour des élèves de 16 ans et plus, vont de 61 à 71%.

— Q6

La question Q6 est réussie de façon inégale : les élèves de la classe expérimentale ont une réussite de 52%, contre 38% pour les élèves des classes non expérimentales. Les élèves non expérimentaux utilisent sensiblement plus les racines que les élèves expérimentaux (30% contre 14%). Etant donné que l'utilisation des asymptotes est légèrement supérieure pour les élèves de la classe expérimentale (65% contre 60%) il faut peut-être en conclure que les élèves de la classe expérimentale s'appuient davantage sur les implicites du graphique, ou qu'une habitude plus grande de l'interprétation graphique les avantage. Pour ce qui est de la conversion graphique / algébrique, 62% des élèves expérimentaux la réussissent contre 46% des élèves non expérimentaux.

— Q7

Cette question lie numérique et graphique, donc c'est une question faisant appel à des connaissances classiques à ce niveau, même si sa forme est inhabituelle. Elle est effectivement mieux réussie par les élèves non expérimentaux (52% contre 34%), sans que la réussite soit très grande. Cette question était présente dans le questionnaire de Schwarz et Dreyfus ; elle était réussie de 69% à 84% pour les élèves expérimentaux, de 29 à 74% pour les classes témoins. La procédure employée peut-être de reconstruire la courbe à partir des données numériques, c'est du moins la plus simple. Le taux d'échec relativement important est peut-être dû au fait que le graphique n'était pas quadrillé ni gradué, rendant une estimation « à vue » hasardeuse. Il est aussi possible que cette réussite mitigée témoigne de la difficulté des élèves à prendre en compte une information numérique trop abondante et concernant des valeurs assez rapprochées ; qu'ils aient également des difficultés à choisir un repère, et une échelle, permettant de visualiser des valeurs ne différant que de 0,1. On peut sans doute conclure que la réussite mitigée de cette question reflète les difficultés des élèves dans la conversion numérique / graphique.

— Q8

Cette question est mieux réussie par les élèves de la classe expérimentale (38% contre 27%). Dans les classes non expérimentales, plus de la moitié des élèves choisissent les réponses a ou d, c'est-à-dire [-2,2] ou [-1,1] . La réponse c est choisie par 6% des élèves des deux échantillons. On peut considérer que cette question teste la conversion graphique / formel, or cette conversion paraît peu familière aux élèves, ce qui explique le taux de réussite peu élevé.

Cette question est présente dans le questionnaire de Furinghetti et Somaglia ; la réussite est de 12% pour les élèves de seize ans, de 31% pour ceux de dix-sept ans, et 38% pour ceux de dix-huit et dix-neuf ans. Les taux sont donc comparables.

— Q9

Cette question lie numérique et tableau de variations, donc c'est une question faisant appel à des connaissances classiques à ce niveau, même si sa forme est inhabituelle. Elle est réussie par 60% des élèves dans les deux échantillons. Ce qui est surprenant (au-delà des critiques sur la forme de cette question, qui ont été faites plus haut) c'est que 40% d'élèves de niveau Première scientifique aient des difficultés à relier des informations numériques sur une fonction et un tableau de variations. Ce résultat devrait être confirmé par d'autres items (il l'est en partie par les réponses à la question 7), mais il pose la question de savoir si les compétences numériques, sur lesquelles l'enseignement à ce niveau s'appuie explicitement dans l'organisation classique, sont bien acquises par les élèves de ce niveau.

Par ailleurs les élèves ne prennent manifestement pas un tableau de valeurs comme isomorphe à un tableau de variations, puisqu'ils s'autorisent à sauter des valeurs pour donner le tableau de variations. Cet aspect des tableaux est donc bien assimilé.

— Q10

Cette question est relativement peu réussie : 34% des élèves non expérimentaux, et 20% seulement des élèves de la classe expérimentale. Les réponses fausses se répartissent, dans les classes non expérimentales, équitablement entre les trois qui étaient proposées (34%, et 18% pour les autres réponses fausses, et 12% de non réponses). Par contre les élèves de la classe expérimentale ont choisi en majorité (34%) la réponse b correspondant à y = f(1/3 x) , c'est-à-dire que la transformation a été identifiée comme portant sur x, mais avec une inversion du coefficient. De plus seul 1 élève sur 29 a choisi la réponse fausse d, contre 17 (18%) dans les classes non expérimentales.

— Q11

Q11 est réussie par 71% des élèves, avec un léger avantage aux classes non expérimentales. Les justifications données sont à la fois formelles - algébriques (écriture de composées, et calcul avec l'image d'un entier n quelconque) et numériques. On peut en conclure que la majorité des élèves de ce niveau maîtrisent le sens de la composition des fonctions, et son traitement à l'aide d'ostensifs soit formels soit numériques.

— Q12

Cette question est réussie par 38% des élèves de la classe expérimentale, contre 24% des autres élèves. Chez les élèves de la classe expérimentale, un quart pense cependant que la suite a deux limites, et 37% qu'elle a pour limite 1. Les justifications font largement appel à des écritures ou formulations de limites, comme « car quand n tend vers l'infini la suite tend vers 1 » mais aussi à des « théorèmes » comme : « une suite alternée ne peut avoir deux limites » , ou : « quand n est positif la suite tend vers 1, quand n est négatif elle tend vers -1, or une suite ne peut avoir deux limites ».

Les élèves des classes non expérimentales répondent majoritairement (56%) que la suite a pour limite 1 ; il y a très peu de justifications, ou bien en forme d'ostensifs de limites ne justifiant rien, comme il avait été signalé au chapitre 3. Ainsi : la suite a pour limite 1 (réponse a) cochée), s'accompagne d'une justification : « car lim u_n = 1 » , ou « car lim 1/n = 0 » ; cette dernière réponse peut néanmoins être considérée comme un début de justification, indiquant qu'il n'est nécessaire de tenir compte que du terme restant $(-1)^n$.

— Q13

La question est peu réussie, si l'on tient compte de ce que les propriétés et limites des suites géométriques font partie du programme de la classe de Première ; cependant il s'agit de la première rencontre des élèves avec la notion de suite, donc on peut considérer que les propriétés des suites, et les moyens de les valider, sont encore peu assimilés. De fait 57% des élèves sont capables de déterminer le sens de variations d'une suite géométrique et de la série associée, en se référant pour la première à un théorème du cours (u_n est décroissante car $0 < q < 1$). Les justifications (quand elles sont présentes, c'est-à-dire rarement : le questionnaire est très long — trop long — et c'est l'avant-dernière question) sont exprimées en français : par exemple « Plus n est grand plus $(0,75)^n$ est petit, donc plus $1 - (0,75)^n$ est grand » ou avec des références aux limites, comme « lim Tn = 4 donc Tn ne peut pas dépasser 4 ». Quelques réponses témoignent de justifications très soigneuses de ce que Tn peut dépasser 3,98 mais pas 4,02.

— Q14

Les taux de réussite brute sont voisins dans la classe expérimentale et les autres, mais il s'agit de la dernière question, et on observe beaucoup de non réponses. Parmi les élèves expérimentaux qui ont répondu, 17 sur 22, soit 77%, fournissent la bonne réponse, le taux de non réponse étant de 24%. Pour les classes témoins, 12% de non réponse, 63% des élèves ayant répondu donnent la bonne réponse.

III. 1.2 Conclusions de l'analyse qualitative et questions

L'analyse qualitative des réponses fait apparaître des différences de réussite, lesquelles sont plutôt à l'avantage des élèves non expérimentaux, sauf sur quelques questions bien spécifiques. Il est donc légitime de se demander si l'enseignement expérimental, afin de privilégier des connaissances graphiques et des connaissances sur l'existence de fonctions autres que les fonctions de référence, n'a pas handicapé excessivement les élèves de la classe expérimentale dans les items classiques qui leur seront nécessaires en particulier pour réussir dans la classe de Terminale et à l'examen du baccalauréat.

On peut se demander aussi si ces constatations vont amener à conclure positivement sur la conjecture C1, ainsi d'ailleurs que sur C2 : dans cette hypothèse les élèves n'apprendraient que ce qui est enseigné, avec une forte dépendance aux formes du savoir (graphique / formel, ou numérique / algébrique). Ceci ferait alors douter de l'intérêt de modifier l'enseignement, si cette modification n'a pour effet que d'obtenir un autre assujettissement aux formes officielles du savoir, cet assujettissement pouvant ultérieurement se révéler tout aussi porteur de rigidités et d'obstacles que le précédent.

La conjecture C3 concerne les conversions : or, et c'est peut-être dû à la longueur du questionnaire, mais on ne relève pas dans les réponses et les justifications de conversions spontanées, sauf en langage naturel (explications). Dans la question 11 les justifications sont des calculs, soit numériques soit algébriques, mais c'est la nature de la question qui appelle ce genre de justifications. Les élèves ont fait des conversions quand elles étaient sollicitées. L'étude faite jusqu'à présent ne permet donc pas de conclure sur la conjecture C3. Nous pouvons avancer l'idée que tester les conversions spontanées demanderait des questions peut-être plus complexes, et en tous cas de laisser davantage de temps aux élèves pour répondre, et essayer des registres différents ; la conversion entre registres nécessite, pour se produire et être observée, des conditions de recherche de problèmes ; elle est nécessaire et efficace par rapport à une heuristique de résolution de problèmes. Ici les conversions ne peuvent être observées que parce que la réponse à la question est une incitation directe à la conversion.

La conjecture C4 ne paraît recevoir aucune confirmation des résultats du questionnaire ; manifestement les élèves qui n'ont pas bénéficié d'un apprentissage spécifique au graphique ne paraissent pas être plus à l'aise dans ce registre. Le peu de réussite de la question Q8 prouve au contraire qu'il est difficile de donner une réponse sur une somme de fonctions en ne s'appuyant que sur le graphique ; de même Q14 n'est pas réussie par beaucoup plus de la moitié des élèves non expérimentaux, et Q10 l'est par au mieux un tiers des élèves.

III. 2 QUESTIONS CLASSIQUES ET QUESTIONS TYPIQUES

Le premier examen des réponses donne à voir des différences de réussite dont on peut se demander si elles sont significatives ; nous avons donc classé les questions, et testé les différences de réussite sur les classes ainsi déterminées.

III. 2.1 Test sur les différences de réussite

Les questions ont été classées en deux types, à partir de l'analyse a priori et des premières conclusions sur les réponses :

— les questions classiques, sont des questions que nous considérons comme usuelles par rapport à l'enseignement et au programme de la classe de Première scientifique : ce sont les questions Q1, Q2, Q5, Q7, Q9, Q11 ; ces questions sont en général mieux réussies par les élèves non expérimentaux ;

— les questions non typiques de l'enseignement classique, et dans une certaine mesure plus proches de l'enseignement expérimental sont Q3, Q4, Q6, Q8, Q12, Q14 ; parmi celles-ci, seules Q6, Q8, Q12 et Q14 peuvent donner lieu à réussite.

Les différences de réussite des élèves expérimentaux et non expérimentaux sont visibles sur le graphique en annexe. Un test du χ^2 a été fait pour déterminer si les résultats sont significatifs[91]. Dans chacun des cas (questions classiques et questions typiques), l'hypothèse nulle est que les résultats des élèves expérimentaux et des élèves non expérimentaux ne sont pas différents.

La fréquence totale de réussite sur les questions classiques est de 0,70. La fréquence de réussite des élèves expérimentaux sur les questions classiques est de 0,61, celle des élèves non expérimentaux de 0,72. Le calcul du χ^2 donne 2,9 ; or la table du χ^2 à 1 degré de liberté donne une valeur significative de 3,84 au seuil de 5%. Au seuil de 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

La différence de réussite des élèves expérimentaux et des non expérimentaux sur les questions classiques n'est donc pas significative.

La fréquence totale de réussite sur les questions typiques est de 0,343 ; celle des élèves expérimentaux de 0,465, et celle des élèves non expérimentaux de 0,302. Le calcul du χ^2 donne 6,4.

La différence de réussite des élèves expérimentaux et des non expérimentaux sur les questions typiques est donc significative au seuil de 5%.

II. 2.2 Conclusion

Ce résultat n'a certes rien de renversant, puisqu'il dit que les élèves de la classe expérimentale réussissent mieux les questions qui nous paraissent relever des connaissances construites dans ce milieu expérimental ; néanmoins il dit aussi que si l'enseignement expérimental a contribué à faire apparaître des connaissances nouvelles par rapport à l'enseignement classique, il n'a pas de ce fait privé les élèves des connaissances usuellement acquises. Or c'est à la fois un résultat intéressant et une exigence éthique, dans la mesure où les élèves ayant eu cet enseignement doivent s'intégrer dans le même cursus que les autres[92].

La deuxième partie de la conjecture C1 (« les réussites des élèves de la classe expérimentale sont déterminées par leur dépendance du contrat usuel de la classe ») ne semble donc pas vérifiée, par contre la deuxième partie de C2 pourrait l'être (« les réussites des élèves des classes non expérimentales sont déterminées par leur dépendance du contrat usuel de la classe »). Quant à la première partie de ces conjectures, elle supposerait la définition de profils (un profil « graphique » et un profil « numérique / algébrique ») et l'étude de distances par rapport à ces profils. Cette étude n'a pas été faite, car l'analyse en composantes principales et l'analyse factorielle ont donné à penser que d'autres facteurs primaient, par exemple le niveau individuel des élèves.

---

[91] Ici un test de comparaison d'échantillon ne serait pas pertinent, étant donné le faible effectif d'au moins l'une des classes (29 élèves expérimentaux).

[92] C'est à ce même résultat qu'aboutissent les études faites, dans l'enseignment primaire, sur les élèves de l'école Jules Michelet à Talence, qui était jusqu'en juin 1999 le COREM (Centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques).

IV. TRAITEMENT STATISTIQUE

Les fichiers tirés et exploités sont :

- l'ACP (analyse en composantes principales) sur le fichier total (en abrégé IACP) ;
- l'AFM (analyse factorielle multiple) sur le fichier total (en abrégé IAFM) ;
- l'ACP sur le fichier total des réussites (en abrégé R-ACP) ;
- l'AFM sur le fichier total des réussites (en abrégé R-AFM) ;
- l'ACP sur le fichier des réussites des élèves non expérimentaux (en abrégé RA-ACP) ;
- l'AFM sur le fichier des réussites des élèves non expérimentaux (en abrégé RA-AFM) ;
- l'ACP sur le fichier des réussites des élèves expérimentaux (en abrégé RE-ACP) ;
- l'AFM sur le fichier des réussites des élèves expérimentaux (en abrégé RE-AFM).

Les graphiques correspondant à ces fichiers figurent en annexe du chapitre 7.

IV. 1 ANALYSE GLOBALE DES RESULTATS

IV. 1.1 Etude des réponses de la population totale

L'ACP et l'AFM du fichier total font apparaître un premier axe lié aux questions Q10, Q11 et Q13, sans qu'il y ait de sous nuages de points clairement identifiés. Sur le second axe L3 (interprétation linéaire) et Q3-a, d'une part, et Ar3 et P3 (caractères arbitraire et partiel), d'autre part, sont clairement opposés par rapport à F1 mais ils l'étaient déjà dans l'analyse a priori.

D'autre part la réussite n'est pas déterminante, car il y a un grand nombre de questions réussies par un grand nombre d'élèves, et les questions discriminantes le sont sur un pourcentage faible de réponses, et pour une faible part de l'inertie. L'axe des réussites est incliné par rapport à F1, et se projette plus sur F1 que sur F2 ; mais F1 n'est pas l'axe des réussites.

Dans l'ACP R11 est lié à l'axe F1. L3 (attribution d'un caractère linéaire) est liée au deuxième axe et rien d'autre. Q3 contribue à déterminer l'axe F2, mais ce sont les comportements qui diffèrent, Q3-e et Q3-f étant discriminants : ces deux réponses correspondent à un comportement d'interprétation du graphique en tenant compte des caractères partiel et arbitraire. Les comportements à Q10 (identification de l'équation d'une courbe transformée d'une RGC donnée) sont déterminants, mais pas la question elle-même. R6 et R8 participent à l'axe F1, mais dans une faible mesure.

L'étude de F1 par rapport à F3 nous apprend que les questions Q11, Q12, Q13 ne sont pas liées avec Q4, ce qui est normal car Q4 concerne la lecture de RGC et les autres le registre formel et les limites ; et que la prise en compte des caractères partiel et arbitraire dans Q4 est opposé à l'interprétation linéaire, ce qui était prévu dans l'analyse a priori.

En conclusion : les comportements discriminants semblent être ceux qui sont liés à l'interprétation du graphique, et au lien graphique / algébrique ou graphique / formel ; mais sur l'ensemble de la population, ils ne sont que faiblement discriminants. Peut-être l'analyse des réussites, et celle des fichiers expérimentaux / non expérimentaux permettront-elles de préciser ces éléments.

IV. 1.2 Réussites de la population totale

Dans le fichier R-ACP, le premier axe est un axe réussite / échec ; de plus R9 et R14 sont opposés, Q9 étant la question numérique / tableau de variations, et Q14 la question consistant à identifier la RGC de la fonction dérivée de f. On peut l'interpréter comme l'existence de deux profils différents d'élèves, l'un réussissant dans les registres numériques / tableaux de variations, l'autre dans l'interprétation graphique, ce qui pourrait correspondre à un profil assez « scolaire » (maîtrise des apprentissages classiques de Première S) et un profil d'élève maîtrisant mieux les graphiques, même dans les questions non classiques.

R 6, R8, R11 et R13 sont fortement corrélées : R6 et R8 concernent le lien graphique / algébrique, R11 la maîtrise du lien formel / algébrique ou formel / numérique ; et R13 les limites de suites, donc une maîtrise du registre formel par rapport aux résultats sur les limites. Ces questions sont par ailleurs des questions relativement difficiles : cette corrélation pourrait être celle des « bons élèves » qui réussissent bien les questions d'un niveau élevé.

Par ailleurs R1, R2, R5, R7, R9, R10 sont relativement corrélées : ce sont les questions relevées comme classiques, sauf R10[93]. Cette corrélation serait donc due à l'action de l'enseignement classique, et les élèves ayant réussi appartiendraient au groupe des élèves sérieux de niveau convenable, qui réussissent bien les questions standard de Première scientifique.

R12 et R14 sont corrélées, c'est un bloc de connaissances « limites et dérivées » qui est identifié. Les élèves ayant bien assimilé les connaissances sur les limites sont également ceux qui interprètent correctement la RGC d'une fonction dérivée.

Dans l'AFM, l'axe F1 oppose R12 et R8 aux autres. Q8 concerne le lien graphique / algébrique et Q12 les limites ; là encore, c'est sans doute la difficulté qui discrimine. L'axe 1 de l'AFM est l'axe 2 de l'ACP, c'est-à-dire l'axe de la réussite aux questions difficiles.

On peut donc sans doute conclure que les réussites, sur la population globale, permettent de différencier deux catégories d 'élèves : des élèves « scolaires » dont la réussite ne sort pas des questions classiques, et qui sont mis en difficulté dès que les questions se situent moins dans le cadre classique ; et des élèves « brillants », qui, quel que soit l'enseignement reçu, ne sont pas désarçonnés par des questions inhabituelles et réussissent à jongler avec les registres. C'est donc la réussite générale qui est le principal facteur d'explication des réussites aux questions du questionnaire.

Si l'on s'intéresse au fichier RA-ACP (réussite des élèves non expérimentaux) on retrouve cette corrélation générale à la réussite ; R2 et R5 y sont particulièrement représentatives, or il s'agit de tâches ultra-classiques de l'enseignement de Première scientifique : donner un tableau de variations, et lire les racines d'un polynôme sur sa RGC. Par contre Q6 est peu réussie chez les élèves non expérimentaux, et ne contribue que pour 3% à l'axe F1 ; c'est une tâche tout à fait inhabituelle.

Il y a donc deux facteurs d'explication des réussites chez les élèves non expérimentaux : la familiarité avec le type de tâche, d'une part ; et d'autre part le niveau personnel de réussite des élèves.

IV. 2 ANALYSE DES REPONSES DES ELEVES EXPERIMENTAUX

IV. 2.1 Réussite des élèves expérimentaux

[93] Mais nous avons noté que Q10 est une question qui fait l'objet d'un certain entraînement dans l'enseignment en Première scientifique.

Ce qui frappe dans RE-ACP (graphique 2), c'est qu'il ne semble pas y avoir de corrélation générale à la réussite, contrairement à ce qui se passe pour la population globale ; ici la réussite est beaucoup plus dispersée, et l'axe 1 ne semble plus être l'axe de la réussite.

R5, par exemple, est corrélée négativement à R14. Or Q5 est une question très classique sur les racines d'un polynôme, Q14 portant sur la lecture de la RGC de f'. De même R10 et R7 sont opposées dans F2 : R7 étant numérique / graphique et R10 graphique / algébrique. Là encore il pourrait y avoir un facteur de niveau des élèves concernés. R12, R6, R13, R8 et R10 sont assez corrélées ; elles s'opposent à R1, R2 et R5 qui sont des questions très classiques.

Cependant le fichier des résultats bruts fait apparaître des variations individuelles d'une question à l'autre. Si l'on reprend les questionnaires, dont nous regrettions qu'ils soient anonymes, au moins cet anonymat nous permet de constater qu'à part quelques exceptions aux deux extrêmes (on identifie facilement quelques très bons et quelques mauvais élèves), il est difficile de retrouver les plutôt bons élèves et que peu d'élèves ont un profil homogène.

IV. 2.2 Dispersion des connaissances des élèves expérimentaux

Il se peut donc que l'enseignement expérimental ait créé dans la classe des populations à hiérarchie différente : on pourrait expliquer ce phénomène par le fait que cet enseignement ait pu favoriser une plus grande hétérogénéité des connaissances, en exigeant des élèves une action sur un milieu et une structuration des savoirs à partir de l'interprétation des rétroactions du milieu. Ainsi par rapport à un enseignement par adaptation, l'élève serait « perdant » du point de vue d'un entraînement moindre aux items classiques. Il serait ainsi confronté à un éventail de connaissances plus large, lui rendant plus difficile le choix des connaissances à mettre en œuvre lors de la réponse à un problème. Un autre facteur d'hétérogénéité des réussites pourrait être aussi le temps supérieur d'assimilation des connaissances que requiert un tel type d'enseignement, temps qui a pu être insuffisant dans l'enseignement expérimental : nous avions signalé que la situation « Graphiques et chemins » paraissait moyennement compatible avec le temps institutionnellement dévolu à l'étude des fonctions en Première scientifique, même si les résultats des élèves à l'examen l'année suivante prouvait qu'ils n'avaient en rien été défavorisés.

V. CONCLUSION

Reprenant les conjectures avancées au début de cette étude du questionnaire « Fonctions et limites », il est possible d'avancer quelques résultats ou remarques.

***C1** : les élèves de la classe expérimentale sont plus proches d'un profil « graphique » et les réussites des élèves de la classe expérimentale sont déterminées par leur dépendance du contrat usuel de la classe.*

Cette conjecture n'est pas corroborée par l'étude faite. Par contre les connaissances manifestées par les élèves de la classe expérimentale sont plus hétérogènes que les connaissances des élèves non expérimentaux, et leurs réussites plus dispersées ; il semblerait au contraire que l'enseignement expérimental ait produit un manque d'assujettissement, qui se traduit en fin de Première par des connaissances moins bien balisées. C'est acceptable si ces élèves « rattrapent » ensuite les connaissances usuelles afin d'être au moins au même niveau que les autres élèves au moment de l'examen final de la scolarité secondaire.

***C2** : les élèves des classes non expérimentales sont plus proches d'un profil « numérique / algébrique » et les réussites des élèves des classes non expérimentales sont déterminées par leur dépendance du contrat usuel de la classe.*

Il faut nuancer la réponse : pour les bons élèves, il n'y a pas d'assujettissement particulier à la forme des savoirs, et ces élèves réussissent y compris les questions non classiques. Par contre l'enseignement classique ne produit, pour les élèves moyens, que des réussites à des problèmes ou questions bien balisées (Q2 et Q5 en étant les prototypes), et ne leur permet pas de construire des connaissances suffisamment variées et solides pour affronter des questions différentes. C'est un problème qui se retrouvera certainement lorsque ces élèves aborderont l'Université.

***C3** : les connaissances nécessaires aux conversions de registres ne sont pas acquises spontanément si l'apprentissage ne les a pas prévues.*

La structure du questionnaire (sa longueur en particulier, qui limitait les explications complémentaires) et les éléments présents dans les réponses des élèves n'ont pas permis d'examiner valablement cette hypothèse. Nous avons étudié les conditions de recueil d'informations sur ce point ; il sera possible de construire ultérieurement, si c'est utile, un autre questionnaire pour tester cette conjecture.

***C4** : le registre graphique favorise la réussite (les élèves sont plus à l'aise dans le registre graphique).*

L'étude du questionnaire n'a pas permis de constater que le graphique facilitait les réponses, puisque les questions graphiques n'ont pas été forcément mieux (ni moins bien) réussies que les autres. Cependant le questionnaire n'était sans doute pas bien structuré pour répondre à cette conjecture, puisqu'on n'y trouvait pas les mêmes questions ou connaissances dans le registre graphique ou dans un autre registre. Nous pouvons donc nous en tenir aux résultats de Lacasta (Lacasta 1995) qui concluait que le graphique n'avait pas de rôle facilitateur. Notre étude n'apporte pas d'élément complémentaire à ce résultat.

***C5** : les élèves de la classe expérimentale sont plus familiers des fonctions « quelconques » (qui ne sont pas des fonctions de référence) que les élèves des classes non expérimentales.*

Cette conjecture comporte deux facettes : une positive (les élèves de la classe expérimentale sont plus familiers des fonctions quelconques), et une négative (les élèves des classes non expérimentales sont moins familiers). Pour les élèves des classes non expérimentales, c'est vrai des élèves moyens (ils ont du mal à imaginer des fonctions autres que les fonctions de référence), ça l'est nettement moins des bons élèves, qui s'adaptent manifestement à des fonctions très variées, qu'ils soient issus des classes non expérimentales ou de la classe expérimentale. Pour les élèves de la classe expérimentale, tous, même les moyens (d'ailleurs il est plus difficile, nous l'avons dit, de repérer les élèves bons ou moyens dans la classe expérimentale) ont une plus grande aisance avec des fonctions quelconques. Ceci peut s'interpréter comme un effet d'apprentissage : les élèves de la classe expérimentale ont eu plus d'occasions de manipuler des fonctions variées. Cependant ceci nous apprend que cet apprentissage a été efficace, ce qui est un résultat positif.

Résultat supplémentaire :

Les connaissances numériques sont beaucoup moins assurées qu'on ne le pense généralement dans la noosphère, qui prévoit des curriculums où l'enseignement des fonctions (et des limites) repose en grande partie sur l'ostension numérique. Dans le chapitre 3, des raisons ont été avancées pour expliquer ce défaut de connaissances. Le questionnaire met en évidence des réussites très mitigées à des items qui peuvent être considérés comme d'ambition modeste sur le plan des connaissances numériques (réorganiser un tableau de valeurs pour obtenir un tableau de variations, soumettre un tableau de valeurs à un contrôle pour déterminer une limite, interpréter une RGC correspondant à un tableau de valeurs).

Ce questionnaire a permis, malgré les insuffisances de son élaboration, de recueillir des informations sur les connaissances disponibles chez les élèves en fin d'année de Première scientifique. Dans le chapitre suivant, nous tentons de faire le lien entre les connaissances travaillées dans l'enseignement secondaire, et celles qui sont à l'œuvre dans l'activité mathématique des premières années de l'enseignement supérieur.

CHAPITRE 8

CHAPITRE 8

APPROCHE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Rue de Lourmel
J.P Mas

Les mathématiciens définissent leurs concepts exactement comme ils l'entendent.
Mais les enseignants sérieux ne se réfugient pas dans cette facilité,
ils ne peuvent dire non plus que cela est la seule définition correcte*,* vraie*, (…)*
et que l'intuition mathématique dans sa plénitude devrait la considérer comme telle.(…)
On ne devrait jamais arracher un concept-éprouvette de sa preuve-mère et le présenter
plusieurs chapitres avant la preuve dont il est heuristiquement second.
Imre Lakatos, « Preuves et réfutations ».

I. LA TRANSITION LYCEE / UNIVERSITE

I. 1 LES MATHEMATIQUES DU LYCEE A L'UNIVERSITE : CONTINUITE ET RUPTURE

Le passage dans l'enseignement supérieur se traduit, pour la majorité des élèves ayant obtenu le baccalauréat même de manière satisfaisante, par des difficultés non négligeables. Ces difficultés sont attestées par de nombreux travaux de terrain, en particulier dans les IREM où la réflexion commune sur le passage de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur a été ressentie comme une urgence : des groupes de réflexion sur la transition lycée / université se sont créés à cette fin (par exemple IREM de Nice, de Nantes…), en particulier à l'occasion de la mise en place du nouveau DEUG (Diplôme d'Etudes Universitaires Générales). La nouvelle organisation prévoit en effet que les étudiants aient une phase de tronc commun dans la branche d'études qu'ils ont choisie ; cette phase dure six semaines, à l'issue desquelles il leur est conseillé de s'orienter plutôt vers les mathématiques, la physique, ou la physique - chimie. Cette nouvelle organisation a pour corollaire la nécessité de pouvoir déterminer, au bout de six semaines, quels sont les étudiants susceptibles de réussir en mathématiques ; et ceci, alors que les mathématiques enseignées à l'université sont vécues comme nouvelles par les étudiants, et ne leur permettent pas toujours de s'appuyer sur leurs acquis antérieurs.

I. 1.1 Les difficultés d'adaptation

La rupture est ressentie douloureusement par les étudiants, qui ont l'impression d'être plongés dans des problèmes de technique pure, dont ils ne comprennent ni la finalité ni le fonctionnement. Les professeurs l'analysent parfois en termes de manque de rigueur et de travail, et de lacunes dans de nombreux domaines. Ainsi le groupe « Liaison Terminale S — DEUG A » de l'IREM des Pays de Loire (Nantes), parallèlement avec le groupe « Liaison lycée — DEUG » de l'IREM de Nice, ont-ils relevé un certain nombre de tendances concernant les étudiants qui arrivent à l'université[94] :

- ils comprennent mal le rôle des cours et des démonstrations vues en cours : dans l'enseignement secondaire le travail à ce sujet est inexistant, alors qu'il revêt une importance primordiale dans l'enseignement supérieur ; ils ne voient pas l'intérêt de mémoriser résultats et démonstrations ;
- ils ne pratiquent pas le travail de recherche sur des problèmes, qui est un temps nécessaire à l'université, alors que dans le secondaire ce type d'activité a presque disparu ;
- ils sont très peu entraînés au calcul algébrique ; on observe de fréquentes pertes de sens, ainsi qu'une inaptitude à décider des moyens de calcul adéquats pour résoudre un problème (par exemple transformation adaptée d'une écriture algébrique de fonction suivant le but recherché : recherche de limite ou de primitive) ;
- ils sont très mal à l'aise en théorie des ensembles et en logique, ce qui n'a rien d'étonnant étant donné que les programmes du secondaire sont quasiment muets sur ces questions[95] ; ceci se traduit par des confusions entre inclusion et égalité d'ensembles, entre condition nécessaire et condition suffisante, et par une difficulté importante à maîtriser les démonstrations ;
- dans ces conditions l'irruption des théorèmes d'existence d'objets mathématiques que l'on ne sait pas déterminer, et sur lesquels on doit travailler à l'aide de raisonnements logiques, est vécue comme totalement incompréhensible.

En ce qui concerne les limites, dans un exercice tel que le suivant, donné en début d'année : « Soit f la fonction définie par $f(x) = -x + \dfrac{1}{1-x}$. Montrer qu'il existe un entier k strictement positif tel que, pour tout x de l'intervalle] -1/2, 1/2 [, on a $|f(x) - 1| \leq k\ |x|$. Que peut-on en déduire pour la fonction f? » , les difficultés repérées sont plus précisément :

- un manque de savoir-faire dans le maniement des valeurs absolues ;
- un manque d'anticipation car l'étudiant ne voit absolument pas le lien avec un problème de limite, et encore moins de continuité ;`
- des difficultés avec les encadrements (technique de maniement des inégalités), et la représentation des encadrements comme quelque chose de peu précis ;
- une difficulté à concevoir le raisonnement « contravariant » de l'analyse classique[96] ;
- une incapacité à penser à l'utilisation des théorèmes pertinents (accroissements finis) ;
- une difficulté à entrer dans le problème posé car la fonction f donnée n'est pas problématique, pour un élève de Terminale, du point de vue de la continuité. On aurait pu prendre par exemple $x \sin\dfrac{1}{x}$.

[94] cf. Pécal et Sackur (1996), Héaulme (1996).
[95] cf. la thèse de V.Durand-Guerrier, Logique et raisonnement mathématique. (Durand-Guerrier 1996).
[96] cf. Lutz, Meyer, Maklhouf (1995) et aussi chapitre 2.

Sur d'autres exercices, on constate une incapacité à contrôler le sens d'écritures formelles ou algébriques ; ainsi dès qu'une formulation est une suite de symboles et que l'on doit raisonner sur ces symboles, il semble que des prises d'indices au hasard suffisent à l'étudiant qui croit reconnaître une forme connue et ne se donne aucun moyen de validation : de telle sorte par exemple que des étudiants auxquels on demande le degré du polynôme Pn défini par : $Pn(X) = (X + a + b)^{2n+1} - X^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$, affirment que son degré est 2n + 1.
On demande ensuite de calculer les racines de P_1 tel que : $P_1(X) = 3\ (a+b)\ X^2 + 3\ (a + b)^2\ X + 3\ a^2b + 3ab^2$. Or les étudiants mettent généralement 3 en facteur mais sont incapables de voir que $a^2b + ab^2$ s'écrit ab (a + b) .

I. 1.2 Les éléments de continuité

Les domaines mathématiques abordés en première année d'enseignement supérieur ne sont cependant pas si éloignés de ceux qui sont traités dans les dernières classes de lycée : essentiellement l'analyse, avec une reprise des concepts fondamentaux (limites, continuité[97], dérivation) et l'algèbre. Ce qui est nouveau, c'est le jeu auquel l'université fait jouer les étudiants ; et là les règles de validation changent. L'enseignement secondaire accepte de baser le raisonnement mathématique sur l'intuition et sur quelques savoirs algorithmiques souvent locaux, que l'on demande à l'élève de bien mémoriser, et se garde bien de montrer des objets mathématiques dérogeant à ces algorithmes. Au contraire, l'enseignement supérieur propose des règles applicables à tous les objets, et les teste de préférence sur des objets non banals... d'où une incompréhension des étudiants. Par ailleurs si l'on simplifie de nouveau les concepts ou leurs applications, on constate que les étudiants qui en auraient le plus besoin n'écoutent plus car ils ont l'impression de « déjà vu » . (cf. Coste-Roy 1988, pp. 71-74).

Les groupes qui travaillent dans ce domaine suggèrent quelques pistes : donner dès le secondaire des exercices spécifiques destinés à préparer l'entrée à l'université (lesquels ?) ; s'appuyer sur les connaissances des élèves en début d'université afin de ne pas les déstabiliser complètement ; essayer au maximum de problématiser les notions, mais sans inflation de théorie. Le groupe de l'IREM de Nice propose une organisation spécifique, sur quelques thèmes mathématiques bien choisis, de cette période d'observation ; ceci afin, à la fois de permettre aux étudiants de comprendre le jeu des mathématiques universitaires et de permettre aux professeurs d'évaluer lesquels d'entre les étudiants doivent se voir conseiller une orientation vers les mathématiques. Les thèmes retenus en 1996 sont les réels et le théorème des valeurs intermédiaires, d'une part ; l'algèbre linéaire, d'autre part. Ces sujets (concepts fondamentaux de l'analyse, algèbre linéaire) paraissent assez généralement choisis dans les universités comme thèmes d'introduction aux mathématiques du DEUG A.

S'ils sont choisis, c'est que les professeurs considèrent qu'ils sont aptes à produire l'entrée dans les mathématiques de l'enseignement supérieur ; c'est-à-dire à la fois à marquer la rupture avec les mathématiques de l'enseignement secondaire par une entrée dans des champs de savoirs formalisés, et à amener les étudiants à construire les connaissances nécessaires pour poursuivre des études universitaires de mathématiques. Ce sont ces connaissances et ces savoirs universitaires que nous voulons tenter de cerner dans le domaine de l'analyse.

I. 1.3 Réactions de l'institution « enseignement secondaire »

Devant les difficultés des élèves, le système réagit par des adaptations dont le fondement ne semble pas toujours évident. Toute référence à la continuité a disparu des

[97] La continuité a cependant disparu des nouveaux programmes de Terminale (1997).

programmes de Première et de Terminale scientifiques ; en Première, depuis déjà 1986, et en 1997 la définition de la continuité (qui était donnée comme « une fonction définie en a et admettant une limite en a est continue en a, et sa limite en a est f(a) ») et le théorème des valeurs intermédiaires ont disparu en Terminale.

La solution adoptée est d'enlever ce qui crée des difficultés, en le reportant en aval. Le système « enseignement secondaire » s'est fixé un objectif de forte réussite au baccalauréat ; pendant un temps (lors de la transformation des classes de Première C et D[98] en classes de Première S) l'objectif était aussi d'augmenter le nombre de bacheliers scientifiques. Ces deux objectifs n'étant sans doute pas compatibles, du moins selon l'organisation envisagée, c'est le second qui a été sacrifié.

Le système reporte donc en aval la définition de la continuité et les théorèmes concernant celle-ci. Il y a là une certaine logique à rendre l'université responsable de tout un bloc de connaissances et savoirs « de niveau avancé ». Mais ce faisant, le système ne prend pas le temps de s'interroger sur les conditions qui pourraient rendre ces savoirs ou ces connaissances viables dans l'enseignement secondaire, voire sur leur nécessité dans l'activité mathématique à ce niveau. Si l'on enseigne un peu d'analyse dans le secondaire, peut-on l'enseigner en la vidant de ses principaux concepts ? Et si l'on constate que ce qui reste de l'étude des fonctions ne « passe » toujours pas, en viendra-t-on (toujours sans étude didactique) à supprimer aussi les fonctions logarithme et exponentielle, les intégrales, les équations différentielles linéaires ? Ou bien est-ce l'enseignement de la physique qui assurera la régulation, en mettant le holà aux suppressions pour qu'il lui reste le minimum vital ?

I. 2 QUESTIONS SUR LES CONNAISSANCES ET SAVOIRS A LA CHARNIERE LYCEE / UNIVERSITE

Il semble donc que les difficultés des étudiants puissent s'interpréter en termes de connaissances inadaptées lorsque ceux-ci entrent à l'université, ou de savoirs présentés par les professeurs dans l'enseignement supérieur et qui ne sont pas à la portée des étudiants. On peut donc se demander quelles sont les connaissances dont les étudiants auraient besoin et que l'enseignement secondaire ne leur a pas permis d'acquérir ; si, ayant identifié ces connaissances, il est possible de situer, par rapport à elles, l'enseignement traditionnel, et l'enseignement expérimental basé sur les situations des chapitres 5 et 6.

Questions :

- peut-on identifier, dans les premières années de l'enseignement supérieur, les connaissances qu'il travaille et qui sont nécessaires pour réussir en mathématiques après le baccalauréat ?
- si oui, ces connaissances font-elles partie de celles qui sont travaillées / produites dans l'organisation traditionnelle de l'enseignement secondaire ?
- font-elles partie de celles qui sont travaillées / produites dans l'organisation *expérimentale* de l'enseignement secondaire, telle qu'elle a été mise en œuvre ?
- si l'enseignement traditionnel, ou les situations expérimentales présentées, n'assurent pas l'accès à ces connaissances dans le secondaire, faut-il chercher d'autres situations ou doit-on se dire que c'est à l'enseignement supérieur de prendre totalement en charge cette partie

[98] Les Premières C étaient les classes à enseignement mathématique - physique dominant ; les D les classes d'enseignement « sciences de la vie et de la terre », soit physique - biologie. Elles ont été regroupées en Première S en 1991 ; les associations professionnelles (APMEP notamment) avaient protesté contre ce regroupement susceptible selon elles, de diminuer plutôt que d'augmenter le nombre d'élèves poursuivant leurs études en section scientifique. C'est effectivement ce qui a eu lieu.

du travail mathématique ? et dans ce cas y a-t-il des outils plus adaptés que d'autres pour ce rôle ?

Ces questions, pour n'être pas neuves, ne sont cependant pas obsolètes. Des travaux leur ont été consacrés par des équipes de Paris (équipe DIDIREM), de Grenoble (Institut Fourier) … et des propositions de situations ont été avancées ; les travaux de Legrand sur l'intégrale ont été signalés au chapitre 3. Les travaux du GRECO sur l'étude qualitative des équations différentielles, dans la continuité de l'étude d'Artigue et Gautheron (Artigue et Gautheron 1983), ont conduit aussi à des expérimentations en DEUG.

II. CONNAISSANCES ET SAVOIRS DE L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR: ETUDE D'UN CORPUS

La méthode choisie pour s'interroger sur les questions posées précédemment, est d'analyser un corpus de transcriptions de cours ou travaux dirigés, et de travaux d'élèves. L'étude de ce corpus doit permettre de déceler des *connaissances* d'analyse et des *savoirs* d'analyse, chez les professeurs en situation d'enseignement, et chez les élèves. Ce repérage de connaissances et savoirs doit ensuite permettre de poser d'autres questions, et de dégager quelques perspectives sur les situations.

II. 1 METHODOLOGIE

II. 1.1 Le corpus

a) Les cours

Il s'agit de deux cours de classes préparatoires de première année, au lycée Louis Barthou à Pau. Ces deux classes sont des Mathématiques Supérieures PCSI (physique, chimie et sciences de l'ingénieur) ; ce sont donc de bons élèves, sans doute meilleurs qu'à l'université (il y a une sélection sur dossier pour entrer en classe préparatoire), mais pas les meilleurs : ces derniers vont en MPSI (mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur).

Le premier cours (transcription A, voir en annexe I) prend place le samedi 5 octobre 1996, de 8H à 11H. Il comprend des corrections d'exercices (relations d'ordre, limites, borne supérieure) suivies d'un cours sur les fonctions.

Le second cours (transcription B, voir en annexe I) a lieu le mardi 22 octobre 1996, de 8H à 10H, dans une autre classe, avec un autre professeur. C'est un cours sur les réels, la propriété d'Archimède, les suites. Ce cours est suivi d'une séance de travaux dirigés le samedi 9 novembre 1996, qui a été enregistrée mais comme les élèves travaillaient en groupes, la transcription n'est guère explicite. L'observation des élèves n'a permis de relever que peu de procédures ; une question est de savoir pourquoi les élèves sont si peu capables de s'engager dans la recherche.

b) Les copies d'élèves

Les copies que nous avons pu recueillir proviennent :

— d'une part, d'élèves de classe préparatoire de deuxième année biologie, au lycée Louis Barthou de Pau, c'est-à-dire d'élèves ayant passé le barrage de la première année, qui est très sérieux, mais en classe de biologie et non de mathématiques. Leur programme en mathématiques est moins approfondi que celui des classes de Mathématiques Spéciales, et moins théorique ; cependant comme il comporte beaucoup de probabilités, tout le programme d'analyse nécessaire à l'étude des probabilités est prévu. Ils étudient donc les séries numériques, les fonctions de plusieurs variables et les dérivées partielles, les intégrales généralisées. D'autre part, bien que l'appellation de ces classes ait été transformée (de « Mathématiques Spéciales Biologie » elles sont devenues « Classes préparatoires PCBSI deuxième année », PCBSI signifiant « physique, chimie, biologie et sciences de l'ingénieur ») avec une volonté d'écarter les mathématiques de la dénomination, les coefficients aux concours préparés (Ecole Nationale Agronomique, Ecoles Normales Supérieures) font apparaître toute l'importance des mathématiques : le coefficient de mathématiques est le même que celui de biologie, et représente la somme des coefficients de physique et chimie.

— d'autre part, d'une classe de première année de BTS - CIRA (brevet de technicien supérieur, spécialité Contrôle Industriel et Régulation Automatique) du lycée Saint Cricq de Pau. Ces élèves sont supposés utiliser les mathématiques d'une façon beaucoup moins formalisée qu'en classe de Mathématiques Supérieures ou en DEUG A, et avoir une approche beaucoup plus opératoire de l'analyse (connaissance des principales fonctions usuelles y compris hyperboliques, des développements limités, primitives, de techniques de calcul d'intégrales ; et en deuxième année, équations différentielles, transformée de Laplace et séries de Fourier). Leur programme ne prévoit pas d'étude détaillée des propriétés de **R**. Par ailleurs même si les titres du programme sont ambitieux, les réalisations demandées sont d'un niveau assez modeste et on les guide beaucoup.

Etant donné que les copies relevées ne sont pas celles des étudiants ayant suivi les cours dont nous possédons la transcription, il ne nous est pas possible de mettre en relation les cours suivis et les productions d'élèves. Mais ce n'est qu'un faible inconvénient, surtout pour une première approche, car cette mise en relation pourrait bien être très douteuse a priori ; elle est sans doute très sensible à des facteurs subjectifs (niveau de l'élève), ce qui fait que le repérage de régularités ou d'effets se serait sans doute révélé très aléatoire. C'est pourquoi la préférence a été donnée, dans un premier temps exploratoire, à un éventail de productions assez large. Cependant l'étude suivie d'étudiants est une piste à ne pas négliger pour la poursuite de notre recherche.

II. 1.2 Grilles d'analyse

a) Les transcriptions

Les transcriptions sont étudiées du point de vue :

— du découpage des interventions (interventions du professeur, interventions des élèves ; nombre d'interventions) ;

— de la nature de ces interventions, ainsi pour le professeur on peut identifier au moins quatre types d'interventions principales :

- expression du savoir, avec identification de ce savoir et des formes sous lesquelles il intervient ;
- expression de la façon d'utiliser le savoir, ou de commentaires sur le savoir ;
- augmentation / diminution de l'incertitude de la situation (gestes de clôture ou d'ouverture), par exemple questions sur le savoir pour créer de l'incertitude ;
- type d'argumentation : formulation, explicitation, validation (en restant dans le même registre ou en changeant de registre) ; il se peut cependant que la détermination de ces moments ne soit pas évidente quantitativement, auquel cas il faudra se contenter d'une approche qualitative ;

et bien sûr une étude détaillée de ces transcriptions ferait apparaître des éléments pédagogiques, par exemple incitations à s'exprimer en direction des élèves, de façon directe ou détournée (phrases commencées et non terminées), ou recommandations relatives à la nature et à la quantité de travail à fournir, etc. …

et pour les élèves les interventions sont majoritairement de cinq types :

- réponses ;
- questions ;
- expression du savoir ;
- calculs (par exemple au tableau) ;

- indications de procédures ou opinions.

b) Les copies d'élèves

Les copies d'élèves nous permettront de relever :

— les sujets donnés et les sujets traités par les étudiants ;

— les procédures de ceux-ci, et bien entendu les erreurs ;

— les savoirs exprimés, les connaissances présentes ;

— éventuellement, s'ils manifestent une compréhension globale des visées du sujet de devoir, ce qui peut se révéler rare tout simplement pour un problème de temps.

Ce travail sur le corpus de l'enseignement supérieur n'en étant qu'à son début, l'étude faite ici n'est certainement pas complète : elle demandera à être approfondie.

II. 2 DU COTE DES PROFESSEURS : CONNAISSANCES ET CONTRAT DIDACTIQUE EN COURS DE MATHEMATIQUES

II. 2.1 Le professeur A

Le professeur A est un professeur chevronné suivant l'expression consacrée, qui assure l'enseignement en « Maths Sup » depuis de nombreuses années. L'étude globale de la transcription fait ressortir de fréquentes interactions professeur / élèves, les interactions se produisant néanmoins avec un tiers environ de la classe (certains élèves n'ayant pas sans doute, au niveau de la compréhension, les moyens d'intervenir …) ; en 3H de cours, 155 échanges sont recensés, soit 50 par heure environ. Si l'on détaille en fonction du contenu, on obtient les tableaux suivants.

Tableau 8.1

Le professeur A	N° dans la transcription
Expression du savoir	11, 19, 45, 50, 58, 79, 81, 99, 103, 105, 110, 112, 116, 117, 121, 129, 130, 132, 134, 140, 144, 145, 151, 155.
Commentaires, connaissances	10, 20, 24, 26, 34, 45, 55, 58, 74, 77, 86, 88, 92, 95, 110, 117, 145, 151.
Gestion de l'incertitude • Questions sur le savoir	6, 11, 13, 19, 22, 24, 30, 32, 35, 39, 46, 48, 55, 72, 75, 82, 90, 93, 95, 97, 101, 103, 105, 110, 112, 114, 121, 123, 125, 130, 131, 133, 134 (2), 138, 140, 142, 151.
Nature de l'argumentation et changements de registre : quelques exemples	35 (exemple numérique, A—> N) ; 50 (explication avec un changement de registre F —> G) ; 58 (validation formelle / algébrique) ; 88 (dessin) ; 116 (RGC) ; 117 (électricité) ; 134.

Tableau 8.2

Les élèves A	N° de la transcription

Réponses	05, 07, 09, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 29, 31, 33, 36, 38, 47, 56, 62, 64, 73, 76, 80, 83, 87, 91, 96, 98, 100, 111, 113, 115, 120, 122, 124, 126, 128, 135, 137, 143, 152, 154.
Questions	69, 94, 108, 131, 138
Expression spontanée de savoirs ou connaissances	09, 16, 80, 118, 120
Calculs	09, 62, 66, 81, 94, 102, 106.
Procédures, opinions	60, 64, 69, 135, 139

a) Forme de la relation didactique

— ***Remarque 1*** sur le cours du professeur A : ce professeur *pose beaucoup de questions*, et ce sont des *questions sur le savoir* ou les connaissances ; deuxième remarque, les élèves *répondent à ces questions*, ce qui, d'abord ne va pas de soi, ensuite prouve que les élèves ni le professeur ne tiennent ces questions pour formelles ; et qu'il y a des élèves capables de répondre. De plus les élèves trouvent normal de répondre en terme de savoirs (justifications, savoirs antérieurs) : le contrat de la classe de Maths Sup. est donc clairement identifié par ces élèves[99].

— ***Remarque 2*** : les interventions en forme de savoirs sont plus longues que les autres, mais ne sont pas si fréquentes, beaucoup moins en tous cas que les questions.

b) Contenu de la relation didactique

— ***Remarque 1*** : les interventions en forme de commentaires et de connaissances font appel à des domaines variés, algébrique, graphique, formel, et la physique une fois.

— ***Remarque 2*** : avec la réserve qu'une partie de la classe seulement participe au dialogue instauré avec le professeur A (les classes de Maths Sup pratiquent un sévère écrémage en fin d'année, un tiers environ des élèves ne passe pas en seconde année et est envoyé à l'université), on remarque que ce dialogue rend bien compte de l'état d'avancement du savoir dans la classe, et des connaissances que les élèves ont pu mettre dans l'échange.

Ce cours n'est en aucun cas une situation a-didactique ; du point de vue des contrats faiblement didactiques, on pourrait le situer dans un contrat d'initiation et de contrôle. Au chapitre 1 nous avions relevé un manuel de première année d'université, qui se plaçait aussi dans ce type de contrat. On peut supposer qu'il est relativement fréquent à ce niveau. Un tel contrat comporte de la communication de savoirs, et d'exercices ou de connaissances. Cependant ici le contrat paraît avoir deux dimensions, l'une faiblement didactique (pour la partie communication de savoirs) et l'autre fortement didactique (pour le contrôle des savoirs et la mise dans le milieu de connaissances des élèves). On peut le classer en partie comme un contrat d'instruction ou de direction d'études (pour la partie faiblement didactique du contrat), en partie comme un contrat de maïeutique socratique (pour sa partie fortement didactique)[100].

En effet s'il n'y a pas a-didacticité dans le cours du professeur A, ce professeur *interagit avec les élèves* en termes de savoirs et de connaissances. Cette interaction se produit dans un dispositif dont les limites sont certes bien connues, mais ici il faut remarquer que cette maïeutique socratique est conduite avec une continuité remarquable, et une certaine opiniâtreté dans la recherche de réponses sur le savoir de la part des élèves.

Il en résulte que ce dispositif didactique fonctionne avec une certaine efficacité, du moins pour une partie de la classe. Cette efficacité est sans doute due à deux facteurs :

— la motivation des élèves de ce type de classe ;

[99] Ce n'est peut-être pas le cas de tous les étudiants en DEUG à l'université, comme il a été noté ci-dessus.

[100] cf. Brousseau (1996) pour l'étude des contrats faiblement ou fortement didactique.

— la volonté sans faille de A d'obtenir des réponses de la part des élèves, qui lui fait gérer ce qu'on pourrait identifier comme une forme faible (au sens mathématique) du débat scientifique avec une réelle dextérité.

L'échange avec la classe nous paraît en effet être une forme — très atténuée — du débat scientifique, ou du moins en contenir des traces (au sens de la chimie cette fois) car, bien qu'il n'y ait pas de situation - problème à l'origine d'un débat, c'est bien la vérité en mathématiques, et la façon de la reconnaître et de s'en servir, qui sont au cœur de certaines des interactions. Par exemple au n°69 de la transcription un élève déclare qu'il « n'est pas d'accord avec tout ça. La suite $(v_{n)}$, comment ça se fait qu'au premier coup d'œil, elle décroît pas ? » . La question posée, c'est la visibilité du savoir mathématique, et l'instance de décision : est-ce que la décision se fait sur l'impression première, ou est-ce qu'en mathématiques un résultat n'est pas forcément conforme à l'intuition et donc demande à être validé par des règles internes ? le critère, c'est l'empirisme ou la théorie ? C'est là-dessus que portent un certain nombre d'interventions du professeur (voir aussi ci-dessous).

II. 2.2 Le professeur B

Tableau 8.3

Le professeur B	N° dans la transcription
Expression du savoir	01, 05, 11, 15, 17, 23, 25, 30, 36, 47, 51
Commentaires, connaissances	01, 13, 15, 17, 25, 29, 32, 38, 42, 46, 47, 51
Gestion de l'incertitude • Questions sur le savoir	03, 05, 07, 09, 13, 23 (avec une indication), 25 (sans réponse attendue), 25, 27, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 47.
Nature de l'argumentation et changements de registre : quelques exemples	Argumentation dans le registre formel / numérique / algébrique ; peu de changements dans une même intervention.

Tableau 8.4

Les élèves B	N° de la transcription
Réponses	08, 14, 24, 26, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 48, 50.
Questions	
Expression spontanée de savoirs ou connaissances	02, 18, 20.
Calculs	.
Procédures, opinions	

a) Forme de la relation didactique

— ***Remarque 1*** sur le cours du professeur B : les interventions du professeur sont très longues, et s'équilibrent presque, en nombre, entre interventions sur le savoir et commentaires (il y en a peu de différentes recensées à cause de leur longueur). Cependant le savoir

prédomine et les commentaires sont marginaux (une phrase ou deux dans une intervention de cinq à dix phrases) mais aussi fréquents que chez A (6 par heure).
— ***Remarque 2*** : le professeur B échange nettement moins avec les élèves, et pose beaucoup moins de questions que le professeur A : 25 échanges par heure contre plus du double pour le professeur A, 16 questions en deux heures contre 38 en trois heures pour le professeur A. Or les questions du professeur B, comme de A, sont courtes et demandent des réponses également courtes.
— ***Remarque 3*** : les élèves B n'ont comme activité que la réponse aux questions (pas très nombreuses), et deux ou trois expressions de savoirs ; ils ne posent pas de questions, ne sont pas envoyés au tableau, ne donnent pas leurs procédures ou leur opinion sur le savoir.

b) Contenu de la relation didactique

— ***Remarque 1*** : le savoir présenté est un savoir difficile pour les élèves, ce que souligne B ; il s'agit de l'expression formelle de propriétés de **R** , et de la démonstration d'un certain nombre d'autres propriétés des nombres réels et des suites, à partir des premières. Ceci peut expliquer, dans une certaine mesure, le peu de sollicitations de la part du professeur et d'interventions des élèves ; cependant le cours de A porte aussi sur des relations d'ordre, des suites, les nombres réels… avec une bien plus grande activité apparente des élèves. Les interventions du professeur consistent majoritairement en expression de propriétés dans le registre formel, avec quelques incursions dans le numérique.
— ***Remarque 2*** : la forme de la relation didactique fait qu'il est très difficile de déterminer son contenu *pour les élèves* : en effet les longues interventions en termes de savoirs, ou les commentaires du professeur, nous donnent l'impression d'être amplement renseignés sur les conceptions qu'il a du savoir qu'il enseigne ; par contre il est beaucoup plus difficile d'en induire ce que les élèves ont réellement compris.

Le principal dispositif du professeur B semble être **la déclaration du savoir** ; c'est peut-être dû en partie, répétons-le, à la nature des contenus enseignés dans cette séance.

Le contrat didactique à l'œuvre dans cette classe est un contrat d'ostension de savoirs *et de connaissances mathématiques,* type de contrat dont l'existence était signalée au chapitre 2. Ce contrat correspond, dans un exposé de cours, au contrat faiblement didactique d'initiation et de contrôle repéré au chapitre 1 dans un manuel d'analyse pour la première année d'université (Labelle et Mercier). La faiblesse des interactions avec les élèves interdit de voir dans ce contrat une dimension fortement didactique. En définitive, comme dit au chapitre 1, dans un tel contrat l'élève garde la responsabilité d'apprendre ou non ; la présence physique du professeur semble ici bien moins importante que le type de contrat qu'il installe dans sa classe (mais les élèves gardent la possibilité théorique d'interagir avec le professeur, ce qui joue peut-être un rôle dans leur apprentissage). Les travaux dirigés dont le compte-rendu figure en annexe ne font guère apparaître de différence dans la gestion de la classe, sinon que les élèves ont une phase de recherche en groupes des exercices donnés par le professeur ; mais la responsabilité d'apprendre ou non leur appartient toujours.

II. 2.3 Les connaissances publiques en cours de mathématiques

Les savoirs énoncés sont clairement identifiés et énoncés, ce qui est normal à ce niveau : convergence des suites, propriétés de l'ensemble des nombres réels ou de l'ensemble des rationnels, propriétés des fonctions. A ces savoirs sont associées, par l'intermédiaire des commentaires, questions, et dans le travail privé des élèves, des connaissances dont certaines sont publiques (celles qui correspondent aux points traités oralement en classe par exemple).

Les connaissances qui se font jour dans les transcriptions à travers les interventions, soit du professeur, soit des élèves, peuvent être classées en trois types :

1. énoncés mathématiques sur les conséquences, pour tel type de fonction ou de suite par exemple, des énoncés généraux, sur la façon dont se traduit le fait pour une condition d'être nécessaire et non suffisante … ; reformulations en langue naturelle ; ce premier type correspond à des connaissances relatives à des procédures, à l'instanciation des théorèmes, et aux conséquences sur les objets mathématiques envisagés ;
2. commentaires sur ce qu'on cherche, sur l'avancement du savoir, et sur la validité des énoncés mathématiques dans le cas précis où se place le travail ; ce type de connaissances correspond à des synthèses (ou bilans de connaissances) locales ;
3. remarques sur l'heuristique, par exemple sur la façon de chercher une limite, sur le fait qu'une calculatrice est un bon moyen ou non de recherche dans le problème posé …

<u>Professeur A :</u>

Type 1 : n° 10 (ça marche pas sur les ensembles), 19 (nécessaire et suffisant), 34 (on raisonne sur des entiers, ça marche pair et impair), 45 (une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur **N**, ça veut dire que), 70 (une suite croissante + une suite décroissante, on ne peut pas dire pour la somme), 117 (par exemple si les fonctions se croisent, le sup, c'est …), 121 (c'est pas forcément ça, f bornée, ça revient à dire quoi sur la courbe ?), 129 (si on fait un graphique, f ressemble à ça), 130 (si j'avais pris seulement les fonctions majorées ?), 138 (la somme de deux fonctions périodiques, est-ce que c'est périodique ?), 145 (bon, il faut bien faire la distinction, une fonction strictement croissante, c'est plus fort que croissante au sens large), 145 (si vous avez $f(x) < f(x + 1)$, ça implique pas f croissante), 147 (c'est pas pareil que pour les suites).
Type 2 : n° 20 (avec des quantificateurs on essaye de construire un raisonnement qui tient debout), 24 (raisonnement fréquent en analyse), 54 (déductions à partir des propriétés),
Type 3 : n°41 (on essaye de faire apparaître la décomposition en facteurs premiers), 57 (ce que vous pouvez faire, c'est des tables de vérités), 65 (la récurrence ça va pas vous donner grand-chose), 88 (que vous le voyiez mieux avec le dessin ou avec le calcul …), 92 (même avec un très gros ordinateur…), 103 (est-ce qu'on peut en déduire quelque chose ? ben non, …), 103 (on va essayer de manipuler), 107 (le problème c'est que ce genre de travail nous dit l'existence de la limite mais ça nous donne pas sa valeur), 116 (on va voir à quoi ça correspond, d'abord graphiquement).

<u>Elèves A :</u>

Type 1 : n° 16 (il suffit que A et B aient la même borne supérieure), 120 (f(I) est un intervalle), 131 (comment peut-on affirmer que… ?).
Type 2 : …
Type 3 : n°49 (avec l'argument), 60 (c'est pas évident), 69 (moi j'suis pas d'accord), 133 (on peut pas savoir), 139 (il faut trouver une période commune)

Ce qui apparaît dans ce bilan du cours A, c'est que les élèves n'ont pas d'intervention de type 2, et peu de commentaires sur les connaissances en général, voire pas du tout de type 2. Cela n'a rien d'étonnant car les interventions de type 2 sont de l'ordre des synthèses ou bilans sur l'état d'avancement des connaissances de la classe, donc seul le professeur s'autorise à les faire, c'est le *topos* du professeur. Par contre certains élèves peuvent donner des connaissances locales de type 1, et même des connaissances sur la façon dont ils voient que l'on peut faire un travail, ou ne le voient pas (type 3), et des opinions sur les objets mathématiques (par exemple : ça devrait se voir que la suite est décroissante).

<u>Professeur B :</u>

Type 1 : n° 03 (le problème, c'est que si je cherche à majorer ou minorer séparément, ça donne pas grand-chose), 13 (une remarque pratique, c'est qu'on a le cas le plus simple), 15 (voici une conséquence de la propriété de la borne sup), 23 (a est un majorant de A, Sup(A)

existe, la borne supérieure de A, c'est celui qui réalise l'égalité), 32 (ce n'est pas un axiome, c'est une conséquence de la borne supérieure), 36 (pour **Q**, ça marche aussi, j'ai utilisé la borne sup., mais c'était pour éviter les limites), 42 (montrez qu'elle est surjective, qu'est-ce que je dois trouver ? un antécédent), 51 (il existe $n > 0$ tel que $1/n < \varepsilon$, c'est Archimède ça, appliqué à $A = 1$ et $1 < n\varepsilon$).
Type 2 : n° 15 (je veux insister sur le fait que je vais démontrer qu'il existe des racines n-ièmes), 25 (l'idée logique de la démonstration est là, après c'est juste de la technique mais c'est lourd comme technique), 47 (**Q** est dense dans **R** + *commentaires*).
Type 3 : n° 01 (si on vous demande juste de trouver l'existence, ça veut dire…), n° 03 (le problème, c'est que si je cherche à majorer ou minorer séparément, ça donne pas grand-chose), 13 (cet exemple, il permet peu de manier les réels, là je vais insister, mettre au tableau tout ce que je sais sur les réels), 25 (on va démontrer par l'absurde), 32 (la grande différence entre la Terminale et maintenant, c'est les quantificateurs ; chaque fois que vous avez une propriété avec des quantificateurs, il faut la traduire avec du concret, il faut regarder les valeurs pour lesquelles c'est non trivial), 51 (l'intérêt d'une démonstration, c'est de voir le sens pratique).

Ces interventions en termes de connaissances s'intercalent dans de très longues interventions sur le savoir qui n'ont pas été répertoriées dans ce paragraphe, puisque nous cherchions essentiellement des connaissances.

Elèves B :

Type 1 : n°02 (c'est décroissant… premier terme), 12 (c'est le plus grand élément), 48 (**R** est dense dans **R**), 49 (x et y dans **R**, le milieu).
Type 2 : …
Type 3 : …

Le professeur B, qui déclare beaucoup le savoir, fait également des interventions en termes de connaissances plus longues et souvent plus circonstanciées que A[101]. Ces interventions sont cependant, moins que chez A, appuyées sur des interactions avec les élèves. Le nombre d'interventions de chaque type est sensiblement le même que chez A ; ces déclarations de connaissances sont moins corrélées à celles des élèves, et donc elles le sont plus à ses propres déclarations de savoirs. Autrement dit, le professeur B expose en classe le savoir et une partie de son épistémologie personnelle.

Les élèves, comme il avait été relevé, ont très peu d'interventions, et encore moins dans le domaine des connaissances.

II. 2.4 Conclusions

a) Sur les connaissances

Cette étude permet de mettre en évidence un résultat qui s'avère très intéressant dans la problématique de ce travail de thèse : **les connaissances publiques repérées dans ces cours de mathématiques de classe préparatoire première année ont un rapport certain avec les connaissances travaillées dans les situations expérimentales que nous avions mises en place dans l'enseignement secondaire.**

En effet deux formes de connaissances travaillées dans ces cours paraissent rejoindre assez fortement les connaissances des situations expérimentales :

[101] Pour l'intégralité des interventions, dont il n'est cité ici qu'une petite partie, se reporter aux annexes de ce chapitre.

— les connaissances *relatives à la validité des énoncés* dans des cas particuliers, et la nécessité d'envisager des suites, ou des fonctions, vérifiant ces énoncés ou servant de contre-exemples ; c'est le cas dans le cours des professeur A et B, de toutes les interventions de type 1 : existence de limites dans un cas précis, problèmes de majoration, nécessité d'être vigilant sur les conditions d'application des énoncés, etc. …Ce sont des connaissances qui sont largement intervenues dans la situation « Graphiques et chemins » au sujet des fonctions, mais aussi dans la situation du flocon sur les limites ;

— les connaissances *sur les énoncés*, pour expliquer que l'énoncé « P » n'est pas équivalent à l'énoncé « Q », par exemple dans la transcription A aux n° 119, 121, où le professeur A discute la différence entre fonction majorée et maximum[102].

Cette confirmation de ce que les connaissances se rejoignent, permet d'envisager qu'il existe des situations qui font travailler, dans le secondaire, des connaissances dont l'enseignement supérieur a précisément besoin, pour installer chez les étudiants un rapport adéquat au savoir de l'analyse ; et que ces situations ne constituent pas un total bouleversement du paradigme d'enseignement à ce niveau.

b) Sur le contrat

Aucune des classes observées n'est mise en situation d'interaction effective (par l'intermédiaire d'une situation a-didactique ou d'un problème) avec le savoir ; cependant on observe dans la classe A des interactions entre les savoirs / connaissances des élèves et les savoirs / connaissances du professeur, sur des *objets de savoir* clairement identifiés. Par contre dans la classe B, de telles interactions ne sont pas observables dans la transcription disponible.

En l'absence d'étude plus approfondie, rien ne permet d'affirmer que l'un ou l'autre des dispositifs est plus favorable à l'apprentissage des élèves. Les interactions observées dans la classe A se font avec des élèves capables de répondre aux questions du professeur, d'en poser eux-mêmes, de déclarer une opinion sur un énoncé, d'émettre un énoncé : on peut penser que ce sont de bons élèves. Dans la classe B, les bons élèves ne déclarent pas les connaissances, mais le professeur prend les déclarations de connaissances et de savoirs très largement à sa charge ; il est donc vraisemblable que les bons élèves profitent de ses remarques et commentaires.

Le *topos* de l'élève s'en trouve-t-il modifié ? Ce serait à étudier. Il se peut que les élèves aient plus d'espace pour intervenir, mais que la nature des interventions ne dévie pas le cours du savoir. Le dispositif du professeur A offre-t-il cependant plus d'occasions *d'épisodes didactiques* pour les élèves ? On peut le penser, sous réserve de vérification. En effet cette volonté de poser systématiquement des questions, et d'obtenir des réponses en termes de savoir, peut permettre à l'étudiant de situer son rôle par rapport au discours du professeur et aux savoirs en jeu : dans un discours « savant » comme celui que tient un professeur, comment l'élève reconnaît-il ce que lui aura à *faire*, de ce savoir ? Les questions sont des indices importants de la part de travail qui va être dévolue à l'élève, une fois le cours fait ; c'est-à-dire des éléments du contrat didactique.

Une question peut être alors de savoir *quels* élèves sont en mesure de se saisir de ces éléments. En particulier les élèves moyens retirent-ils, de l'un ou l'autre de ces dispositifs, plus de bénéfices ? N'oublions pas que les filières de classes préparatoires pratiquent une forte sélection ; il se peut que les élèves moyens, tout simplement, soient en échec chez le professeur A comme chez le professeur B, et que les bons élèves tirent de toutes façons leur épingle du jeu.

Cette étude ouvre, pour nous, un champ de recherches futures qui pourraient avoir pour origine les questions que nous nous posons après cette première approche :

[102] Qui avait fait l'objet de discussion dans le situation « Graphiques et chemins ».

1. tous les contrats faiblement didactiques se valent-ils du point de vue de l'apprentissage qu'on peut en attendre ? Ou y en a-t-il certains qui fournissent plus d'aide aux élèves que d'autres ?
2. l'apprentissage dans le cadre de tels contrats produit-il des effets repérables (en termes de procédures des étudiants, d'obstacles didactiques…) ?
3. l'introduction d'une dimension fortement didactique dans le contrat (par exemple sous forme de maïeutique) modifie-t-elle de façon significative les comportements et les acquis des étudiants en termes de savoirs ?
4. quel est le type de contrat qui peut favoriser l'émergence d'épisodes didactiques chez les étudiants, ces épisodes étant l'occasion d'apprentissages ?
5. y a-t-il une alternative à l'enseignement par ostension en première année d'enseignement supérieur ? si oui, peut-on envisager une ou des familles de situations pour l'enseignement des principaux concepts de l'analyse, travaillés en première année ? (notion de nombre réels, propriétés de **R**, continuité, etc.…?)
6. à supposer que ces situations puissent être trouvées, pourraient-elles constituer une alternative acceptable, du point de vue des contraintes du système (nombre et étendue des savoirs, variété des situations d'application, temps pour l'acquisition) ?
7. parmi les connaissances nécessaires pour aborder l'analyse dans l'enseignement supérieur (par exemple celles identifiées au II. 2.3), y en a-t-il qui pourraient être travaillées dans l'enseignement secondaire, afin d'assurer une meilleure transition secondaire / supérieur ?

II. 3 LES DEVOIRS DES ELEVES DE PCBSI

II. 3.1 Méthodologie

Il s'agit d'un devoir en 3H , comportant :
— Partie I : une étude de fonction, une intégrale généralisée, un calcul par récurrence d'une suite d'intégrales ;
— Partie II : l'étude de la densité du carré d'une variable aléatoire absolument continue de densité f ;
— Partie III : l'étude d'une somme de carrés d'une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale réduite centrée[103].

Les copies ont été recueillies et reproduites avant correction par le professeur de la classe. Parmi les copies dont nous disposions, nous en avons retenu sept qui paraissaient représentatives, pour l'une ou l'autre des raisons suivantes :

— les procédures mises en œuvre (avec ou sans succès) se retrouvent dans une majorité de copies ;

— les erreurs commises sont parmi les plus fréquentes, ou elles sont particulièrement explicites par rapport au savoir manquant ou non pertinent ;

— les indications de rédaction sont éclairantes, ou personnelles, et attestent d'un questionnement de l'étudiant sur sa production ou sur les questions posées.

Ces copies sont désignées par BL, DO, ES, GA, LA, LT, SO (cf. Annexe IV).

II. 3.2 Les stratégies et comportements erronés sur l'ensemble du devoir

Tout d'abord certaines questions ont été peu ou incomplètement traitées : il s'agit de 1.c , soit l'étude de $f\alpha$ au voisinage de 0 et 1, et de la question 2, demandant de chercher pour quelles valeurs de α l'intégrale $J\alpha$ est convergente.

[103] Voir le texte en annexe IV.

Pour les questions traitées, on peut distinguer un certain nombre de stratégies alternatives lorsque l'étudiant bute sur une question :

— lorsqu'il y a un paramètre, construire des courbes particulières, soit parce que c'est demandé, soit dans l'espoir (?) que cette étude donnera des indications pour l'étude générale ;

— accumuler les arguments éventuellement redondants ou peu appropriés (par exemple dire qu'une fonction est dérivable car elle est la composée de fonctions dérivables, et calculer la limite du taux d'accroissement) ; on peut penser à une stratégie du type : « dire tout ce qui ressemble à un savoir de cette rubrique, dans la quantité des arguments il s'en trouvera bien un qui jouera » ;

— donner des arguments non reliés (début de recherche dans une direction qui n'a pas abouti ?) par exemple, $f\alpha$ admet une demi-tangente horizontale en zéro car : $\sqrt{1-u} = 1 + 1/2\ u + u\ \varepsilon(u)$, sans suite ; ou exprimés dans une phrase dont la causalité est douteuse ou mal définie, comme « Y est une variable aléatoire absolument continue d'après la linéarité de la densité » ;

On trouve aussi des comportements qui peuvent difficilement être assimilés à des stratégies comme :

— difficulté de reconnaissance des domaines de validité des savoirs (limite en un point où f n'est pas définie confondue avec la continuité) ;

— formules « aberrantes », par exemple $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}} du = \left[Arc\sin\sqrt{u}\right]_0^1$, ou $P(Y = k) = P(X^2 = k) = P(X = \sqrt{k}) \cap P(X = -\sqrt{k}) = 0$ qui font penser aux formules algébriques des « calculateurs aveugles » en algèbre ; encore que la première soit plutôt le signe d'une « application » en modifiant la variable pour qu'elle convienne, sans prise en compte de l'interaction dérivée / fonction.

Au delà des formules hasardeuses, théorèmes - élèves, etc. …, ce qui transparaît c'est une grande incertitude sur le ***discours de validation***. Les élèves savent des formules, des théorèmes, des propriétés ; c'est le quand et le comment de l'utilisation de ces résultats qui les met en grande difficulté.

Le deuxième point notable est ce qui semble être le manque de connaissances de transition entre les connaissances « faciles », opératoires (par exemple dériver une fonction simple, ou calculer une intégrale définie avec une étape comme une intégration par parties), et les connaissances nécessitant un contrôle théorique et non plus calculatoire, comme déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $J\alpha$ est convergente.

II. 3.3 Les items retenus pour une étude plus détaillée

Comme le but était de cerner des savoirs et connaissances typiques de l'analyse, certaines questions ont été sélectionnées qui portent sur des objets mathématiques significatifs de ce niveau.

A) Analyse a priori

— la question 1 de la première partie consiste en une étude de fonction, soit une tâche a priori coutumière depuis la classe de Première ; mais la fonction comporte un paramètre, et d'autre part cette étude n'est pas immédiate car on n'accède pas directement au signe de la dérivée, il faut passer par une étape intermédiaire ; il s'agit donc d'une question où l'étudiant peut certes réinvestir des connaissances antérieures, mais en prenant en compte la complexification de la tâche ; cette complexification tient au fait que :

- l'étude des limites dépend des valeurs prises par le paramètre ;
- dans l'étude de ces fonctions avec paramètre, on n'accède pas directement au signe de la dérivée. Celui-ci est le même que celui de $(2\alpha + (1-2\alpha)u)$, où u doit être compris

strictement entre 0 et 1 ; il faut donc étudier la fonction $\alpha \longrightarrow 2\alpha / (\alpha - 1)$.

- l'étude des demi-tangentes aux bornes ne peut se faire que par limite de la dérivée.

— la question 2 de cette même partie I demande de trouver pour quelles valeurs du paramètre l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction de la première question (fonction non définie en 0 et 1), est convergente. C'est une question typique des nouveaux savoirs universitaires : il ne s'agit plus d'exhiber une primitive de f (d'ailleurs dans le cas général on n'en connaît pas directement) mais de justifier l'existence d'une intégrale généralisée, qu'à la question suivante on demandera de calculer par récurrence pour certaines valeurs du paramètre, après avoir justifié la relation de récurrence fournie. Comme la fonction intégrée n'est pas définie en 0 et 1, il faut envisager séparément les deux cas et prendre à chaque fois des équivalents des fonctions en jeu, pour garder uniquement le terme significatif ;

— la question 1.a du II demande de prouver que si X est une variable aléatoire absolument continue, son carré Y et la racine carrée de Y, soit Z, également, et de déterminer leurs densités en fonction de celle de X. Les arguments donnés par les étudiants pour justifier que Y et Z sont absolument continues peuvent être des arguments relatifs aux intégrales, soit avant calcul de la fonction de répartition, soit après. Mais les arguments « globaux » ne sont pas très utiles ici : même s'ils sont bien utilisés, ils ne donnent pas la réponse attendue, à savoir le calcul de la densité. Il est plus simple de calculer la fonction de répartition, de la transformer pour l'obtenir en fonction de celle de X, et de dériver.

b) Procédures et résultats : tableau 8.5

	Question I.1	Question I.2	Question II.1.a
BL	Echec de l'étude de fα, ses limites et les tg en 0 et 1. Ecrit un taux d'accroissement de fα en 1, puis dit qu'il n'existe pas car fα (1) n'existe pas ! Etude de fα non réussie car n'arrive pas à trouver la bonne forme pour f'.	La convergence de l'intégrale pour $\alpha > -1$ est déduite de l'équivalence en zéro de fα avec u^{α}, du côté de zéro. Par contre en 1, alors que le changement de variable très simple t = 1-u permet de faire le même raisonnement, BL échoue.	Les arguments donnés pour l'existence de la densité de Y ne sont pas absurdes même si inutiles (X est abs. cont. donc f est continue), mais BL ne décompose pas l'expression $P(Y \leq x)$ avant de conclure, donc son raisonnement est faux.
DO	Etude correcte de la dérivabilité de fα et de ses limites ainsi que des limites de fα' en 0 et 1. Etude de fα non réussie.	Déclaration contradictoire avec les résultats précédents ($\lim_0$ fα = 0) d'où non réussite de la convergence de Jα en 0. En 1, essai de chgt de variable non abouti.	Calcul correct de $P(Y \leq x)$ mais conclusion appuyée sur un argument faux (« les deux intégrales convergent car f est continue »). Calcul de la densité de Y et Z correct.
ES	Etude correcte de la dérivabilité de fα et de ses limites ainsi que des limites de fα' en 0 et 1. Etude de fα réussie	Identification des problèmes en 0 et 1 (*dit l'élève*). L'écriture $u^{\alpha} = e^{\alpha \ln u}$ choisie par l'élève, ne lui permet pas de reconnaître les cas de convergence. Equivalent faux de $e^{\alpha \ln u}$ en 1.	Théorème-élève 1 : l'image par une fonction continue d'une variable aléatoire abs cont est une v.a abs cont.

GA	Etude correcte de la dérivabilité de fα et de ses limites ainsi que des limites de fα' en 0, mais échec en 1. Etude de fα non réussie*.	Arguments faux de majoration / minoration : si α > 0, Jα diverge car elle est minorée par l'intégrale de 0 à 1 de u^{α} divergente. Si α > 0, Jα converge car elle est majorée par l'intégrale de 0 à 1 de 1/ $u^{-\alpha}$ convergente.	Théorème-élève 2 : l'image par une fonction dérivable d'une variable aléatoire abs continue est une variable aléatoire abs. continue.
LA	Etude correcte de la dérivabilité de fα et de ses limites ainsi que des limites de fα' en 0 et 1. Etude de fα réussie	Non fait.	Ebauché, avec une erreur qui compromet la suite : $X^2 < y \Leftrightarrow - y < X < y$; et aussi : $P(X^2 = y) = P(X = y)$ « ∩ » $P(X = - y)$

* *Commentaire de l'élève après avoir repris infructueusement l'étude de fα'* : « 2 α / (α - 1) est inférieur à 1 si α < 0 . Mais dans ce cas, 2 α / (α - 1) est négatif. Comment je peux bien faire pour arrêter de tourner en rond ? »

	Question I.1	Question I.2	Question II.1.a
LT	Etude correcte de la dérivabilité de fα et de ses limites ainsi que des limites de fα' en 0 et 1. Etude de fα réussie	Correcte, avec équivalents convenables et référence aux intégrales de Riemann.	Correcte, avec écriture des fonctions de répartition.**
SO	Erreur dans le calcul de fα' .	Etude correcte de l'intégrale et des équivalents, mais conclusion : - α < 1 ⇔ α > 1 . Au voisinage de 1, chgt de variable t = 1 - u et conclusion correcte avec référence à une intégrale de Riemann.	Théorème - élève 2 pour justifier que Y est une v.a. abs. continue. Calcule la fonction de répartition, mais erreur dans la propriété de Chasles pour les intégrales. Cependant calcul correct de la densité de Y. Erreur pour Z .

** *Commentaire de l'étudiant après calcul de la fonction de répartition de Y* : « Soit, en dérivant, on obtient UNE densité (leurs : article défini non ? ».

c) Conclusions

— comme dit ci-dessus, les procédures opératoires sont en général maîtrisées (les techniques), même si parfois il y a une défaillance (calcul de dérivées) ou si un grain de sable peut faire s'enrayer toute la machine (- α < 1 ⇔ α > 1) ;

— ce qui met les étudiants en difficulté, c'est que les théorèmes ou propriétés vus en cours ne sont jamais applicables directement, mais il y a toujours des étapes de calcul et de décomposition des expressions, ou de restriction des questions pour se placer dans les bonnes hypothèses. Ainsi les étudiants qui échouent dans l'étude de fα le font parce qu'ils ne sont pas arrivés à dégager, du problème global de signe de la dérivée, les questions pertinentes à se poser sur la fonction définie par φ(α) = 2 α / (α - 1) *(« Comment je peux bien faire* *pour arrêter de tourner en rond ? »)* . De même les étudiants ne sont pas supposés faire intervenir un théorème « global » assurant la convergence de $J\alpha$, mais décomposer l'étude aux deux bornes. Enfin justifier que Y et Z sont des variables aléatoires absolument continues ne relève pas d'un théorème général (bien qu'il existe, mais suppose des conditions de monotonie[104]) : dans des cas comme ceux qui sont présentés, il est plus sûr et plus rapide de calculer la fonction de répartition, dont on a d'ailleurs besoin pour trouver les densités demandées. D'ailleurs même (ou plutôt *seuls*) les bons élèves comme LT (qui a réussi une grande partie du devoir) se posent des questions relatives à la formulation des questions et aux réponses qu'il convient d'y donner.

Ce qui pose problème, c'est donc :

— de savoir quand appliquer un théorème, et quelles sont les opérations préliminaires à faire pour que le théorème s'applique ;

— de contrôler la complexité de ces opérations, sans perdre de vue le but à atteindre ;

— de s'assurer de la validité des théorèmes et propriétés utilisés, dans les cas particuliers concernés ;

— et durant tout ce processus, de ne pas perdre la maîtrise des calculs.

Les points de la liste ci-dessus sont des *connaissances* et des *savoirs*, on ne peut les réduire à des savoir-faire : connaître et savoir reconnaître le champ d'application d'un théorème et son domaine de validité est une connaissance ou un savoir, suivant son caractère local dans l'action ou général dans la formulation / validation ou même dans la théorie. Ces savoirs sont sans doute travaillés en travaux dirigés, lorsque les étudiants ont des exercices à résoudre ; ou en interrogation orale, pour les étudiants de classe préparatoire (mais les interrogations orales sont en même temps des évaluations, ce qui n'est pas forcément une situation favorable à l'apprentissage). Une question est alors de savoir *quand* l'enseignement supérieur enseigne ces savoirs qu'il exige des élèves ? Les cours analysés au II. 2 parlent certes de ces savoirs, mais avec quel effet réel sur les étudiants ? C'est une question que nous nous posions à l'issue de leur étude.

L'enseignement secondaire quant à lui, ne travaille pas ces connaissances :les élèves du secondaire n'ont aucun apprentissage sur des savoirs non algorithmiques. Ce qui leur est demandé, c'est d'appliquer une propriété alors qu'ils sont placés exactement dans les conditions de l'énoncé de celle-ci. On peut se demander si, en ne prévoyant pas une initiation aux questions de validité des théorèmes, et à la nature des énoncés mathématiques, le secondaire ne handicape pas gravement ses élèves, y compris les meilleurs, dans la perspective de leur réussite future dans l'enseignement supérieur. On peut aussi s'interroger sur les situations qui permettraient de construire des connaissances « intermédiaires » entre l'algorithmique et le théorique, et la place de ces situations dans la scolarité. Cette question rejoint la question 7 du II. 2.

L'examen des copies de BTS, et le décalage entre les copies de BTS et celles de PCBSI II, permettront peut-être de mieux cerner ces connaissances intermédiaires entre les connaissances et savoirs algorithmiques qui sont actuellement les seuls à être travaillés dans l'enseignement secondaire, et les savoirs exigés dans l'enseignement supérieur.

II. 4 LES DEVOIRS DES ELEVES DE BTS-CIRA

II. 4.1 Les items étudiés

Nous avons étudié cinq copies correspondant à une épreuve de « BTS blanc » au mois de janvier 1996 (texte et productions d'étudiants sont en annexe V). Ces copies sont identifiées BA, CH, DE, GU, MI. Deux exercices ont été retenus : l'exercice I (recherche de

[104] Calcul des probabilités, A.Renyi (1962, réédition française 1992), J. Gabay éd., Sceaux, pp. 162 et suiv.

limite) et l'exercice III (calcul d'une intégrale par une intégration par parties). Les résultats figurent dans le tableau 8.6 page 366.

L'exercice I demande la connaissance des développements limités d'ordre 1 ou 2 de la fonction exponentielle et de ln(1 + u) au voisinage de zéro. Il est demandé également de justifier que, pour tout réel x non nul, ln $((e^x - 1)/x)$ existe. Les calculs sont très guidés (jusqu'à l'écriture des développements limités pour laquelle un modèle est fourni).

L'exercice III exige la connaissance de la formule d'intégration par parties ; l'étudiant doit choisir la fonction à intégrer et celle à dériver, et connaître les primitives des fonctions du type *sin ax*. Il doit ensuite achever les calculs et donner la valeur numérique de l'intégrale.

II. 4.2 Les connaissances et savoirs

Le niveau de maîtrise des élèves de BTS est, comme il fallait s'y attendre, très inférieur à celui des PCBSI, d'autant qu'ils ont une année d'études supérieures de moins. La restitution correcte d'une primitive ou d'un développement limité pose problème à certains élèves ; les calculs algébriques aussi (par exemple copie BA) . On peut considérer que les élèves ont un niveau de Terminale, parfois juste ; le fait de leur demander quelques calculs non triviaux suffit à les déstabiliser.

On observe des difficultés de calcul algébrique élémentaire que les PCBSI ont largement dominés, sauf accident ; on note des difficultés d'application de formules, ce qui prouve que même le niveau algorithmique est peu stabilisé sur les objets de l'analyse de Terminale (primitives, intégration par parties).

En conclusion, les élèves de BTS paraissent se situer, par rapport au savoir mathématique, à l'étape de mise en place et de consolidation des savoirs algorithmiques. Dans les épreuves qui leur sont données, pas plus que dans les procédures de résolution, il n'existe d'interrogation sur la validité des énoncés mathématiques ou leur champ d'application. De plus les propriétés qu'on leur demande d'appliquer sont données directement dans ce champ d'application, et dans les conditions d'application quasi directe. Il semble donc ne pas exister d'espace où se poser les questions relatives à ces problèmes de validité, du moins sur des énoncés ou des problèmes « simples ».

Les résultats - Tableau 8.6

	Exercice I	Exercice III
BA	Ecrit « x = - x si x < 0 ». Trouve le d.l d'ordre 2 de g, mais pas le d.l. d'ordre 1 de f. Trouve cependant la limite.	Formule de dérivation par parties non maîtrisée.
CH	Résultats annoncés sans démonstration (signe de $(e^x - 1)/x$). Ecrit « $(e^0 - 1)/0$ n'existe pas », puis : $(e^x - 1)/x = e^x \times (- 1/x)$ Suivent des calculs non aboutis.	Formule de dérivation par parties non maîtrisée.
DE	Essaye d'écrire des d.l. sans se servir des formules connues.	Formule de dérivation par parties non maîtrisée.
GU	Non traité.	Erreurs sur les primitives des fonctions trigo. Applique ensuite correctement la formule d'intégration par parties, à quelques facteurs scalaires près

MI	Réussit (arrive sans trop de mal à composer deux d.l.) ; trouve la limite.	Réussit malgré une maladresse dans l'écriture des fonctions u et v.

III. CONCLUSION

III. 1 CONTRATS DIDACTIQUES ET APPRENTISSAGE

L'étude des cours de « Maths Sup. » PCSI a mis en évidence des pratiques différentes suivant les professeurs, pratiques qui interrogent la place de l'élève, et les indications qui lui sont accessibles sur les attentes du professeur et de l'institution vis-à-vis de son travail. Ces indices sont, dans les deux cas étudiés, visibles dans le discours du professeur. Dans l'un des cours, ils sont également repérables dans les interactions (questions / réponses) entre le professeur et les élèves.

Ces observables s'expriment sous forme de connaissances et de demandes de connaissances, ou de prises de position sur le savoir, ou de demandes adressées à l'élève de telles prises de position. L'élève est donc sollicité, plus ou moins directement, à réfléchir sur la validité des énoncés mathématiques, leur compatibilité éventuelle, leur champ d'application. Le contrat permet donc de faire travailler les questions sur le savoir mathématique, la vérité en mathématiques.

Au chapitre 2, nous affirmions qu'une forme d'a-didacticité pouvait se reconnaître dans l'activité mathématique conjointe du professeur et de l'élève. Si dans les deux cours étudiés, il est possible de repérer les mêmes éléments de questionnement sur les énoncés, ce qui les différencie serait la part de l'activité mathématique professeur / élève. Cette activité demanderait à être étudiée à ce niveau de l'enseignement, afin de déterminer si effectivement une interaction du type de celle observée chez le professeur A conduit l'élève à un apprentissage plus efficace.

Une alternative au type de contrat observé chez le professeur A, et qui susciterait une activité mathématique professeur / élève, serait une situation a-didactique problématisant les notions introduites. Une telle alternative est certes envisageable, mais il n'en existe pas, pour le moment, de réalisation effective pour les principales notions d'analyse introduites en début d'enseignement supérieur. Les questions relatives au savoir ne sont donc pas introduites grâce à une ou des situations comportant un milieu antagoniste du sujet ; comme au chapitre 2, nous sommes amenés à étudier des paradigmes d'enseignement où le professeur prend en charge une partie des questions sur le savoir, et la gestion des apports de connaissances ou de savoirs nécessaires pour répondre aux questions des élèves et valider leurs réponses. C'est ce que fait le professeur A, le professeur B se cantonnant plutôt dans un discours d'expression du savoir et de connaissances d'accompagnement.

Quel est alors l'effet réel de ces types d'interaction sur l'apprentissage des élèves, c'est une question qui reste pour l'instant à explorer.

III. 2 CONNAISSANCES ALGORITHMIQUES / CONNAISSANCES THEORIQUES

Il apparaît que dans l'enseignement supérieur, on demande aux étudiants de passer directement des savoirs algorithmiques à des savoirs théoriques sur la validité des mathématiques et plus spécifiquement de l'analyse. En effet les cours dont les transcriptions ont été étudiées se situent au mois d'octobre ou novembre, en première année d'enseignement post-secondaire. Or ce passage s'effectue sur un corpus de savoirs que les professeurs reconnaissent eux-mêmes comme étant particulièrement difficiles, à savoir les propriétés de l'ensemble des nombres réels (propriété d'Eudoxe Archimède, axiome de la borne supérieure), la continuité et les limites, et de la logique ensembliste (relations d'équivalence et d'ordre sur des ensembles variés, y compris des ensembles de parties d'un ensemble…).

On demande donc aux étudiants de passer d'emblée des savoirs algorithmiques à des savoirs théoriques sur la validité des mathématiques et plus spécifiquement de l'analyse, ceci sur des objets mathématiques nouveaux et très complexes. On pourrait se demander où, dans notre étude, il aurait été possible de repérer l'étape intermédiaire, qui serait de s'interroger sur la validité des énoncés, et leur champ d'application, sur des objets mathématiques déjà connus, pour lesquels il serait possible de s'appuyer sur des connaissances antérieures.

L'étude du décalage entre les connaissances de ces étudiants de BTS, et celles des étudiants de PCBSI de deuxième année, n'a été qu'ébauchée. Néanmoins ce décalage est lui-même dans une certaine mesure éclairant, car il confirme que le fait d'avoir franchi l'étape de maîtrise des savoirs algorithmiques (étape que les BTS n'ont pas tous surmontée, alors que les PCBSI sont dans une bien meilleure posture relativement à elle) n'assure pas que l'étape de contrôle théorique peut suivre sans apprentissage spécifique. Cet apprentissage est par ailleurs d'autant plus malaisé à envisager qu'il est difficile de lui associer des tâches de type algorithmique : il faudrait plutôt l'envisager sous forme de situations et de milieux, comme nous l'avons expérimenté dans les situations proposées aux chapitres 5 et 6, ou de milieu pour le débat scientifique, comme le propose M.Legrand.

Cet état de choses fait qu'il n'y a pas actuellement d'organisation permettant de s'interroger sur la vérité et la validation en analyse, sur des objets ou des énoncés plus simples. L'enseignement secondaire a supprimé l'organisation mathématique qui permettait d'assurer cette étape de l'apprentissage, et dont nous avions relevé des traces dans les manuels d'analyse des années soixante ; dont il est également possible de voir des éléments dans des sujets de baccalauréat antérieurs à 1990 (cf. Trouche 1996). L'enseignement supérieur n'a pas pris la relève de ces connaissances et savoirs, il en résulte qu'ils sont à l'heure actuelle *manquants*.

III. 3 NIVEAU DE COMPLEXITE

L'analyse du niveau de complexité des connaissances et savoirs relatifs à la validation est finalement à repérer sur deux axes : la nature des objets (porteurs de connaissances antérieures des élèves, ou non), et la nature des questions que l'on se pose à leur sujet (qui de toutes façons est nouvelle au moment où l'on initie l'apprentissage de l'analyse, pour les raisons exposées au chapitre 3). Augmenter démesurément les exigences sur les deux axes en même temps, ne peut conduire qu'à mettre les étudiants en échec irrémédiable, sauf les meilleurs.

CONCLUSION GENERALE

You must believe in spring
Bill Evans

Lorsque **moi** *j'emploie un mot, répliqua Humpty Dumpty d'un ton de voix quelque peu dédaigneux, il signifie exactement ce qu'il me plaît qu'il signifie … ni plus, ni moins.*
Lewis Carroll, « A travers le miroir ».

A l'issue de ce travail de thèse, il faut revenir sur les questions posées, quant à la transition lycée / université ; sur les situations mises en œuvre, et leur apport relativement à ces questions. Nous souhaitons aussi souligner l'intérêt et la portée des outils théoriques de la didactique, que nous avons utilisés pour faire avancer notre problématique.

A. LES QUESTIONS ET LES PROPOSITIONS D'INGENIERIE

I. SAVOIR DE L'ANALYSE ET DIFFICULTES DE LA TRANSITION LYCEE / UNIVERSITE

- **La caractérisation du savoir en analyse**

L'un des axes de notre recherche, c'est le **savoir de l'analyse**. Ce savoir, nous l'avons identifié comme relatif aux preuves et au contrôle des énoncés (cohérence, champ d'application, conditions de validité). Ces preuves s'énoncent dans un système que nous avons appelé le SPA, système de preuves de l'analyse, et dont les caractéristiques ont été étudiées.

L'activité de validation, dans un travail mathématique portant sur l'analyse, fait donc intervenir le SPA, qui fait partie des savoirs de l'analyse ; le maniement d'un savoir, on le sait, est contrôlé par des *connaissances*. Ceci pose donc le problème de l'introduction de ces connaissances : comment, à quel niveau, par quelles situations …

- **Connaissances associées**

Les connaissances associées au savoir de l'analyse sont visibles dans le travail effectué en mathématiques dans l'enseignement supérieur : nous avons vu qu'elles se repéraient au moins dans le discours du professeur, et dans les savoir-faire demandés aux étudiants lors des exercices.

Ces connaissances étaient présentes dans l'enseignement secondaire jusqu'à une époque relativement récente (avant la réforme des « mathématiques modernes »). On les trouvait dans les manuels, et les élèves les rencontraient dans les problèmes donnés, qui , au moins au niveau des classes scientifiques, étaient de vrais problèmes de recherche. Il existait donc une organisation de l'enseignement qui prévoyait des moments d'étude où rencontrer, construire, utiliser ces connaissances. Actuellement l'enseignement secondaire, se fixant pour but de faire obtenir l'examen terminal à une majorité d'élèves, a supprimé les organisations didactiques rendant possibles l'énoncé de savoirs et la rencontre de connaissances dans le domaine de l'analyse mathématique.

- **Connaissances manquantes dans le passage lycée / université**

Ces connaissances théoriques absentes dans le secondaire, sont étiquetées *manquantes* à l'entrée dans le supérieur. De ce fait les professeurs, au niveau post-bac, n'ont d'autre ressource que d'introduire simultanément tous les objets de la théorie, avec tous les modes de raisonnement, les preuves, et les questions sur la validité des énoncés. Dans une certaine mesure, ce qui se passe est du même ordre que le phénomène d'entrée dans la géométrie en classe de quatrième (élèves de 14 ans), décrit par R.Berthelot et M.H. Salin dans leur thèse (Berthelot et Salin, 1992) : dans le domaine de la géométrie, on observe un « saut direct de la problématique pratique à la problématique géométrique », saut dont Berthelot et Salin dénoncent les effets pervers pour l'apprentissage (difficultés relatives au statut épistémologique des mesures par exemple).

Pour ce qui est de l'analyse, les effets pervers sont patents : le principal est l'impossibilité, pour un nombre important d'étudiants, à entrer dans une problématique de savoir vis-à-vis de l'analyse, et l'échec plus ou moins masqué qui en résulte. On observe donc, soit des étudiants échouant massivement aux examens de DEUG, soit des professeurs négociant à la baisse le niveau des épreuves. On constate aussi qu'un nombre non négligeable de candidats au CAPES de mathématiques ne maîtrise pas la signification des principaux concepts d'analyse, ce dont font foi aussi bien les rapports du jury que les doléances des professeurs assurant la préparation.

Sur le plan des comportements et des procédures face à une tâche, on observe, chez les moins avancés des étudiants, des réactions attestant d'un manque total de sens, soit, comme en algèbre, des calculs cherchant une conformité apparente avec le maniement d'énoncés d'analyse, mais dépourvus de signification et de cohérence interne.

Ce qui ressort de notre travail nous semble-t-il, c'est que le contexte ne peut évoluer si le secondaire persiste à baser l'enseignement de l'analyse sur de l'ostension de quelques objets, de surcroît non significatifs, et sur une vague intuition, dont le statut n'est pas bien défini à ce niveau (culturel ou symbolique). Pour que la transition lycée / université puisse avoir une chance d'advenir dans une certaine continuité, il serait nécessaire que l'enseignement secondaire intègre dans son cursus des situations permettant de rencontrer les connaissances dont les étudiants ont besoin en aval.

- **Prévoir des situations pour l'élaboration de ces connaissances**

Il importe donc de déterminer les objectifs essentiels relativement à ces connaissances et les situations qui peuvent les faire vivre.

II. APPORTS DES INGENIERIES PROPOSEES

- **Ces connaissances sont *enseignables* au niveau du secondaire**

Les situations expérimentales proposées avaient pour objectif de permettre à ces connaissances d'exister dans le secondaire, en s'appuyant sur des connaissances antérieures relatives à des objets pertinents et pas trop complexes. Les résultats obtenus établissent, à notre sens, que ces connaissances sont enseignables. Dans les situations proposées, les élèves ont été amenés à prendre en charge des questions de savoir habituellement non présentes à ce niveau de l'enseignement. La mise en œuvre de situations comportant une composante a-didactique, c'est-à-dire un milieu permettant de poser des questions d'analyse, et comportant des possibilités de rétroactions, a permis la confrontation des élèves avec des connaissances relatives au SPA, à la structure et à la validité des énoncés d'analyse.

- **Détermination du milieu objectif et a-didacticité**

La construction d'un tel milieu, au niveau de l'enseignement secondaire, nous a amenée à nous interroger sur ses constituants ; il est apparu que ceux-ci sont à sélectionner, au moins en partie, parmi les ostensifs disponibles pour l'étude du concept visé. On est ainsi conduit à définir **un milieu objectif matérialisé par des ostensifs**. Cependant, lorsqu'il s'agit de notions complexes comme celles de l'analyse, le milieu primitif peut se révéler insuffisant pour traiter le problème, même s'il l'est pour poser les questions pertinentes ; auquel cas il faut prévoir que le professeur soit à même d'apporter des éléments relatifs à d'autres milieux (par exemple constitués d'ostensifs d'autres registres). Ceci pose les limites de l'a-didacticité des situations construites, et amène à redéfinir le rôle du professeur dans ce type de situations.

- **Problèmes institutionnels**

Il ne suffit certes pas que des connaissances soit enseignables pour que l'institution décide de les enseigner. Les obstacles tiennent à plusieurs facteurs :

— le temps : si la situation du flocon est « enseignable » raisonnablement dans le temps normal d'une classe de Première, la situation « Graphiques et chemins » exige un changement complet de paradigme d'enseignement de la notion de fonction, avec une autre appréhension du temps didactique et le renoncement à l'enseignement de certains outils algorithmiques ;

— ces situations se situent clairement dans une paradigme d'enseignement par situation fondamentale, et donc demandent que l'organisation classique d'enseignement par ostension soit modifiée. Or le système ne renonce pas facilement à l'ostension ; ainsi que le disent R.Berthelot et M.H. Salin (B & S 1992, p. 359) : *« l'ostension est vue comme un procédé si efficace, si ancré dans les pratiques culturelles, et si économique, dans son domaine d'efficacité, qu'il est très difficile de se convaincre de ses limites et de recourir à d'autres procédés, surtout si ceux-ci exigent de l'enseignant une modification profonde de ses rapports (au savoir). »*

— les enseignants ne disposent pas d'outils professionnels pour gérer les situations a-didactiques ou comportant une dimension a-didactique ; la recherche en didactique commence à réfléchir sur la théorie de ce travail ; la technologie et la technique professionnelle n'en sont qu'à leurs balbutiements.

— enfin, l'évaluation ne sait pas, pour l'instant, prendre correctement en compte l'apprentissage réalisé dans ce type de situations. Or on sait bien que si les épreuves d'examen, et les évaluations générales, ne sont pas capables d'évaluer les connaissances construites à ces occasions, les situations correspondantes sont abandonnées. Le groupe APMEP « Prospective bac » travaille actuellement sur des perspectives d'évaluation de travaux non algorithmiques, perspectives qui ne sont pas immédiates.

B. LES OUTILS D'ANALYSE

I. LA VALIDITE DE LA THEORIE DES SITUATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

- **La théorie des situations comme modèle**

La théorie des situations se définit comme modèle scientifique d'étude et d'analyse des phénomènes d'enseignement ; elle a prouvé son efficacité dans le domaine de l'enseignement primaire, comme l'ont montré de nombreux travaux de recherche. On lui doit en particulier, grâce aux travaux des chercheurs du LADIST[105] , et aux expérimentations menées dans le cadre du COREM[106] , l'étude de situations fondamentales de la multiplication, de la division, de l'introduction des rationnels et décimaux, de l'énumération (thèse de J.Briand) et de la géométrie, dans la thèse déjà citée de Berthelot et Salin[107] .

La théorie des situations a été moins présente dans les travaux de didactique sur l'enseignement secondaire et supérieur, quoique récemment des thèses comme celles de G.Chauvat ou de E.Lacasta y aient fait une référence forte.

Nous pensons avoir mis en évidence que la théorie des situations constitue, pour l'enseignement secondaire, un modèle non moins efficace que pour l'enseignement primaire. Les concepts de connaissances et savoirs s'avèrent déterminants pour permettre d'étudier l'activité mathématique de l'élève et du professeur ; la notion de situation fondamentale est un paradigme qui permet, grâce à une méthodologie rigoureuse, d'introduire les situations théoriques contenant les savoirs et les connaissances relatives à un concept mathématique.

La problématique de l'existence de situations fondamentales d'un concept a longtemps été confondue avec celle de la réalisation effective d'une telle situation. Le travail dans l'enseignement primaire, où il a parfois été possible d'articuler fortement les deux composantes, a sans doute contribué à ce que cette confusion s'installe et perdure.

Au niveau d'enseignement où se situe notre recherche, les contraintes du savoir et celles du système font qu'il n'est souvent pas possible de lier les deux problématiques. C'est pourquoi, dans les réalisations effectives d'ingénierie, il faut étudier l'a-didacticité de façon

[105] Laboratoire de didactique des sciences et des techniques, supprimé en 1998 par l'université Bordeaux I. Il a été remplacé par le DAEST (Laboratoire de didactique et d'anthropologie de l'enseignement des sciences et des techniques), Université Victor Segalen Bordeaux II.
[106] Centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques, supprimé en 1999 par le Rectorat de l'académie de Bordeaux…
[107] Liste bien sûr non exhaustive.

plus locale, afin de chercher si la situation permet une confrontation effective au savoir ; cette confrontation dut-elle être guidée par le professeur, lorsque le savoir visé nécessite l'introduction explicite d'outils théoriques jusque là inconnus des élèves.

Dans ces conditions le problème qui se pose est celui du contrôle des connaissances et savoirs produits, afin de s'assurer que l'on n'a pas tout simplement remplacé une forme d'ostension par une autre, plus coûteuse et plus sophistiquée.

- **Les outils de la théorie des situations**

La théorie des situations fournit également des outils incomparables d'analyse du travail dans la classe, afin de déterminer si les savoirs prétendument travaillés l'ont bien été ; le modèle de structuration du milieu est opératoire, y compris dans les situations d'enseignement « ordinaires » (comme l'ont prouvé les travaux de Comiti, Grenier, Margolinas), pour analyser ce qui s'est réellement passé dans la classe, et ce que les élèves ont pu prendre en charge de l'activité mathématique, c'est-à-dire de la construction de connaissances et du partage de la recherche de savoirs, et finalement de la recherche et de l'évolution du contrat.

D'autres chercheurs ont d'ailleurs avancé une analyse convergente (cf. Perrin, Balacheff, conférences à la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques).

Cependant la gestion de telles situations pose, au professeur, des problèmes pour la solution desquels nous disions qu'il n'existe pas actuellement de technique ou de technologie avérées. En particulier, nous avançons l'idée que, dans un tel travail, le professeur est obligé de remettre lui-même en jeu ses propres connaissances mathématiques. C'est pourquoi nous proposons de reprendre l'étude de la structuration du milieu, afin d'amorcer l'analyse du rôle du professeur lorsqu'il gère une situation comportant une dimension a-didactique.

II. LA STRUCTURATION DU MILIEU

La reprise du travail sur la structuration du milieu a donc pour but de préciser les rôles des différents protagonistes de la relation didactique, et les conditions pour qu'un professeur puisse gérer l'activité et les connaissances des élèves, dans une situation ayant une dimension a-didactique. Il s'agit de perfectionner un modèle, afin qu'il permette d'analyser :`

—le rôle du professeur, ses interventions aux différents niveaux de milieux, les connaissances qu'il met lui-même dans la situation ;
— le fonctionnement de la situation pour l'élève, la manifestation de ses connaissances ; la possibilité ou non d'existence d'épisodes didactiques ;
— la synthèse à laquelle la situation permet d'aboutir, c'est-à-dire l'institutionnalisation de savoirs auxquels peut mener l'activité mathématique conduite.

Les propositions faites afin de modifier le schéma de structuration du milieu devraient permettre de progresser dans l'analyse du rôle du professeur. Les travaux récents de chercheurs sur le même sujet (cf. Sensevy, exposé à la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques ; Conne, 1999) donnent à penser que les perspectives de recherche dans ce domaine sont ouvertes et prometteuses.

A l'issue de cette thèse, j'ai le sentiment de n'avoir fait qu'ouvrir des pistes pour l'étude de la complexité de l'enseignement de l'analyse. Ces pistes cependant me paraissent prometteuses, non pas du fait de mes prouesses intellectuelles, mais parce qu'elles s'appuient sur les éléments théoriques solides mis en place par Guy Br ousseau et tous ceux qui ont travaillé la théorie des situations. J'espère que ce travail pourra être utile à ceux qui poursuivront cette route, et m'engagerai très volontiers avec eux dans la suite de cette recherche.

Caminante
No hay camino
Son tus huellas el camino, y nada mas

Caminante
No hay camino
se hace camino al andar

Al andar se hace camino
Y a volver la vista se le ve la senda
que nunca se ha de volver a pisar

Caminante
No hay camino
Sino estelas en la mar.
Antonio Machado

BIBLIOGRAPHIE

• BIBLIOGRAPHIE GENERALE

APMEP (1998) Bac mathématiques horizon 2000. Contribution du groupe de travail "Prospective Bac". Supplément au n°414, *Revue de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement public*, Paris.

ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique . *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9. 3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

ARTIGUE M. (1991) Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10 / 2.3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1993) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. *Thèse, Université de Bordeaux I.*

BLOCH I. (1997) Connaissances mathématiques de l'enseignant - pour l'enseignement . *Petit x n° 45* - IREM de Grenoble - Université Joseph Fourier - Saint-Martin d'Hères.

BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M.P., MERRI M.(1994) La proportionnalité et ses problèmes. *Hachette Education*, Paris.

BOSCH I CASABO M. (1994) La dimension ostensiva en la actividad de matematica : el caso de la proporcionalidad. *Thèse, Université autonome de Barcelone,* Espagne.

BOSCH M. , CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/1, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 2/1, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7/2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1987) Représentations et didactique du sens de la division. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, La Pensée Sauvage,* Grenoble.

BROUSSEAU G. et N. (1987) Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9 / 3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

BROUSSEAU G. (1998) Milieu, conception. *Texte non publié*, voir chapitre 1, p.53 - 54.

BROUSSEAU G. , CENTENO J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. . *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11/2.3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

CASTELA C., MERCIER A. (1994) Peut-on enseigner les méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? *Le journal de la commission INTER-IREM didactique*, n° 1, IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1988a) Esquisse d'une théorie formelle du didactique. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique. La Pensée Sauvage,* Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1988b) Notes sur la question de l'échec scolaire. *IREM d'Aix-Marseille.*

CHEVALLARD Y (1988c) Deux études sur les notions de contrat et de situation. *IREM d'Aix-Marseille.*

CHEVALLARD Y. (1988 /1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Institut J.Fourier,* Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x* n° 19, n° 25, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1991) La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. *Ed. La Pensée Sauvage*, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1995) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Cours, Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques, Saint Sauves d'Auvergne*. IREM de Clermont-Ferrand éd.

CHEVALLARD Y. (1996) Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x, n°42. IREM de Grenoble.*

CHEVALLARD Y. et FELDMANN S. (1986) Pour une analyse didactique de l'évaluation. IREM d'Aix-Marseille

COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions de classe et modélisation de phénomènes didactiques. *Différents types de savoirs et leur articulation.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

COMITI C., GRENIER D. (1997) Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 17 / 3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

DORIER J.L et alii (1997) L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. *La Pensée Sauvage,* Grenoble.

DROUHARD J.P. (1996) Algèbre, calcul symbolique et didactique. *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont Ferrand.

DURAND-GUERRIER V. (1996) Logique et raisonnement mathématique. *Thèse*, Université Claude Bernard Lyon I.

DURAND-GUERRIER V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, n°50. IREM de Grenoble.*

DUVAL R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16 / 3, *La Pensée Sauvage,* Grenoble.

DUVAL R. (1993) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM n°17, Topiques éd*., Metz.

EVAPM Seconde (1991) Évaluation en fin de Seconde. *APMEP, 26 rue Duméril,* Paris.

EVAPM Première (1997) Évaluation en fin de Première. *APMEP, 26 rue Duméril,* Paris.

FREGONA D. (1995) Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques. *Thèse*, Université Bordeaux I.

GECO (IREM DE Nice) (1997) Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères IREM*, *n°28.* Editions Topiques, Metz.

GRENIER D. (1995) Savoirs mis en jeu dans des problèmes de combinatoire. in *Différents types de savoirs et leur articulation, éd. La Pensée Sauvage*, Grenoble.

GRENIER D. ET PAYAN C. (1997) Les mathématiques discrètes : une alternative à la géométrie pour l'apprentissage de la preuve ? *Exposé au Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 9 mars 1997.*

HACHE C. , ROBERT A. (1998) Un essai d'analyse des pratiques effectives en classe de Seconde, in *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 17 / 3, *La Pensée Sauvage,* Grenoble.

JOHSUA S., DUPIN J.J. (1993) Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques *Presses universitaires de France*, Paris.

LAKATOS I. (1976) (1984 pour la traduction française) Preuves et réfutations. *Editions Hermann*, Paris.
LEONARD F. ET SACKUR C. (1991) Connaissance locale et triple approche, une méthodologie de recherche, in *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10 / 2.3, *La Pensée Sauvage,* Grenoble.
LORENZEN K. (1967) Métamathématique. *Editions Gauthier-Villars*, Paris.
MARGOLINAS C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12 / 1, *La Pensée Sauvage,* Grenoble.
MARGOLINAS C. (1993) De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. *La Pensée Sauvage*, Grenoble.
MARGOLINAS C. (1994) Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. *Séminaire Dida Tech, n° 158, Université Joseph Fourier*, Grenoble.
MARGOLINAS C. (1997) Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate.
MERCIER A. (1992) L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. *Thèse*, Université Bordeaux 1.
MERCIER A. (1995) La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 15 / 1, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.
MERCIER A. (1998a) La participation des élèves à l'enseignement ; le partage des tâches didactiques entre les élèves et le professeur : apports didactiques à l'étude de la classe de mathématiques comme espace social. *Exposé, Séminaire National de Didactique des mathématiques*, Paris.
MERCIER A. (1998b) Ce que nous pouvons apprendre de l'observation biographique des élèves. *Conférence*, actes du colloque COPIRELEM de Loctudy.
PEIRCE C.S. (1898) Le raisonnement et la logique des choses. *Conférences à l'Université de Cambridge, Massachussets, Etats-Unis*. *Editions du Cerf*, 1995, Paris, pour la traduction française.
PERES J. (1984) Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. *DEA*, IREM de Bordeaux.
PERRIN-GLORIAN M.J (1996) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement dans des classes "faibles", in *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 13 / 1.2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.
ROBERT A., ROBINET J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *in Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.
ROUBAUD J. (1997) Mathématique : (récit). *Editions du Seuil,* Paris.
SENSEVY G. (1998) Institutions didactiques. *PUF L'éducateur, Paris*.
WOILLEZ D. (1999) Rapport entre raisonnement arithmétique et utilisation de l'algèbre en Quatrième. *Actes de l'Université d'été " Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques ", La Rochelle 1998*. Noirfalise (coordonné par) , IREM de Clermont-Ferrand.

- **BIBLIOGRAPHIE SUR HISTOIRE DES SCIENCES ET**

EPISTEMOLOGIE

CHALMERS A. (1982) Qu'est-ce que la science ? *Ed. La Découverte, Paris, 1987 pour la traduction française.*

Collectif (1996) Les mathématiciens, *éd. Pour la science*, Belin, Paris.

COMMISSION INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES (1989) La démonstration mathématique dans l'histoire, *édition et diffusion* IREM de Lyon.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. (1982) Routes et dédales. *éd. Etudes Vivantes*, Paris.

DHOMBRES J. (1978) Nombre, mesure et continu . Epistémologie et histoire. *Cedic - Nathan* , Paris.

DIEUDONNE J. (1978) Abrégé d'histoire des mathématiques, *Hermann*, Paris.

HOFSTADTER D. (1979) Gödel, Escher, Bach. *InterEditions, 1985, pour l'édition française.* Paris.

HOUZEL C., OVAERT J.L., RAYMOND P., SANSUC J.J. (1976) Philosophie et calcul de l'infini. *Maspéro*, Paris.

MONNOYEUR F. (Sous la direction de) (1992) Infini des mathématiciens, infini des philosophes. *éd. Pour la science*, Paris.

SALANSKIS J.M , SINACEUR H. (éditeurs) (1992) Le labyrinthe du continu (colloque de Cerisy) . *Springer Verlag France,* Paris.

ULLMO J. (1969) La pensée scientifique moderne, *Flammarion,* Paris.

YOUSCHKEVITCH A.P. (1981) Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle, in *Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP n°41*, Paris.

• BIBLIOGRAPHIE SUR SAVOIRS ET CONNAISSANCES

ARSAC G. et alii (éditeurs) Différents types de savoirs et leur articulation, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.19/ 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

CONNE F. (1988) Didactique, généralité et spécificité. *Conférence, Université de Fribourg.*

CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12 / 2.3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

CONNE F. (1994) Quelques enjeux épistémologiques rencontrés dans l'enseignement des mathématiques. *Actes du XXIème congrès de la COPIRELEM*. IREM de Picardie, éd.

CONNE F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que cela donne. *Communication, congrès REF 1996,* in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, F.Conne et G.Lemoyne eds, Presses de l'Universite de Montréal.

CONNE F. (1997a) Cours UNIL, non publié.

CONNE F. (1997b) L'activité du couple enseignant / enseigné. *Conférence, IXème école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate.

CONNE F. (1998) : Relations entre savoir mathématique et connaissance : réflexions à partir du contraste entre école maternelle et enseignement élémentaire. *Conférence*, stage national IUFM, Bordeaux.

CONNE F. (1999) Lorsque la représentation se prend au jeu : quelques considérations sur l'improvisation dans l'enseignement des mathématiques. *Exposé à la Xème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques,* Houlgate.

FAVRE J.M. (1996) Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant ? *Communication, congrès REF,* Montréal.

GRENIER D. (1995) Savoirs mis en jeu dans des problèmes de combinatoire, in *Différents types de savoirs et leur articulation, La Pensée Sauvage,* Grenoble.

ROUCHIER A. (1991) Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation. *Thèse*, Université d'Orléans.

ROUCHIER A. (1995) Sur quelques oppositions et mises en relation dans les études didactiques. in *Différents types de savoirs et leur articulation, La Pensée Sauvage,* Grenoble.

• BIBLIOGRAPHIE SUR L'ANALYSE ET LA DIDACTIQUE DE L'ANALYSE

AHA (Groupe Approche Heuristique de l'Analyse) (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *in Repères IREM, n°25, Topiques éditions*, Metz

ALLIOT J.F, LIEGAULT S. (1998) Etude de l'enseignement des fonctions au lycée : utilisation par les élèves de registres de représentation. *Mémoire professionnel, sous la direction de Marc Rogalski*, IUFM Nord - Pas de Calais.

ALSON P. (1987) Metodos de graficacion. *Université de Caracas*, Venezuela.

ALSON P. (1991) A qualitative approach to sketch the graph of a function. in *School science and Mathematics*

ANTIBI A. (1988) Etude sur l'enseignement de la démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions. *Thèse, Université Paul Sabatier*, Toulouse.

ARTIGUE M (1992) Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices. *Mathematical Association of America, Notes Series, n° 25*.

ARTIGUE M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*, n°11. *Topiques éditions*, Metz.

ARTIGUE M. (1995) Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM*, *n°19.* Editions Topiques, Metz.

ARTIGUE M. (1996) L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques. *Colloque, Université de La Laguna, Tenerife,* Espagne.

ARTIGUE M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

ARTIGUE M. , DROUHARD J.P. , LAGRANGE J.B. (1994) Acquisition de connaissances concernant l'impact de l'intégration de logiciels de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire. *Cahier de DIDIREM, n°24*. IREM, Université Paris VII.

ARTIGUE M., DEFOUAD B., DUPERIER M., JUGE G., LAGRANGE J.B. (1998) Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée. *Cahier DIDIREM spécial n° 4 , Université Denis Diderot Paris VII,* Paris.

ARTIGUE M., GAUTHERON V.(1983) Systèmes différentiels : étude graphique. *Cedic*, Paris.

ASSUDE T. (1992) Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum. *Thèse, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

BERTHELOT C., BERTHELOT R. (1983) Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de Première A. *DEA, université de Bordeaux I.*

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève : un exemple dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique.

Recherches en didactique des mathématiques, vol.19/ 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BRONNER A. (1997) Etude didactique des nombres réels. *Thèse, laboratoire Leibnitz IMAG, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

CANET J.F, DELGOULET J ; GUIN D, TROUCHE L. (1996) Un outil personnel puissant qui nécessite un apprentissage et ne dispense pas toujours de réfléchir. *in Repères IREM, n°25, Topiques éditions*, Metz.

CHAUVAT G. (1997) Etude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réells dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels. *Thèse,* Université d'Orléans.

CHAUVAT G. (1999) Courbes et fonctions au collège. *Petit x, n° 51*, IREM de Grenoble.

CHEVALLIER A. (1993) Introduction aux aires et volumes dans une perspective historique. *in Actes de la première université d'été européenne " Histoire et épistémologie des mathématiques ", éd. IREM*, Montpellier.

CORNU B. (1983) Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles. *Thèse de 3ème cycle,* Grenoble.

CORNU B. (1992) Limits, *Advanced Mathematical Thinking*, *D.Tall, éd., Kluwer*, Dordrecht.

COSTE-ROY M.F. (1988) Transition secondaire / post-secondaire : en France, la rénovation des premiers cycles scientifiques. *Rapport à ICME 6, Budapest 1988. Publié dans " L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire ",* commission INTER-IREM " Université ".

DELEDICQ A. (1996) Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *in Repères IREM, n°24, Topiques éditions*, Metz.

DIEUDONNE J. (1980) Calcul infinitésimal. *Hermann, éd.1997*. Paris.

DIGNEAU J.M (1989) Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la Seconde. *IREM de Bordeaux, Université Bordeaux I.*

DI MARTINO H. (1992) Analyse du contrôle épistémologique d'une situation didactique : la situation du pétrolier. *DEA, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

DI MARTINO H., LEGRAND M., PINTARD D. (1995) Modélisation et situations fondamentales. *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

DUPIN J.J. (1995) Modèles et modélisation dans l'enseignement, quelques contraintes didactiques. *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

DUVAL R. (1994) Les représentations graphiques : fonctionnement et conditions de leur apprentissage. *Actes du colloque CIEAEM, éd. Antibi, université Paul Sabatier*, Toulouse.

EL BOUAZZAOUI H. (1988) Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction. *Thèse, Université Laval,* Québec.

FUNRIGHETTI F., SOMAGLIA A. (1994) Functions in algebraic and graphical environments. *Actes de la 46ème rencontre CIEAEM, éd. A. Antibi,* Toulouse.

GAUD D., GUICHARD J., SICRE J-P., CHRETIEN C. (1998) Des tangentes aux infiniment petits (réflexions et travaux pour la classe). *éd. IREM*, Poitiers.

GILBERT T. (1993) Qu'est-ce que l'analyse non-standard ? *Repères IREM, n° 11, Topiques éditions*, Metz.

GILBERT T. (1993) La continuité et la dérivation en analyse non-standard. *Repères IREM, n° 13*. *Topiques éditions*, Metz.

GRECO, DIDIREM, GROUPE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE (1989) Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire. *Université Paris VII*. IREM Paris VII, Paris.

HAUCHART C. , SCHNEIDER M. (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *in Repères IREM, n° 25*, *Topiques éditions*, Metz.

HAUCHART C. , KRYSINSKA M. (1993) Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe. *in Actes de la première université d'été européenne " Histoire et épistémologie des mathématiques ", éd. IREM*, Montpellier.

HAUCHART C., ROUCHE N. (1985) Suites et séries géométriques. *Bulletin APMEP n° 348,* APMEP éditeur, Paris.

HEAULME F. (1996) Liaison Terminale S — DEUG A . *Bulletin APMEP n° 410, Journées nationales Albi 1996*. APMEP éditeur, Paris.

IREM de Poitiers (199 ?) Limites et infini au lycée.

IZORCHE M.L (1977) Les réels en classe de Seconde. *Mémoire de DEA, Université Bordeaux I.*

KOLMOGOROV & FOMINE (1974) Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. *Editions MIR*, Moscou.

KUNTZ G. (1996) Saut d'obstacle. *Repères IREM, n° 22*, *Topiques éditions*, Metz.

KUNTZ G. (1998) Suite de Fibonacci : le zéro et l'infini. *Bulletin APMEP n° 418*, Paris.

LEGRAND M. (1991) Groupe des situations fondamentales et métaphore fondamentale. Réflexions autour de la recherche d'une situation fondamentale au sujet du concept de limite : la situation du pétrolier. *Séminaire Dida Tech n° 131*, *Université Joseph Fourier*, Grenoble.

LEGRAND M. (1995) Mathématiques, mythe ou réalité ? *Repères IREM*, *n°21*,*Topiques éditions* , Metz.

LEGRAND M. (1996) La problématique des situations fondamentales. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

LEGRAND M. (1997) La problématique des situations fondamentales. *Repères IREM*, *n°27*,*Topiques éditions* , Metz.

LE MEHAUTE A. (1990) Les géométries fractales. *Editions Hermès*, Paris.

LONGO G. (1999) L'infini mathématique et les preuves. *CNRS et Département de mathématiques et informatique, Ecole Normale Supérieure*, Paris. Disponible sur le site : http://www.dmi.ens.fr/users/longo

LUTZ R., MAKHLOUF A., MEYER E. (1996) Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés. *APMEP, brochure n° 103, 26, rue Duméril,* 75013 Paris.

MARGOLINAS C. (1985) *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4ème, le nombre dans tous ses états*, DEA, Université Bordeaux 1.

MASCHIETTO M. (1998) *Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse mathématique*, mémoire de DEA, Université Paris 7.

PECAL M., SACKUR C. (1996) (Groupe IREM "Liaison lycée - DEUG") Quelle rupture et quelle continuité dans 1'enseignement des mathématiques au lycée et à 1'université. *Bulletin APMEP n° 410, Journées nationales Albi 1996.* APMEP éditeur, Paris.

PERRIN M.J (1999) La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *in Repères IREM, n°34, Topiques éditions,* Metz.

RENYI A. (1966 ; 1992 pour la réédition) Calcul des probabilités. *J. Gabay éd.,*Paris.

ROBERT A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans 1'enseignement supérieur. *RDM,* vol. 3.3.

ROGALSKI J. (1984) Représentations graphiques dans 1'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions. *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique, Sixièmes journées Internationales sur l'éducation scientifique, Giordan et Martinand éd.,* Chamonix.

ROGALSKI M. (1990) Graphiques et raisonnements : visualiser des fonctions. *in "Audi-math" n°2, dossier de 1'enseignant de mathématiques, Centre National de Documentation Pédagogique, Ministère de l'Education Nationale,* Paris.

ROGALSKI M. (1994) Les concepts de 1'EIAO sont-ils indépendants du domaine ?

L'exemple de 1'enseignement de méthodes en analyse. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 14-1/2.

RUIZ HIGUERA L. (1993) Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la nocion de funcion : analisis epistemologico y didactico. *Thèse, Université de Grenade,* Espagne.

SCHNEIDER M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *in Repères IREM, n°5, Topiques éditions,* Metz.

SCHNEIDER M. (1992) A propos de 1'apprentissage du taux de variation instantané. *Educationnal Studies in Mathematics, n° 22, Kluwer Academic Publishers,* Pays - Bas.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 6.1.

SIERPINSKA A. (1992) On understanding the notion of function, *in MAA Notes n° 25 (The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy),* p. 25-58. Mathematical Association of America.

SPAGNOLO F. (1995) Les obstacles épistémologiques : le postulat d'Eudoxe-Archimède. *Thèse, Université Bordeaux I.* Edité à Palerme, Italie.

SCHWARZ B., DREYFUS T. (1995) New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educationnal studies in Mathematics, n° 29, p. 259 - 291. Kluwers Academic Publishers,* Nederlands.

TALL D. (1994) A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics. *Conference pleiniere, 46ème rencontre de la CIEAEM,* Toulouse.

TALL D. (1996) Functions and calculus, *in Bishop et alii, (eds) International Handbook of Mathematics Education, Kluwer;* Dordrecht.

TASSO D, VOGEL N (1996) Quelques semaines du cours d'analyse de Première S avec DERIVE, *in Repères IREM, n°25, Topiques éditions, Metz.*

THIENARD J.C. (1991) Pour une approche de 1'enseignement de 1'analyse par Ie calcul infinitésimal. *IREM de Poitiers.*

TROUCHE L. (1992) Les calculatrices graphiques au lycée : statut pour le maître, statut pour 1'élève. *DEA, Université des sciences et des techniques du Languedoc,* Montpellier.

TROUCHE L. (1996) Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. *Thèse, université de Montpellier II.*

TROUCHE L. (1999) Variations sur la dérivation, *in Repères IREM, n°34, Topiques éditions,* Metz.

TROUCHE L. (1999) Variations sur la dérivation. *in Repères IREM, n°34, Topiques éditions*, Metz.

• MANUELS SCOLAIRES ET AIDES PEDAGOGIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT

ANTIBI A. et BARRA R. (1991) Math 1ère S. *collection Transmath*, éd. Nathan, Paris.

AUDIRAC et alii (1983), Terminale C, Analyse, éditions Magnard, Paris.

BOUVIER JP. et alii (1995) Math 1ère S, avec modules. Editions Belin, Paris.

BRABANT P. et alii (1995) Mathématiques, 1ère S. *Nouveau Fractale*, éditions Bordas, Paris.

CAGNAC G. et THIBERGE L. (1963) Mathématiques Elémentaires : analyse, trigonométrie, cinématique. Editions Masson, Paris.

COMMEAU J. (1963) Géométrie, classe de Mathématiques Elémentaires. *Collection Cagnac et Thiberge,* Editions Masson , Paris.

DUMONT A. et alii (1991) Mathématiques. Première S -E. *Magnard lycées*, éditions Magnard, Paris.
ERMEL (1997) Apprentissages numériques et résolution de problèmes. *Publication INRP, Hatier,* Paris.
RODRIGUE D. , DUBOIS F. (1995) Mathématiques, Première S. *Collection Déclic*, éd. Hachette, Paris.
TERRACHER P.H. , FERACHOGLOU R. (1994) Math Seconde. Editions Hachette, Paris.
TERRACHER P.H. , FERACHOGLOU R. (1995) Math 1ère S. Editions Hachette, Paris.
TERRACHER P.H. , FERACHOGLOU R. (1998) Math Terminale S. Editions Hachette, Paris.
VERGNAUD G. (1997) (sous la direction de) Le moniteur de mathématiques, *Fichier pédagogique cycle 3, Résolution de problèmes. Nathan*, Paris.

- **INSERTS**

CARROLL Lewis (1979 pour la présente édition) A travers le miroir. *Ed. Flammarion*, Paris.
DOLTO F. (1987) Tout est langage. Gallimard, 1994 pour la présente édition. Paris.
LAKATOS I. (1976) (1984 pour la traduction française) Preuves et réfutations. *Editions Hermann*, Paris.
PEIRCE C.S. (1898 ; 1995 pour l'édition française) Le raisonnement et la logique des choses. *Editions du cerf*, Paris.
ROUBAUD J. (1997) Mathématique : (récit). *Editions du Seuil,* Paris.
WITTGENSTEIN L. (1930) Remarques philosophiques. 1975 pour l'édition française. *Gallimard*, Paris.

- **MUSIQUE**

Brad MEHLDAU *Elegiac cycle* (Warner Bros éd)
Bill CARROTHERS *After Hours (vol 4)* (Go Jazz éd.)
Brad MEHLDAU *The Art of the Trio (vol 1)* (Warner Bros éd)
Diana KRALL *All for you (A dedication to the nat King Cole Trio*). (BMG dist).
Ahmad JAMAL *The essence (part 1).* (Polydor)
Jean-Pierre MAS *Rue de Lourmel*. (EMI dist.)
Chet BAKER *Chet*. (Riverside records)
Olivier MESSIAEN *Vingt regards sur l'enfant Jésus*. (EMI)
Barney WILEN *Un témoin dans la ville*. (Fontana)
Bill EVANS *You must believe in spring*. (Warner Bros éd)

ANNEXES

Annexe 1

CHAPITRE 5 - ANNEXE V

TRANSCRIPTION DES SEANCES SUR LES FONCTIONS

Novembre 96

<u>Première séance filmée: mercredi 6/11/96</u>

Les élèves s'installent en groupes ; P circule dans la classe.
01 P : tout le monde a une feuille ? J'ai distribué un papier, on va peut-être le lire ensemble ; allez, chut,vous êtes plus en sixième. Alors on va travailler sur les fonctions ; je vous avais dit qu'on ferait un travail en espagnol ; il y en a qui sont très déçus, la première feuille est en français, je suis désolée, c'est moi qui l'ai faite ; ça va venir. Dans un premier temps, on va se mettre d'accord sur ce que c'est qu'un graphique de fonction, comment on va travailler dessus. Alors au départ, vous allez travailler sur cette feuille-là , puis vous aurez les feuilles suivantes, à chaque fois il s'agira de faire des graphiques. Jaoued, t'as une feuille ? Donc le travail, comme d'habitude, j'ai mis une petite flèche, attention, ceci est votre cours sur les fonctions numériques. Alors vous prenez votre cahier de cours, et le titre c'est fonctions numériques. Ensuite on commence à travailler sur la feuille. On fera un point à la fin du premièrement, dans environ un quart d'heure, vingt minutes . *(P écrit au tableau : Chapitre 4 – Fonctions numériques – 10H30 : point sur le 1).*
Prenez du papier de brouillon s'il vous plaît, vous allez avoir à dessiner beaucoup de graphiques, j'aimerais mieux qu'il y ait pas des fonctions dessinées partout sur les tables.
(Les élèves travaillent en groupes).
02 P *(répond à une question)* Vous avez le droit de prendre votre livre si vous êtes en panne, mais commencez à travailler d'abord, si vous êtes en panne vous pourrez toujours le prendre.
P circule et s'assied à côté d'un groupe…
Travail dans les groupes :
On entend : ça c'est pas une fonction… et les paraboles ?
<u>03 Groupe 1</u> : (Fabien B., Prisca, Jaoued)
Prisca : mais c'est nul ! … un cercle, une droite… (rires) Un point, c'est une fonction, un point ?
Prisca : un cercle…
Fabien : eh ! un cercle c'est pas une fonction !
Prisca : un cercle n'est pas considéré comme une fonction…
(P travaille avec le groupe 2 : Etienne, Sébastien, Guillaume M., Arnaud) :
04 P : là est-ce que c'est un graphique de fonction ?
05 Sébastien : non, pour une ordonnée y a deux abscisses.
06 Fabien : Madame, on se demandait…
07 Prisca ; une courbe c'est une fonction ?
08 P : une courbe c'est un ensemble de points du plan, du plan mathématique, mais il y a des courbes mathématiques, qui ne sont pas des fonctions… quel critère on va retenir…
09 Fabien : x a une seule image
10 Prisca : oui, alors sur la courbe, si on prend x… (dessin)
11 P : oui, si on prend la parallèle ici (dessinée par Prisca) comment on voit que x a une seule image… elle coupe la courbe qu'une seule fois, c'est tout. Alors là une question, c'est sur

quel intervalle on va définir les fonctions, parce que si on parle des fonctions avec les graphiques, un graphique c'est limité dans l'espace, donc il faut bien que je sache sur quel intervalle elle est définie

12 Fabien : ça peut être R tout entier

13 P : oui mais ça se verra pas sur le graphique, c'est ça le problème, tu peux pas dessiner R tout entier ; si c'est **R**, il va falloir…

14 Prisca : délimiter !

15 P : soit on délimite, alors on dessine l'intervalle, soit on délimite pas, et alors on dit : j'admets que ça se prolonge comme ça et ça… sinon ça va pas ! je peux pas voir ce qui se passe !

(Arnaud regarde sur la feuille de Prisca)

16 E : pourquoi ? pourquoi elles ne sont pas des graphiques de fonctions ?

17 E : regarde tu prends un point de là !

(on entend : Marseille y z'ont gagné, hein !)

René (observateur) circule

18 Prisca : regarde deux points là ! même là !

(20 mn)

19 P : bon alors on va faire un point pour tout le monde, là ! tout le monde écoute, là ; il y a des problèmes qui ont été soulevés par plusieurs groupes et j'aimerais bien qu'on revienne dessus. D'abord j'avais eu tort d'écrire " ces critères " (critère pour qu'un graphique représente une fonction) parce qu'en fait y a qu'un critère mais il s'écrit de deux façons différentes c'est pour ça que j'avais mis " ces critères ", pour savoir si un graphique représente bien le graphique d'une fonction ou pas. Alors pratiquement tout le monde est arrivé à quelque chose, c'est de dire que ça (dessine au tableau) c'est pas une fonction, et ça (dessin) c'en est une, et le critère, c'est qu'on peut l'écrire soit de façon fonctionnelle soit de façon graphique ; alors de façon graphique si je prends une valeur de x, et si je mène la parallèle à l'axe des y, elle va couper la courbe qu'une seule fois, et ceci quelle que soit la valeur de x choisie ; ça doit être vrai pour tout x, ça, pour que ce soit vraiment un graphique de fonction, déjà ; il y des gens à qui ça a causé des difficultés ; et en termes fonctionnels, ça veut dire que pour tout x, il y a un seul y tel que f(x)=y (P écrit en parlant) ;

Bon, alors il y a un problème qui s'est posé, c'est finalement un problème d'ensemble de définition, parce que, certains groupes disent, est-ce que j'ai le droit de prendre un seul point et de dire que c'est une fonction, ou est-ce que j'ai le droit par exemple, de prendre deux segments comme ça (dessine) et de dire, au milieu y a rien, mais c'est quand même une fonction. Alors la question c'est, quand on définit une fonction, il faut effectivement dire sur quoi on la définit. Mais ça c'est quelque chose que vous avez déjà vu en Seconde quand même.

Ici (montre le point) est-ce que c'est une fonction, est-ce que c'est un graphique de fonction ?

20 E1 : non ! E2 : oui

21 P : on dira que oui, seulement elle est pas définie en beaucoup de points, elle est définie exactement en un seul point, au point x=3 et c'est tout ; quelqu'un a écrit l'intervalle [3,3] ; c'est juste, ça prolonge la notation habituelle des fonctions ; habituellement, on disait une fonction définie sur [-1.5] ou [0.3], et à valeurs numériques, c'est à dire dans **R**, l'ensemble des nombres.

Et ceci ? (montre la courbe en deux segments) par exemple, -5. –1. 4 . 8 : est-ce que j'ai le droit de dire que c'est une fonction ?

22 Es : oui

23 P : et quel est son ensemble de définition ?

24 Es : [-5.-1] et [4.8]

25 P : ces exemples, je pense que vous pouvez les noter, c'est un peu les exemples limites qu'on va rencontrer ; alors remarque à ce sujet : quand on parle des fonctions en termes de graphique, il va toujours falloir qu'on précise sur quel intervalle, parce que sur un graphique je ne peux pas voir l'ensemble **R** tout entier. Si je dessine une fonction, par exemple celle-ci, a priori le graphique ne donne aucun renseignement sur ce qu'elle fait du côté des très grands nombres ou du côté des très petits ; ça il faut en être conscient ; on va l'écrire ça aussi.

Les groupes qui ne l'ont pas fait, vous écrivez le critère ; vous pouvez prendre des exemples limites en disant, on admettra effectivement que ce sont bien des fonctions mais il faudra préciser à chaque fois sur quel ensemble elles sont bien définies ; et puis, (P efface) je vais garder cette fonction-là, par exemple… le critère en termes fonctionnels, ou le critère en termes graphiques…

le critère en termes graphiques, rappelez-vous, on peut l'écrire rapidement avec ce qu'on avait vu en début d'année, les chemins directs ; on avait dit un chemin direct, ça veut dire je pars de x, et je fais ça (dessin) et je vais trouver la valeur de y correspondante. Pour une fonction, qu'est-ce qu'on peut constater par rapport aux chemins directs ?

26 E : il est unique

27 P : voilà, y en a qu'un ; pour tout x, il y a un seul chemin direct. Alors… l'autre, c'est celui-là (entoure au tableau " pour tout x, il y a un seul y tel que f(x) =y " et le lit à haute voix) ; et en termes de chemins, ça donne, donc, pour tout x… critère : le graphique est celui d'une fonction.. pour tout x, il y a un seul chemin direct… les chemins, on les avait appelés (x, f(x)) ; et ça revient à dire, ce que certains groupes avaient dit tout à l'heure, et qu'on avait écrit : pour tout x, si je mène la parallèle à l'axe des y, elle ne coupe la courbe qu'une seule fois.

Alors le problème d'ensemble de définition que certains groupes ont posé, nous amène à poser quelques points sur la validité du graphique : quand est-ce qu'on sera amenés à dire que le graphique nous donne des renseignements, et quand est-ce qu'on dira que là, on peut pas se servir du graphique, il faudra faire autre chose.

(P écrit au tableau : validité des graphiques)

28 P : Alors la propriété essentielle c'est qu'un graphique c'est borné (écrit) et ne donne pas de renseignement sur ce que fait la fonction au-delà de ce qu'on voit, c'est-à-dire pour des valeurs plus grandes ou plus petites que celles qui sont dessinées sur le graphique… pour les valeurs extérieures au graphique… au <u>dessin</u>.

29 Prisca : les feuilles on les garde ?

30 P : les feuilles de brouillon je les relèverai.

P : bon, alors, qu'est-ce que ce sera qu'un graphique de fonction ? on est ici un petit peu comme en géométrie, c'est-à-dire qu'il ne faut pas confondre le graphique et le dessin – c'est un petit peu, si vous regardez la deuxième question, c'est un petit peu pour être sûr qu'on parle bien de la même chose, c'est-à-dire on va parler d'un graphique, on va pas parler du dessin, le dessin il est forcément imparfait, les courbes elles ont peut-être l'air à certains moments d'être plates et puis elles le sont pas, enfin on parle du graphique, le graphique c'est un objet <u>mathématique</u>, rappelez-vous, en mathématiques on parle d'objets imaginaires *(allusion à une séance au début de l'année sur les signes en mathématiques).* Alors c'est quoi un graphique ? il va falloir faire attention à bien raisonner sur le graphique et pas sur ce qu'on a dessiné qui est plus ou moins juste, etc…

Donc un graphique, ce sera quoi ? un graphique de fonction…par définition, l'ensemble des points de coordonnées x, f(x), avec les contraintes qu'on a dites. (P écrit) Attention, pour ne pas confondre graphique et dessin, si on a des problèmes, c'est-à-dire si le dessin ne permet pas du tout de dire quelque chose sur la fonction, dans ce cas, qu'est-ce qu'on fera si on a des problèmes ?

31 E : on fera un calcul

32 P : oui, et si on veut garder le dessin, et bien on mettra une légende. Pensez à cette solution, hein, si vous avez des problèmes, si le dessin n'est pas clair, soit vous avez la formule algébrique de la fonction, soit vous ne l'avez pas et on met une légende. Soit calculer, vérifier par le calcul, si c'est possible, ou mettre une légende – ou les deux d'ailleurs.

Par exemple la fonction dessinée, elle est croissante sur [a,b], mais si je veux dire qu'elle est croissante sur R, je l'écris .
Alors maintenant, on va vous laisser travailler un moment, vous faites la question suivante, le point sur les fonctions que vous avez vues en Seconde.
Est-ce qu'il y a des questions sur cette première partie ? (…) Allez, les fonctions de Seconde, et après je distribue l'autre fiche.
(11H10)
Les élèves travaillent en groupes.
33 Prisca : d'abord y a fonction affine et linéaire
Groupe 3 : Guillaume L., Blandine, Vianney, Christian
34 Blandine : racine de … 6, c'est pas une…
P passe dans les groupes, vérifie l'avancement et distribue les fiches suivantes.
35 Prisca : Bien ! on fait les graphiques, c'est tout !
Sonnerie – Pause 10 mn
Retour des élèves, suite du travail en groupes
36 Prisca, à Christian et Vianney : vous êtes sûrs ? il faut dire qu'il y a des (inaudible)
37 P : majorer, minorer, vous l'avez au dos de la fiche, hein !
38 P (à groupe 3) : avancez un peu, là ! (Guillaume L. demande une précision — inaudible – P répond)
Discussions sur fonction croissante : importance des quantificateurs universels, les élèves dessinent des graphiques répondant aux conditions imposées (voir fiches).
39 Prisca : décroissante c'est si a<b alors f(a) > f(b)
40 Jaoued : dès que tu en as deux ça marche…
41 Fabien : non ! *(réflexion)*
42 Prisca : c'est… pas sûr que ça marche
Vianney se retourne et montre l'écran de sa calculatrice graphique à Prisca, Jaoued et Fabien.
43 Guillaume L. : c'est ce que j'ai dit !
44 Prisca : *cherche dans son livre de mathématiques la définition d'un maximum et la lit à haute voix*. Le maximum est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe, ça c'est plus…
45 Claire (groupe 4) : tu sais pas ce que c'est un minimum ? attends, mais ça veut dire qu'il y a pas de points au dessous…
46 P (avec Jaoued) : un majorant sur [a,b], qu'est-ce que ça veut dire ? si tu continues la courbe, en dehors, est-ce que c'est forcément un majorant ?
(Jaoued dessine)…
Fin de la séance.

Deuxième séance filmée : mercredi 13/11/96 de 10H à 12H

01 P : sur les fonctions, vous vous souvenez qu'hier, on avait éclairci un certain nombre de points sur les maximums, les minimums, et les fonctions bornées ; par exemple une question qui avait été posée par certains d'entre vous, c'était : est-ce que toute fonction qui admet un majorant, a aussi un maximum. On avait vu que c'était pas absolument obligatoire, c'est-à-dire qu'il y a des fonctions qui ont un majorant, et qui n'ont pas de maximum. Sinon le travail jusqu'à le feuille n°5 n'avait pas posé vraiment de problème.
Par contre on a rencontré des problèmes, c'est dans la feuille n°6, et j'aimerais bien qu'on y revienne : dans la feuille n°6, la première ligne n'avait pas posé de problèmes…
02 E : si
03 P : ah bon, alors lequel avait posé des problèmes ?
04 E : les premiers, y a écrit si a < x < b , et on sait pas quels x...
05 P : ah, alors c'était une illusion de ma part, ça avait donc posé des problèmes, donc … Alors que veulent dire les spécifications de la feuille n°6 ? alors il y a une difficulté, qui vient de ce que les consignes ne sont pas quantifiées… c'est-à-dire, on vous dit, si a <x <b, alors f(a) < f(x) < f(b) ; encore celui-ci, ça allait à peu près, ceci dit, c'est vrai qu'il manque un quantificateur, alors la difficulté vient de ce que la consigne n'est pas la même que dans l'une des feuilles précédentes ; vous vous souvenez, le dessin il était comme ça (dessine), on avait par exemple a, b, c (P place c entre a et b) et on vous disait : trace une courbe continue telle que f(a) < f(c), et par exemple f(b) < f(c). Là ça veut dire c appartient à [a,b], et c est le point noté sur le graphique, et ça faisait quelque chose comme ça (dessine une courbe au tableau).
Alors que là, il faut comprendre que c'est <u>pour tout x</u> : on vous demande de tracer le graphique d'une fonction f définie où ça ? où est-elle définie ? d'après ce qui est écrit dans certains cadres, elle n'est pas uniquement définie sur [a,b], puisqu'il y a des cadres où on prend x < a par exemple ; donc elle est définie sur un intervalle qui contient [a,b], ce qui veut dire, sur [a,b], et dans certains cas, si x < a ou x > b, en dehors, sur un intervalle plus grand. Et dans l'un des cadres, par exemple, on dit que si a < x < b, alors f(a) < f(x) < f(b) ; alors en fait pour que ce soit tout à fait correct mathématiquement, il faudrait mettre quel que soit x tel que a < x < b
(P écrit en même temps).
Or justement, au début, on avait dit que si on avait c tel que a < c < b et : f(a) < f(c) < f(b), est-ce que la fonction était nécessairement croissante ?
06 E : non
07 P : et là, est-ce qu'elle l'est ?
08 E : oui
09 P : oui, bon… Après, quelquefois, on avait eu du mal à trouver une fonction qui convenait ; ça marchait jusqu'où ?
10 E : le 6, au cadre 6 on a des problèmes
11 P : Est-ce que tout le monde est allé jusque là ?
12 Es : oui
13 P : bon, on reprend là. On dit, pour tout x < a, on f(b) > f(x) ; et pour tout x > b, on a aussi cette condition, f(b) > f(x) ; ça va, c'est clair ? Bien ; alors est-ce que vous pouvez tracer une fonction qui vérifie ces conditions ?
14 Es : oui
15 P : oui ? vous pouvez me l'expliquer en termes aussi mathématiques que possible ? qu'est-ce qui se passe pour la fonction f ?
16 Es : elle est croissante
17 P : elle est croissante ? sur [a,b] , bon. Ensuite ? avant, après ?
18 Es : elle est croissante
19 Guillaume : pas obligatoirement ; le tout c'est qu'elle ne dépasse pas…

20 P : oui ? c'est quoi le majorant ?
21 Es : f(b)
22 P : oui… f(b) est un majorant de f si x<a ; et si x > b ? et bien aussi. Là on peut la faire descendre (dessine) et est-ce qu'elle peut remonter ?
23 E : oui, à condition de pas dépasser…
24 P : oui, et de l'autre côté… aussi, elle peut osciller, comme ça (dessin).
Alors il y a quand même un petit problème, c'est qu'on ne dit pas jusqu'où la fonction est définie ; soit sur un intervalle plus grand que [a,b] et ça s'arrête quelque part ; soit souvent on dit qu'elle est définie sur R tout entier, du côté de moins l'infini et aussi de plus l'infini, mais alors avec des réserves sur ce que le graphique me dira ; vous vous souvenez qu'on avait dit au début, les graphiques quand ça va vers l'infini, il faut être sûr que ça continue à faire exactement ce que ça faisait au début, parce que sinon on a pas de contrôle visuel, avec le dessin on n'a pas de contrôle.
Donc si on vous dit rien, vous admettez qu'elle est définie un peu plus loin ; si on vous dit sur **R**, ça se prolonge.
Alors les difficultés commençaient au 7 ; là on tombait sur des types de fonctions qu'on connaissait pas ; on va reprendre parce que je crois que tout le monde n'a pas commencé à réfléchir là-dessus.
Certains avaient dit : c'est pas possible. Et j'avais répondu : si, c'est possible, mais peut-être pas avec les fonctions qu'on connaît déjà. Alors il y a un problème.
On va voit comment on peut enrichir un peu nos fonctions pour répondre à ce type de conditions.
Alors : pour tout x compris entre a et b, f(a) > f(x) > f(b) ; sur [a,b] elle est comment ?
25 Es : décroissante
26 P : et ensuite pour tout x < a, ou pour tout x > b, je dois avoir f(x) < f(b) ; alors comment est-ce qu'on peut faire ça.
On réfléchit à ça ; allez ; faites des essais. Si certains on des idées, ils peuvent venir le faire au tableau. Je vais placer f(a) et f(b) ; ils sont comment ?
27 Noémie : f(a) > f(b)
28 P : oui, essayez de réfléchir comment on pourrait obtenir une fonction comme ça.
Les élèves travaillent.
29 Etienne : en coupant la courbe…
30 P : tu peux venir dessiner,
Etienne au tableau, dessine une courbe discontinue en a.
31 P : d'accord ; on va la couper. Est-ce que c'est possible de couper les courbes ?
32 Es : oui… non
33 P : alors oui ou non, et pourquoi ?
34 Es : c'est pas une fonction !
35 P : Est-ce que vous vous souvenez quelles sont les conditions pour avoir un graphique de fonction, on va dire que c'est possible si ça répond aux conditions qu'on a données, hein, on va être logique , on va dire que c'est une fonction si ça vérifie ; on a donné une condition qui dit : c'est une fonction à telle condition, hein, si celle-ci le vérifie on l'admettra.
Est-ce que c'est possible ? d'abord il faut voir ce qu'il faut spécifier, c'est où sont les images des points. Rappelez-vous, les images des points on les obtient par des chemins directs. Est-ce qu'ici j'obtiens les images de n'importe quel point ?
36 E : oui, sauf a
37 P : alors qu'est-ce qu'il faut que je fasse pour a ?
38 E : il a deux images
39 P : si je le laisse comme ça il deux images, alors il faudrait pas, quand même, qu'il en ait deux
40 Fabien : on exclut a

41 P : la fonction n'est pas définie en a ; mais si on veut qu'elle le soit ?
42 E : mettre des crochets d'un côté *(note : c'est ainsi que les élèves indiquent qu'un point appartient à une courbe – crochet fermé sur la courbe – ou n'y appartient pas – crochet ouvert sur la courbe)*
43 P : exactement, il faut que je choisisse
44 Fabien : soit l'image de a est en haut ; soit c'est celle du bas qui est la bonne.
45 P : oui ;
46 Stéphanie : c'est celle d'en haut, on a f(a) > f(b)
47 P : voilà. On mettra le symbole d'intervalle fermé en haut ; et en bas ?
48 Es : ouvert
49 P : oui, ou une flèche. Alors si je fais ça, est-ce qu'elle est bien définie en a ?
50 Es : oui
51 P : et ailleurs ? est-ce que tout point a une image ?
52 Es : oui
53 P : donc on sera amené à admettre ce genre de fonction. Et bien une fonction comme celle là, on dit (écrit) qu'elle n'est pas continue en a.
Est-ce qu'il y des questions ?
54 E : est-ce qu'elle a un minorant ?
55 P : attention, on a toujours dit, un minorant, c'est…
56 E : sur un intervalle
57 P : oui, là sur chaque intervalle, on peut regarder…
58 Facila : quelle est la différence entre un majorant et un maximum ?
59 P : oui, c'est une des choses dont on a discuté hier, alors attendez… d'abord on regarde sur la croissance, et ensuite on reparle de la différence entre majorant et maximum, d'accord ?
60 P : alors, on a dit tout à l'heure, quand on a la condition f(a) < f(x) < f(b), la fonction est croissante, est-ce que c'est vrai ?
(dessin au tableau de fonction non croissante vérifiant la condition)
Alors attention, il faut se méfier, quand on parle de la croissance, il faut bien qu'il y ait chaque fois quel que soit x_1 et quel que soit x_2.
Là il y a seulement quel que soit x, et a et b sont fixes, et ça marche pas.
P : Même chose pour l'autre exemple, f n'est pas forcément décroissante sur [a,b], elle peut être comme ça (dessine une fonction qui " descend " en oscillant).
61 Benjamin : en fait elle est comme on veut. Enfin…
62 P : ah ! elle est pas tout à fait comme on veut, je te rappelle la condition c'était :
f(a) > f(x) > f(b)
63 Benjamin : en respectant ça elle est comme on veut
64 P : oui, elle pourrait même avoir un autre point de discontinuité sur [a,b]
Alors bon, il faut qu'on enrichisse notre champ de fonctions, il faut qu'on mette en plus des fonctions qui sont pas toujours continues.
Les fonctions non continues, il faut pas penser que ce sont des monstres qu'on ne rencontre jamais ; il y en a une très simple qui est sur votre calculatrice
65 E : l'inverse de x
66 P : ah, l'inverse de x ; elle est continue là où elle est définie, seulement elle est pas définie en zéro. Non, c'est une qui est définie, elle s'appelle " partie entière de x ", en anglais " integer ", c'est pour ça qu'elle est notée INT. En deux mots qu'est-ce que c'est : la partie entière de x, c'est l'entier qui est juste avant. On la note E. La partie entière de 2.1 c'est 2 ; E(2.9)=2 ; E(3.00001) = 3.
(écrit) : $E(x) = n$ si $n \leq x < n+1$
Allez ! on continue ; on met les quantificateurs chaque fois qu'on en a besoin, et on essaye d'enrichir notre catalogue de fonctions. Ça va ? vous essayez 8, 9 et 10, on va voir si ça marche.

Les élèves travaillent à deux.
67 P : le 8, vous en pensez quoi ?
68 Es : impossible !
69 P : pourquoi ?
70 Es : pour la même valeur de x, on demande le contraire
71 P : j'ai l'impression quand même que c'est plutôt une erreur d'imprimerie, vous mettez dans la deuxième case x < a , on va le faire comme ça.
72 E : oui ça marche
73 E : non
74 P : (dessine au tableau)
75 P : est-ce que le 9 marche ?
76 Es : oui !
77 P : on fait un dessin pour le 9 ? allez … un courageux volontaire pour faire un dessin…
Magali (au tableau, dessine ; elle note f(a) et f(b) sur le graphique)
78 P : oui, il faut pas oublier que x est variable, c'est ça le problème
79 E : c'est ça une variable…
Facila passe au tableau faire un dessin pour le 10
80 P : si vous avez fini, commencez les cadres au dessous
81 E, à Facila : ça va pas, ta courbe passe pas par le point a…
Facila se lève et va modifier la courbe ; P la rejoint et commente avec elle.
82 P : ceux qui ont commencé les cadres du dessous, on va faire un point maintenant… allez, tout le monde y est, vous écoutez tous au même moment la même chose, ça simplifiera la vie, vous lâchez les machines, etc… (le silence se fait)
Il faut compléter avec > , ou < , ou différent, ou " imposible de accordo " , ça veut dire quoi, ça veut dire, impossible de trouver une courbe en accord, impossible de respecter les contraintes, impossible de répondre.
83 Marina : mais là, c'est pas impossible, mais il nous manque des trucs, je sais pas, c'est pas…
84 Fabien T. : différent !
85 P : pas tous à la fois, tout le monde écoute Marina
86 Marina : c'est pas que c'est impossible, mais il nous manque des références
87 P : et est-ce que ces références, vous pouvez vous les donner ou pas ?
88 Marina : non… en prenant des points, euh…
89 P : en prenant des points ? Là vous avez a, f(a) … le troisième, apparemment c'est le troisième qui vous pose problème
90 Es : oui
91 P (au tableau, fait un dessin) je fais le troisième, et si les autres sont pareils, on appliquera le même type de raisonnement aux autres, et puis c'est tout
Je fais a, f(a) , et la courbe, elle est comme ça (dessine) et on vous demande si f(x) > f(a) si x est d'une certaine manière par rapport à a – ça aussi, c'est quantifié, bien sûr, il faut entendre quel que soit x.
Autrement dit, est-ce qu'on peut trouver un intervalle tel que f(x) > f(a)
Le problème effectivement ici, c'est que je ne peux pas le trouver avec les seules indications qui me sont données… alors par rapport à a, alors moi je crois que raisonnablement, ce qu'on peut répondre, c'est que les conditions données ne suffisent pas, car f(x) est tantôt plus grand, tantôt plus petit que f(a), je ne peux pas compléter, ni avec > , ni avec < , ni avec différent, car c'est faux, donc je ne peux pas répondre.
92 E : en précisant les intervalles…
93 P : oui, d'accord, si je découpe comme ça (découpe au tableau, sur le graphique, les intervalles en donnant des noms aux extrémités) je pourrai. Bien, allez, on continue. Est-ce que tout le monde a compris le travail à faire ?

94 E : maximum et majorant ?
95 P : on travaille deux minutes, ensuite ça va sonner, et après on reprendra la différence entre maximum et majorant.
96 E (appelle la professeur) Madame, là j'arrive pas…
97 P : apparemment, on arrive facilement à dessiner des fonctions bornées, par contre on a beaucoup plus de mal avec les fonctions non bornées. Alors comment on fait pour dessiner des fonctions non bornées ?
(Sonnerie : pause)
98 P (à la reprise) : il faut que vous preniez un peu des notes sur ce qu'on fait en ce moment, parce que ce travail, je vous garantis que ça rejoint tout à fait ce qu'il y a dans votre livre sur les fonctions, même si pour l'instant ça n'y ressemble pas ; d'ailleurs, ensuite, on pourra faire les exercices de votre livre, moyennant un petit peu de calcul algébrique supplémentaire, mais ça ne devrait pas poser trop de problèmes .
Je voudrais faire le point sur une chose ou deux, qui tournent toutes autour du même sujet, c'est majorant, minorant, fonction bornée, et maximum.
Alors qu'est-ce que c'est qu'un majorant, et est-ce que c'est la même chose qu'un maximum ? on en avait un peu discuté hier, je reprends, et cette fois-ci, je vais vous donner un exemple algébrique – hier on avait pris 1/x , là je vais prendre un autre exemple pour que vous voyiez bien la différence.
Bien ; allez !
On a dit qu'une fonction admettait un majorant sur [a,b] , la définition, c'était : (écrit) pour tout x de [a,b], f(x) < M
(P dessine au tableau, une fonction continue sur [a,b], et note f(a) et f(b) sur l'axe des y. f n'est ni croissante si décroissante).
Remarque, je peux aussi prolonger f en dehors de [a,b], voilà. A votre avis, est-ce que cette fonction admet bien un majorant sur [a,b] ?
99 E : oui
100 P : est-ce que vous pouvez en marquer un sur Oy ?
101 E : oui, au sommet de la courbe.
102 P : au sommet ; alors, euh, là, on retombe sur majorant / maximum, en fait ce que vous me demandez de marquer c'est le …
103 Es : maximum
104 E : c'est le meilleur majorant !
105 P : oui, c'est vrai, le maximum c'est le meilleur majorant ; quand il y en a un, bien sûr, quand il y a un maximum. C'est pas toujours le cas. Bon, alors, si je marque M ici (marque M au dessus du maximum local) est-ce que M est un majorant de la fonction ?
106 Es : oui
107 P : est-ce que M est un majorant ailleurs que sur [a,b] ?
108 Es : non
109 P : tel que je l'ai dessiné non, puisque j'ai dessiné la courbe qui remonte plus haut que M, effectivement, M n'est pas un majorant de f ailleurs que sur [a,b]
Ici, est-ce qu'il y a un maximum sur [a,b] ?
110 Es : oui
111 P : oui, je vais appeler ça xo, et f(xo) ; c'est Mo c'est le maximum de f sur [a,b] ; on dit que le maximum est atteint en xo. Alors Marina, est-ce que ça t'éclaire un peu sur la différence entre majorant et maximum ?
112 Marina : oui, ça va
113 P : je prends un exemple, je considère la fonction cosinus, vous la connaissez. Est-ce que vous pouvez me dire si elle est bornée
114 E : c'est une sinusoïde, elle est pas bornée
115 P : alors bornée ou pas bornée ?
Es (discutent)

116 P : cos 0 c'est …
117 E : 1
118 E : cos 1 c'est zéro
119 P : je sais pas si mon exemple est si bien choisi que ça… (rire) je sais pas si vous connaissez suffisamment bien la fonction cosinus, pour que ça marche… alors !
(P écrit : cos sur [0, 2π]) allez, tout le monde écoute s'il vous plaît vous lâchez vos machines !
où il est cos x ici (dessine le cercle trigonométrique au tableau) alors si je projette M sur l'axe des x, où il est le cosinus ?
Si M est ici, ça fait…
120 E : 1
121 P : oui, donc cos 0 = 1 alors maintenant je tourne, quand j'arrive en π/2, le cos vaut zéro, donc …
122 E : cos π/2 = 0
123 P (continue) : oui, et en π, ça fait –1 ; (…) à partir de π c'est croissant ; on démontrera, tout ça, hein, mais en principe vous l'avez vu dès la troisième, non ?
124 Es : hmmm….
125 P : Bon, alors est-ce que cos est une fonction bornée ?
126 Es : oui
127 P : oui, pourquoi ?
128 E : elle a un majorant et un minorant
129 P : minorant, oui, -1 et son maximum c'est 1 ; est-ce que j'aurais pas pu le trouver directement sur le cercle ça ?
130 Prisca : oui, parce que… c'est unitaire.
131 P : oui, les vecteurs ici, sont des vecteurs unitaires, et je projette M sur l'axe des abscisses, au minimum le cos est égal à –1, et au maximum 1 quand je suis là. C'est une propriété bien connue du cos dans R, -1 < cos x < 1 . Pour le sinus, on projettera sur l'axe des ordonnées, même chose parce que c'est un repère orthonormé.
Donc j'en déduis que cos est une fonction bornée. Si j'écris la chose suivante : 2 est un majorant de la fonction cosinus, est-ce que c'est vrai ?
132 E : ah ben oui
133 P : oui, 2 est plus grand que 1, donc a fortiori 2 est plus grand que cos x, donc j'écris 2 est un majorant de cos sur [0, 2p], c'est même vrai sur R.
Ça c'est une propriété que vous n'avez peut-être pas vue explicitement, mais que vous avez beaucoup utilisée implicitement, ça s'appelle la transitivité des inégalités.
(P écrit : l'inégalité est transitive : cos x < 1 et 1 < 2 donc cos x < 2)
134 E : vous avez dit sinus
135 P : j'ai dit sinus ? c'est possible… pardon
J'ai un exemple d'une fonction qui admet un minorant, et il y a un meilleur minorant, c'est –1, et il est atteint en p ; et il a des majorants, et un meilleur majorant, c'est 1, il est atteint en 0 et 2p.
Alors maintenant je vous demande de montrer la chose suivante, voilà une fonction f(x) = $1/(x^2 + 1)$, alors pour tout x, f(x) admet un minorant pour tout x, et je vous demande de prouver que ce minorant, le meilleur qu'on arrivera à trouver, ne peut pas être un minimum. Pour prouver qu'aucun minorant dans l'absolu ne pourrait être un minimum, ça demanderait d'être un petit peu plus loin en analyse.
Alors est-ce que f est minorée ?
136 E : mmm…
137 P : sûrement puisque je le demande ! mais encore ? (rire)
Regardez ce qu'il y a au dénominateur. (P écrit : $x^2 + 1$)
Les élèves cherchent.

138 Fabien T. : un minorant c'est zéro.
139 P : de f ou de $x^2 + 1$?
140 Fabien : les deux .
141 P : euh… oui… alors attention regardons… $x^2 + 1$ est positif, oui, et tu dis que un minorant c'est zéro ; pourquoi ?
142 Fabien : l'inverse d'un nombre positif, c'est un nombre positif.
143 P : d'accord ; donc (écrit) 1 sur x carré plus 1 est positif. C'est le meilleur minorant qu'on peut trouver, mais ça pour l'instant on peut pas le prouver. Est-ce que ce minorant est un minimum ?
144 E : ben non.
145 P : pourquoi non ?
146 Stéphanie : parce que $x^2 + 1$ ne s'annule pas.
147 P : euh… parce que $x^2 + 1$ n'est jamais égal à zéro… c'est 1 sur $x^2 + 1$, est-ce que 1 sur $x^2 + 1$ peut être égal à zéro ?
148 Stéphanie : non
149 P : la condition pour qu'une fraction soit nulle, c'est que le numérateur soit nul et le dénominateur non nul, donc on aura jamais 1 sur $x^2 + 1$ égal à zéro. Quand on aura fait les limites on pourra montrer que 0 est le meilleur minorant.
(P écrit en parlant: 0 n'est pas un minimum parce que , pour tout x dans R, 1 sur $x^2 + 1$ est différent de zéro).
Bon, est-ce que ça éclaire un peu vos problèmes de majorant et de minorant ; on va aussi prouver que f est majorée ; pour prouver ça, on avait écrit que :
$x^2 + 1 > 0$, on va améliorer un peu ça, on va faire un peu mieux que ça quand même.
150 Facila : prouver que f est minorée c'est prouver qu'il y a un minorant ?
151 P : oui, prouver que f est minorée c'est prouver qu'elle a un minorant, que pour tout x, f(x) plus grand que quelque chose, et prouver qu'elle est majorée c'est prouver que pour tout x, f(x) est plus petit que quelque chose, c'est-à-dire qu'il y a bien un minorant ou un majorant. Ça va, là ?
152 Bastien : le majorant c'est 1
153 P : comment tu fais ?
154 Bastien : je sais pas
155 Jaoued : le plus petit dénominateur c'est 1
156 P : oui, ça, ça peut se formaliser facilement : pour tout x dans R, $x^2 + 1$, au lieu d'écrire qu'il est strictement supérieur à zéro, je vais écrire qu'il est supérieur ou égal …
157 E : à 1.
158 P : je peux inverser les inégalités ?
159 Noémie : comment ça ?
160 P : est-ce qu'une inégalité entre deux nombres me donne une inégalité entre leurs inverses ?
161 Noémie : oui, on change le sens.
162 P : oui, donc je vais écrire que si $x^2 + 1 \geq 1$, alors $1/(x^2 + 1) \leq 1/1$, donc à 1. Alors elle est majorée. Ce majorant est-il un maximum ?
163 Es : oui
164 Es : oui pour $x = 0$
165 P : effectivement si je fais $x = 0$, alors $f(0) = 1$, donc c'est bien un maximum. Je vous trace rapidement la courbe de cette fonction ; voilà, une espèce de cloche comme ça. Le maximum, c'est 1 ; le minorant qu'on a trouvé, c'est zéro. *(Sonnerie)*
Vous réfléchirez sur les fiches 6 et 7 ; je pense que des fonctions non bornées, vous pouvez en trouver, vous en avez déjà vu.
166 E : je comprends pas ce qu'ils demandent dans la cinquième.
167 P : trouver f bornée supérieurement sur [0,1] et non bornée inférieurement sur [0,1] ; si

c'est trop difficile, on les fera ensemble.
Allez, là on continue, vous mettez comme titre : somme de deux fonctions.
168 E : c'est grand 3.
169 P : grand trois ? d'accord, somme et produit de deux fonctions.
170 E : y avait pas de grand 2.
171 P : grand 2 c'était “ Propriétés des fonctions ”.
Alors commencez bien sûr par lire le graphique qui est à gauche, où il y a écrit “ somme de deux courbes ”.
S'il y a des difficultés avec le texte espagnol, on précise, hein. *(rappel : les fiches sont en espagnol).*
172 E : f(0) c'est combien ?
173 P : c'est zéro…
174 E : non, c'est pas zéro, madame.
175 P : bon, c'est un petit peu, alors. D'après le graphique, je pense qu'on peut admettre que f(0) et g(0) sont opposés.
(Les élèves travaillent par deux, 10mn environ)
176 P : Sur les cadres du dessous, certains ont des difficultés, et d'autres croient avoir trouvé une règle ; alors cette règle j'aimerais bien qu'on l'explicite.
177 E : ça marche pas
178 René : pourquoi ?
179 P écrit au tableau : “ règle : si l'une des fonctions est constante,… ” et fait un dessin.
Est-ce qu'on peut utiliser un vocabulaire plus précis, pour expliquer cette règle ?
Si l'une des fonctions est constante, il y en qui ont dit, on obtient une droite parallèle à la droite de la fonction g ; la question (écrit) c'est : comment obtenir la courbe de f + g à partir de celle de g ?
Ici, vous avez pris des points, comme f est négative, f c'est –1, à chaque fois vous descendez de –1, et vous obtenez une droite parallèle.
Cg c'est une droite, d'accord ; pour obtenir les points de f + g, qu'est-ce que je fais ?
180 E : j'ajoute l'ordonnée de g
181 P : oui ; je suis partie d'un point d'abscisse x, je garde bien la même abscisse ; alors qu'est-ce que je fais comme transformation ?
182 E : l'ordonnée à l'origine…
183 E : je change de repère
184 P : non, j'ai toujours mon repère, simplement, le point x,y , il devient x, y-1. Je vais vous faire un petit dessin, j'avais un point x, y, et maintenant, j'ai x, y-1. Et je fais la même chose pour tous les points. Vous voulez que j'en prenne un autre ? voilà. Ça s'appelle comment ce que je fais là ? c'est quelque chose que vous avez déjà vu.
185 Claire : une translation
186 P : très bien, Claire, c'est une translation. Autrement dit, quand l'une des fonctions est constante, qu'est-ce que je fais pour obtenir la courbe somme ?
Tout simplement une translation. De vecteur colinéaire à **j**, ici – **j** . (P écrit : si f(x) = b , Cf+g s'obtient à partir de celle de g par translation de vecteur b**j**.
Bon, lundi on continue sur les produits.

TRANSCRIPTION DE LA SEANCE DU 20/11/96

<u>Remarque</u>*: l'observateur ne connaissait pas tous les élèves de la classe, si bien qu'il n'est pas toujours possible de repérer l'élève qui est intervenu: dans ce cas l'élève est désigné par E et non par son prénom.*

01 P: on fait le point sur les fonctions non majorées sur]-2,0[: les problèmes posés par le groupe du lundi... La courbe ne coupe pas l'axe x = -2, pourquoi?
Si elle coupe x = -2...
02 E: il y a un majorant...
03 P: d'où un premier résultat: si f n'est pas majorée "en -2", elle ne coupe pas la droite x =-2
(Remarque: c'est une utilisation implicite de la contraposée par le professeur)
-2 n'a pas d'image. comment exprimer que f pas majorée? f majorée?
04 E: m = f(x) = M
05 P: attention aux quantificateurs; f majorée sur]-2,0[
06 E: sur]-2,0[il y a un majorant
07 P: écrivez tout ce qu'il faut
08 E: -2
09 E: ssi pour tout x Œ]-2,0[, f(x) = f(-2)
10 E: on ne peut pas dire... le majorant n'est pas forcément égal à -2, c'est M...
11 P: oui, d'où il sort? ... il y a un majorant, il faut qu'on le mette... f(x) = M, il y a un nombre M tel que ∀ x Œ]-2,0[, f(x) = M
Je vous donne 5 mn de travail personnel, exprimez qu'une fonction n'est pas majorée en essayant d'être rigoureux.
12 E: sur le même intervalle?
(...Travail personnel des élèves: beaucoup d'essais de dessins, quelques f(x) > ...Le professeur circule dans la classe et relève les productions.)
13 P: qui veut proposer...
14 Claire et Magalie: f(-2) ? f(x)
15 P: c'est pas une formulation de f non majorée, c'est: f n'a pas d'image en -2; il faut faire intervenir M. Dis ce que tu avais dit:
16 Claire: y = + 8
(Claire et Magalie ont changé deux fois leur formulation entre ce qu'elles ont dit au professeur et leurs déclarations publiques)
17 P: autre problème...
18 E: f n'a pas d'ordonnée
18 E: + 8 on ne connait pas
20 P: oui, c'est pas un nombre; on rencontrera ces problèmes dans les travaux sur les limites
21 Sébastien: pour tout x Œ]-2,0[, f(x) = M
22 P: (à mi voix) Waouh! elle va aller loin cette... fonction... *Des élèves tentent en vain de dessiner un graphique répondant à la condition qui vient d'être énoncée.*
(à voix haute) Christian?
23 Christian: il n'y a pas de M tel que, pour tout x, f(x) = M
24 Sébastien: on prend un M potentiel, on montre que c'est impossible...
25 P: oui, c'est une autre façon de le dire
Quelques minutes de travail puis:
26 Fabien T. et Fabien B.: (ensemble, d'une voix forte et très assurée, pour toute la classe) quel que soit M, il existe x tel que f(x) = M
27 P: Ça, est-ce que ça dit bien? qu'en pensez-vous?

28 E: si f n'est pas majorée, f(x) n'est pas forcément supérieur...ça marchait pas tout à l'heure! *(E fait allusion à la condition du n° 21)*
29 E: c'est UN x
30 P: je traduis... si on se fixe M, on dit souvent en maths "aussi grand qu'on veut", on est sûr qu'au moins un des f(x)...
aussi grand qu'on veut correspond à quoi?
31 E: quel que soit M
32 P: oui... Fabien tu veux l'écrire? (Fabien T. va au tableau et écrit: $\forall$M, $\exists$ x tel que f(x)>M)
33 E: ça marche, ça? Comme critère, je veux dire... si on en a une...
34 P: oui...(hésitation) bon, et bien, on va bien voir, hein, si c'est un critère efficace: on prend $1/x^2$ sur l'intervalle]0,1] , essayez de prouver...
(Discussion de l'observateur avec deux élèves: lors de la recherche, l'un avait pris un exemple et n'avait pas abouti.)
35 E: x^2 est aussi petit que je veux; 1/0 c'est pas possible, c'est l'infini
36 P (au tableau): ça c'est un raisonnement intuitif...
Essayez on va voir si ça marche... *(Travail des élèves à deux, environ 5 mn)*
C'est quoi un nombre très grand?
37 E: par rapport à quoi?
38 Es: 60; 10^{98}
39 Fabien T.: 0,2 c'est très grand par rapport à 10^{-99}
40 E: M c'est un majorant?
(E sur sa feuille: 1/x . 1/x > 60 ; x.x> 1/60)
41 Christian: Prenons 60
42 Fabien: 0,2 ; j'essaye 0,2
43 Magalie: 10^{98} c'est grand... ça dépasse presque la calculatrice
44 Fabien B.: M, c'est mieux, on aura tout...
45 P (hésite, puis): Bon, ben allez, on les fait tous... chaque rangée en fait un!
Le professeur fait faire dans la classe, puis au tableau par quatre élèves pour chacun des cas proposés: 60, 10^{98} , 0,2 et M quelconque.

Pour 60: Christian au tableau écrit: $1/x^2 > 60$ d'où $x^2 < 1/60$; or x est positif donc x < 1/v60; on prend un x dans]0,1] qui est plus petit que 1/v60 et Christian conclut.

Pour 0,2: Alexandra au tableau écrit que $1/x^2 > 0{,}2$ or x<1 donc $1/x^2 > 1$ donc $1/x^2 > 0{,}2$

Pour 10^{98}: $1/x^2 > 10^{98} \Leftrightarrow x^2 < 10^{-98} \Leftrightarrow x^2 - 10^{-98} < 0$; une erreur sur $x^2 - 10^{-98} = (x - 10^{-98})(x + 10^{-98})$. Magalie conclut après rectification: si $x < 10^{-49}$ alors $1/x^2 > 10^{98}$

Pour M: Fabien écrit $1/ x^2 > M \Leftrightarrow x^2 < 1/M$ soit comme x est positif: x < 1/ vM . Fabien fait remarquer que l'on n'est alors pas sûr que le x trouvé soit bien dans l'intervalle posé au départ, c'est-à-dire]0,1] .

Il y a alors deux choix possibles: soit dire que l'on prend (x < 1/ vM) «(x $\in$]0,1]) ; soit, et c'est ce que l'élève choisit de faire, restreindre à M>1 pour être sûr que 0<x<1; de toutes façons dit-il, si c'est vrai pour tout M>1 c'est vrai pour tout M. Par contre les élèves qui n'ont pas fait ce calcul ont du mal à comprendre pourquoi l'élève au tableau a décidé que M>1.
46 E: je comprends pas pourquoi... on est pas sûr que M > 1...
47 Fabien *au tableau explique*: si M< 1, alors je prends 1; si x $\in$]0,1] , $1/x^2 > 1$; donc ça marche forcément...
On peut remarquer qu'à aucun moment les élèves ne mettent en doute qu'il existe bien, dans

l'intervalle]0,1] , des x tels que x < 1/ vM .

48 P (commente ce point M>1 qui fait difficulté pour M littéral): on a pris M>1, qui peut le plus, peut le moins... par exemple, pour x = 10^{-49}, il est clair que $1/x^2$ est plus grand que 1, que zéro, que 120... c'est clair?

SEANCE SUR LA SOMME DE DEUX FONCTIONS

Suite de la séance : les élèves ont préparé des fiches de sommes et produits de fonctions (voir annexe). Le professeur corrige les sommes :

01 P : si on ajoute à f une fonction constante, ça revient à faire une translation... c'est ce que vous avez fait... on obtient une courbe parallèle...

Pour parabole et y=x, construction de trois points par le professeur puis jonction par une courbe. (Prise en compte du passage information partielle ‡ courbe continue)

Pour les produits, les élèves ont rempli les premières fiches sans éprouver le besoin de justifier leurs résultats (dans les premiers cadres les fonctions sont constantes).

02 P :1) quand les fonctions sont constantes

03 E : qu'est-ce que c'est une fonction constante?

04 P : ah! (le P fait dire pour tout x de a,b , f(x) = C) ça se traduit par..?

05 E : droite parallèle à l'un des axes, l'axe des abscisses : le graphique est un segment parallèle à Ox

06 P : oui, et 2) si f est constante, g est affine? de quoi est-on sûr?

07 E : un segment

08 P : on aura toujours un segment? f = C, et g...

09 Fabien : ax + b ; f + g ... C + ax + b

10 P : c'est affine?

11 E : oui

12 P : ce qui a changé, c'est l'ordonnée à l'origine. Et fg ? C(ax + b) ... Cax + Cb

C'est affine?

(Sur certains dessins, ce n'est pas un segment)

3) Et maintenant deux fonctions affines : la somme. (Malgré une écriture de la somme de ax + b et cx + d, une partie de la classe a dessiné la somme de segments comme une courbe).

Remarque de l'observateur : le rapport algébrique/graphique fonctionne-t-il du point de vue de la preuve? La preuve...

Le produit de deux fonctions affines : le P fait faire le travail algébrique.

13 P : donc c'est une courbe, pas une droite ; faudra se caler sur les propriétés du produit... une solution, pour l'instant, faire point par point.

ANNEXE 6. II

LE FLOCON : COMPTE-RENDU DES SEQUENCES EN CLASSE

PREMIERE SEQUENCE : MODULE DU 16/02/96 (1 H)

Les élèves sont en groupes de 3 ou 4 ; le but de la première séquence est de calculer le périmètre et l'aire de la figure Fn obtenue après n itérations du procédé de construction. L'objectif final est connu des élèves : il s'agit de déterminer si la figure "achevée" (supposée possiblement achevée), le flocon de von Koch, a un périmètre et une aire, et lesquels. Les élèves ont fait, chez eux, la figure F_4.

Les groupes seront désignés par un numéro ; le professeur distribue une fiche d'aide (voir ci-dessous).

(Les élèves s'installent ; le professeur distribue la fiche).

001 P : Vous avez une feuille d'aide... ici. On calcule le périmètre et l'aire du flocon à l'étape n ; on essaie de trouver la formule générale qui donne P_n et A_n ; vous pouvez partir de P_o, P_1.... Vous pouvez vous aider de votre dessin ; vous pouvez vous aider aussi des petits croquis que j'ai fait sur la feuille. Voilà.

002 E : P_o et A_o ?

003 P : On ne demande pas de les calculer. (les élèves se mettent au travail)

004 gr 5 (Yaëlle, Christophe, Anne-Laure)

Yaëlle : là P_1 tu vois (à A.L)

Anne Laure : P_0 c'était... Mais regarde c'est 3x... ah non! (à Y.) et qu'est-ce que tu fais après ?

005 gr 6 (Laure, Ludivine, Eliane)

Ludivine : tu vois là, tu calcules par rapport à la figure générale, là c'est un détail de la figure (montre le croquis de la feuille d'aide), tu vois là. Là ça fait 4/3x.

Laure : 4x sur 3... ouais tu divises en 3, et tu en prends 4.

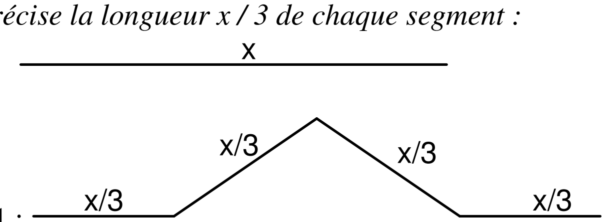
Ludivine : tu vois le grand triangle - et là tu as 1, 2, 3 triangles.

006 P : vous faites votre calcul chacun. (à gr 1) oui la longueur c'est 1/3 mais tu en as plus de segments. Servez vous du schéma, c'est pour ça qu'il est fait.

Le schéma précise la longueur x / 3 de chaque segment :

de l'étape n

à l'étape n + 1 :



(Chaque segment de longueur x se transforme en 4 nouveaux segments de longueur x / 3).

007 gr 1 (Laurent, Sylvain, Davy, Mickaël)

Laurent : c'est 4/3 je te dis, c'est 4/3 ; ça ça fait 3/3 et ça 1/3, donc 4/3.

008 P (à gr 2) oui, vous regardez votre dessin, par rapport au petit schéma... Sébastien dit qu'on rejoute 1/3 ; regardez, ça doit pouvoir marcher comme ça. Et de l'étape n à l'étape n+1, alors, tu fais quoi ? écris le que tu rajoutes 1/3, essaye, tu verras bien... (Sébastien pointe avec le crayon ; Sébastien et Jérôme écrivent sur leur feuille d'aide).

009 gr 2 (Sandra, Sébastien, Jérôme)

Sandra : 4/3 de P_n alors P_{n+1} égale 4/3 de P_n... 16/9 c'est 4/3 de... alors on essaye avec P_3, voir si ça marche ; normalement ça doit être égal à 4/3 de P_2 (Sandra écrit) ça fera...

2/3 de x et 8/9, 8/9... 16 neuvièmes... (elle écrit)
Sébastien (discute avec Jérôme en montrant le dessin)
Sandra (à Sébastien) : ça fait combien ? oui c'est ça il y en a 16 (Sandra pose son doigt sur la feuille de Sébastien ; ils pointent ensemble un calcul.)
Sébastien : 16 petits... c'est des...
Jérôme : neuvièmes
Sandra : 4/3 fois... c'est ça : 16/9 donc (écrit) P_{n+1} = ...
010 gr 3 (Véronique, Sylvia, Virginie, Pauline)
Véronique : ça fait plus là
Sylvia : 4/3, je crois que c'est une suite géométrique de raison 4/3 (écrit) :
$P_{n+1} = P_n + P_n/3 = P_n (1 + 1/3) = 4/3\ P_n$
011
gr 1 (calcule l'aire)
Sylvain : la hauteur elle est trois fois plus petite
Davy : la base aussi elle est trois fois plus petite
Sylvain : tu l'as divisée par 2 là
Davy : 4/3 fois 1/2 fois 1/3...
S : non tu la divises par 3!
Laurent : oui, 1/3 de la grande base mais tu multiplies par 3 le périmètre...
S : attends... écris à côté : 1/3 de la base fois 1/3 de la hauteur puisque c'est équilatéral (les 3 font un dessin et écrivent dessus ensemble)
Davy : $A_o + 3^n$ fois base que multiplie hauteur sur 2 ; mais après tu en rajoutes 1,2,3,...12! (Davy pointe son crayon sur la feuille de Laurent) ça fait 3n fois... base multiplié par hauteur
Mickaël : Regarde : t'as d + h sur... ça fait...(silence)
Sylvain : t'as rajouté 3 triangles... on reprend depuis le début !
P. (à gr 1) : ah bon, mais on demande pas de calculer l'aire. Mais si vous voulez savoir comment ça se calcule, c'est base multipliée par hauteur sur deux. Alors h c'est ... a sin p / 3 ça fait a v 3 / 2 et a fois ça, et le tout sur 2 ; ça fait a^2 v 3 / 4 (P. écrit sur la feuille de brouillon du groupe).
De toutes façons on ne demande pas de calculer Ao ici ; ce qu'on veut c'est comme tout à l'heure, calculer l'aire An en fonction de Ao. On rajoute chaque fois des petits triangles. Il va falloir voir quelle est l'aire des triangles qu'on rajoute et combien il y en a, comme ça on saura à chaque fois quelle aire on rajoute. Vous l'avez là sur la fiche d'aide. Méfiez vous parce qu'il faut bien les compter quand même.
012
gr 5 Yaëlle : à la deuxième étape on rajoute 6 triangles.
Anne-Laure. : pourquoi t'as ajouté 6 triangles ? regarde, à l'étape 2, tu as ajouté cette aire, et cette aire... t'es d'accord ? ils sont équilatéraux ; ça fait quoi ce triangle, là ?
Yaëlle : en fonction de Ao
Anne-Laure. : étape 1... Ao plus...plus une étape quoi. (à Christophe) j'ai pas compris ce que tu veux faire là
Christophe : tu dis que là c'est des tiers là ; il y en a 3.
Anne-Laure. ah oui d'accord ; alors ça fait 3 fois un tiers...
Christophe : non non ; trois fois un neuvième : 3 triangles de un neuvième de Ao
Yaëlle (à P) : A1 = Ao + 3Ao/9 = Ao + Ao/3
013 P : laisse le sous la forme 3Ao/9 c'est plus commode pour la suite ; et maintenant l'étape 2.
014
Christophe : après c'est 1/3 de l'aire des nouveaux triangles
Anne-Laure. ah ouais d'accord... après t'ajoutes encore 1/9 mais de ça
Yaëlle : oui mais après t'en as plus!

Anne-Laure. on les compte! oui + 12 fois 1/9 de ça là...
Christophe : il faut les rajouter

015

P (au tableau) : ce que tout le monde dit, c'est qu'il faut savoir quelle est l'aire des triangles qu'on rajoute, et combien il y en a. Alors je vous propose qu'on fasse un tableau peut-être ? Ao... ensuite tout le monde a écrit A_1 = Ao + Ao/3, et en fait ce tiers de Ao, ça vient de ce qu'on rajoute trois petits triangles, et que chacun des petits triangles fait Ao/9. Ensuite à l'étape suivante :

A_2 = Ao + 3Ao/9 + (un groupe dit) voilà... $12Ao/9^2$

Ce qui serait intéressant, c'est d'écrire, à l'étape n, quelle est l'aire des triangles rajoutés, et combien il y en a. Si je sais ça, je sais calculer An, d'accord ? Alors (écrit) étape n : quelle est l'aire des triangles rajoutés et combien on en rajoute.

Si vous voulez vous pouvez continuer encore une étape - ou alors vous faites directement.

Flavie : on a trouvé Ao + Ao/3 + 12Ao/81 + 48Ao/729

P : oui... 729 c'est 9^3. D'accord ; on pourrait voir se dessiner une formule : parce que là 12 c'est 3x4 et 48 c'est 3 fois...

E : 16

P : alors ça peut peut-être donner des idées ça... allez-y ; ensuite cette formule il faudra l'écrire plus simplement avec la formule des sommes de suites géométriques qu'on a vue.

(les élèves recommencent le travail en groupes)

016 gr 1 : tu multiplies par 4 ; en fait c'est 3 fois 2 au carré.. 2 exposant 4 . On multiplie par 2 à chaque fois...

P (au tableau) Essayez l'étape suivante ; + 3 fois 16 Ao / 9^3... quelle serait l'étape d'après ?

E : 192 Ao / 9^4

P : 192 c'est 3 fois... 64 non ? quelle serait l'étape n ?

gr 1 : Davy : et là c'est 4 exposant 3 ; et A_2 c'est 9 exposant 2 donc A_n c'est 9 exposant n

Sylvain : mais ici ça peut pas être 2n

Davy (au prof.) On a trouvé 3 fois 2 exposant 2 fois Ao sur 9 exposant 2, donc on dit 3 fois 2 exposant on sait pas combien n, sur 9 exposant n.

P. (accoudé à la table) : oui c'est ça, d'accord mais...je pense qu'avec des puissances de 4 vous vous en sortiriez mieux, là à chaque fois tu multiplies par 4, 48 c'est 3 fois...

Davy : 4 exposant 2

Sylvain : oui c'est n - 1 là ; 4 exposant n - 1 sur 9 exposant n.

(Certains groupes ont pris leur calculatrice).

017 gr 4 (Florence, Flavie, Marie-Cécile)

P. oui, c'est bien, ça ; si tu remarques, celui-là il marche aussi ; alors c'est comme une suite géométrique.

Florence : Mais on peut pas mettre 3 Ao en facteur.

P. : oui mais une suite géométrique on peut la commencer où on veut, alors on peut commencer là (montre le deuxième terme) on laisse tomber le premier, il est un peu particulier. (Flavie regarde le professeur très fixement). Alors maintenant il faut mettre en facteur.

Florence : on met Ao en facteur.

P : oui mais il vaut mieux laisser le premier de côté, c'est un seul terme, il ne va pas vous gêner. Et vous commencez à faire votre somme à partir du reste.

Flavie : en fait ça fait ça ; et si je mets 3 en facteur ?

P : si tu veux mais regarde : le premier terme y a pas 3... c'est ça - très bien, voilà.

Marie-Cécile : pourquoi...

P : pour pouvoir trouver une suite géométrique ; tu trouves la raison, le premier terme et après on calcule avec la formule de ce matin, ça va marcher d'accord ?

(Marie-Cécile écrit ; Flavie cherche dans son classeur en feuilletant tout, Marie-Cécile la regarde en souriant puis cherche à son tour.

Flavie : les exercices!

Marie-Cécile : les exercices ?

Flavie : oui!

(Florence écrit ; Flavie continue à chercher et froisse des papiers).

Flavie : c'est quoi q ? le q, où c'est qu'il est ? (Elle cherche sur son classeur, trouve la formule :

$u_o.(1 - q^n) / (1 - q)$ et la recopie)

Premier terme : c'est combien le premier terme ? je cherche... non mais je cherche!! je cherche le nombre de... (mouvement circulaire du stylo)

Florence : q c'est 4/9

Flavie : mais on l'a pas, le nombre n! c'est à l'infini, qu'on veut faire ça! mais je m'en fous, d'avoir

q^{n-1}! (soupir ; Florence la regarde en riant)

Bon, ben allons-y pour q^{n-1} ; mais ça c'est pas q ?!

Marie-Cécile : non!

Flavie : c'est quoi q^n ?

Florence : c'est la formule...

Flavie : avec q^{n-1} ...

Florence : non! q^n - 1 (en séparant bien le q^n et le -1)

Flavie : mais non!! ah mais OUI!!!

P (passe) : c'est multiplié par le premier terme, n'oublie pas.

Flavie : et on en fait quoi du premier terme ? non du n ?

(P. s'accoude à côté de Florence et Marie-Cécile)

P : tu en fais rien pour l'instant...attends : c'est quoi q ? q c'est la raison,c'est le nombre par lequel tu multiplies un terme pour passer au suivant

Florence : 4/9

Flavie : et n on prend quoi comme valeur ?

P : tu le laisses *(sous-entendu comme variable) ;* parce qu'ensuite ce qui nous intéresse c'est ce qui se passe quand n grandit indéfiniment.

018

P (écrit au tableau) : on y est presque arrivés, alors on va calculer... vous avez trouvé An = Ao + 3 Ao facteur... on a une somme entre parenthèses, et on l'a presque calculée, alors c'est : $1/9 + 4/9^2$ plus etc... plus 4 puissance n - 1 sur 9 exposant n.

On lui donne un nom on l'appelle S ; ça c'est uo, la raison c'est 4/9

ça fait : $\frac{1}{9}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$ Il y en a bien n au fait...

E : oui, de 9 à 9^n y en a bien n

P : 1 - 4 / 9 ça fait 5 / 9. Donc en simplifiant on trouve $\frac{5}{9}x\left[1 - (\frac{4}{9})^n\right]$ et il faudra multiplier par 3Ao et ajouter Ao ; et après on se demande ce que ça devient... quand n augmente indéfiniment.

DEUXIEME SEQUENCE : CLASSE ENTIERE LE 17/02/96 (2H)

PHASE I

001

P : Alors aujourd'hui, on va continuer en trois étapes ; d'abord, je vais faire un rappel, où on était arrivé hier sur le calcul de Pn et An : je vais rappeler la question qu'on s'était posée, puis vous allez avoir une phase de recherche personnelle, vous allez essayer de répondre à cette question, en tous cas de vous faire une opinion sur la réponse à cette question. On fera un débat là-dessus, avec quelqu'un qui anime, des secrétaires...
Es : ouais! (rires)
P. : vous passez très bien en vidéo, hein on a regardé, vous êtes très bien. (rires)
Première chose : je rappelle où on en était pour Pn et An. Je vous demande de noter le débat, de noter les questions qu'on s'est posé, parce que ce qui va être important aujourd'hui comme souvent en mathématiques c'est les questions qu'on se pose.
Pour Pn, pas de difficulté particulière, on était arrivé à : $Pn = Po\,(4/3)^n$
Pour l'aire : on avait mis en facteur

$$An = Ao + 3\,Ao\left[\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{9^n}\right]$$

pour bien me repérer dans cette somme, j'appelle les termes u_1, u_2, ... u_n ; ça va être une suite géométrique mais c'est pratique de leur donner des noms pour ensuite bien écrire la raison et calculer. Tout le monde avait trouvé la raison...
002 Es : 4/9
003
P : alors maintenant, j'applique la formule qui dit que le crochet ça va donc être égal à : premier terme, voilà, 1/9, ensuite multiplié par 1 moins 4/9 exposant n c'est le nombre de termes, puisqu'ils vont de 1 à n, vous pouvez les compter par exemple avec les puissances de 9, et si vous vérifiez avec les puissances de 4, de 0 à n-1, ça concorde bien.
et sur 1 moins 4/9 ; on avait dit 1-4/9 = 5/9
(P écrit au tableau. Ce calcul avait été fait dans tous les groupes avec des puissances de 2 ou de 4, séparation ou non du premier terme Ao ; il s'agit donc d'un bilan collectif du travail des groupes.)
Diviser par 5/9 c'est multiplier par 9/5 donc voilà :

$$A_n = A_o + 3\ A_o \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

Voilà ; les 9 se simplifient. On l'avait laissé comme ça.
PHASE II
004
P : alors maintenant la question qu'on se pose : **que deviennent Pn et An quand on a itéré le procédé "jusqu'à l'infini"**. (la question est écrite au tableau ; les élèves notent).
Alors il faut : quelqu'un qui mène le débat et des secrétaires qui prennent les questions et les réponses. Allez, qui veut aller au bureau ? (brouhaha, rires ; "Laurent vas-y!")
P. : moi je vous aide de toutes façons.
Mickaël : moi j'veux bien.
P. : Mickaël ? oui. Virginie et Sylvia sont volontaires pour noter le débat ? merci. Tout le monde y est ?
Cameraman : Non pas moi, tu peux recommencer s'il te plait ? (rires)
P. : D'accord, bon, alors : première phase de débat : qu'est-ce qu'on peut faire pour répondre à cette question ? on a droit à tous les outils qu'on possède bien sûr.
005 E : donner des valeurs à n
006 P : donner des valeurs à n ; bon. D'autres idées ?
007 Frédéric : tracer la courbe Pn en fonction de n.

008 P : (écrit les propositions) je propose qu'on fasse une phase de recherche individuelle où vous essayez ça ; d'accord ? Oui bien sûr vous avez le droit d'utiliser votre calculatrice, c'est même recommandé.

(Sandra regarde avec Anne-Laure sur la calculatrice).

009 Anne-Laure : c'est quoi la fonction ?

010 E : il faut la valeur de Po, non ? (Les élèves discutent 3 ou 4 minutes)

011 E : comment on fait ?

012 P : qu'est-ce qu'on essaye de savoir ? oui Davy, tu prends quoi comme valeurs ?

013 Davy : pour n ?

014 P : oui pour n.

015 Jérôme : des valeurs plus petites...

016 P : les valeurs qu'on prend, elles vont être en rapport avec la question qu'on se pose. C'est quoi la question ? Flora, oui ?

017 Flora : qu'est-ce que ça fait quand n est grand.

018 Jérôme : on va prendre des grandes valeurs alors...

019 P : ce qui nous intéresse, c'est se qui se passe quand n augmente indéfiniment. Alors Flora a dit - ça parait raisonnable - il vaudrait mieux prendre des grandes valeurs.

020 Es : qu'est-ce qu'on prend comme valeurs de n ? (les élèves calculent avec leur calculatrice ; durant toute la séance il y a de nombreux échanges de calculatrices entre élèves)

021 Sylvain (à Davy) : là comment tu fais ? j'arrive à 800...

022 E : l'aire Ao ? (il calcule)

023 P : oui l'aire Ao ? qui me la donne ? voilà vous dites ça fait... à peu près... 140,3 ; de toutes façons c'est pas très grave parce que... (mouvement de la main indiquant "à peu près)

024 Frédéric : Mme, les courbes, c'est possible que ce soit ça ?

025 P : oui, c'est pas impossible. Qu'est-ce que tu en penses ?

026 Frédéric : Pn a l'air de grandir beaucoup, et An a l'air de se stabiliser.

027 P : oui, "a l'air", voilà!

(Les élèves calculent ; certains programment la suite ; Boubker et Sandra s'échangent des calculs, Sylvia et Laurence aussi).

028 E : moi, j'arrive à 800.

029 P : en tous cas pour Pn, si vous voulez on regarde Pn pour l'instant, quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, Pn a l'air de devenir très grand.

Alors jusqu'où vous avez réussi à aller pour les valeurs de n ?

030 Es : 500 - 700

031 P : et après qu'est qu'il se passe ?

032 E : 786 ; on est arrivé à n = 786

033 E : exposant ?

034 P : oui, c'est dix puissance quelque chose.

035 E : 10 puissance 99.

036 Sylvain : pourquoi vous avez pris 786 ?

037 P : pourquoi on a pris 786, parce que j'ai demandé la plus grande valeur ; après la machine ne veut plus calculer. Pourquoi elle ne veut plus calculer ?

038 Flora : 10 exposant 100 : elle peut plus après 10 exposant 100.

039 P : la capacité des machines s'arrête à 10 exposant 100 ; au fait, tout le monde sait que quand la calculatrice affiche 8,6 . 99, ça veut dire 8,6 . 10^{99} ? tout le monde sait ça ? (les élèves approuvent). oui, avant c'est quand même moins grand. En termes mathématiques, elle est comment cette suite ?

040 Es : elle est croissante

041 P : oui... la suite Pn est croissante, on l'écrit. Ce que vous m'avez dit c'est qu'elle prend des grandes valeurs, et au delà de n = 786, la capacité de la machine est dépassée.

PHASE III

042 P : pour An, ceux qui l'ont fait, qu'est-ce qu'ils ont trouvé ?

043 Davy : ça augmente doucement, et après ça reste vers 224,47

044 P : tu me donnes les valeurs précises s'il te plait

045 Davy : à 10 : 224,47 et à 500 : 224,48.

046 P : et vous avez combien de chiffres ? ce qu'il faudrait peut-être essayer de voir, c'est quand est-ce que tous les chiffres de votre affichage ne bougent plus du tout.

(Les élèves ont utilisé la fonction tabulation des valeurs d'une fonction sur la TI 81, et ils n'ont que deux chiffres après la virgule ; le professeur n'imagine pas que les élèves n'ont pas recherché la précision maximale ; le malentendu dure une dizaine de minutes)

047 P : de la même façon que pour Pn on a trouvé une valeur au delà de laquelle on ne pouvait pas aller, si on trouve une valeur de n audelà de laquelle tous les chiffres de l'affichage restent les mêmes, ça voudra dire que la capacité de la machine est dépassée mais cette fois dans l'autre sens, dans le sens des petits.

(Cette remarque est loin d'être évidente pour les élèves ; il leur faudra un certain nombre de calculs et près de vingt minutes, avec quelques mises au point de l'enseignant, pour que la situation prenne sens pour eux du point de vue de la recherche de ce que devient An et des moyens de calcul, à savoir l'affichage de la calculatrice.)

048 Flora : entre 26 et 27

049 P : tu as combien de chiffres à l'affichage ?

050 Flora : 224,48

051 P. : exactement ?

052 Sylvain : à combien elle trouve ça ?

053 P. : à 27

054 Mickaël : c'est impossible!

0**55** Davy : c'est arrondi

056 Flora : mais non

057 P : calcule directement, sans la table, tu vas obtenir beaucoup plus de chiffres après la virgule

058 Jérôme : et là, à 27 (montre sa calculatrice)

(discussion confuse, les élèves se passent leur machine, P. vient voir)

059 P : oui, d'accord, ça parait plus raisonnable. A_{27} égale à peu près *(écrit)* 224,4737846. La tabulation elle est faite pour tracer des courbes, 2 chiffres après la virgule, c'est largement suffisant en général.

PHASE IV

P : Moi je me demande ce que devient An quand n augmente indéfiniment. 224,4737846 et 224,4734847 mathématiquement c'est pas la même chose. J'aimerais bien que tout le monde l'écrive parce que c'est très important. C'est important de faire un calcul aussi exact que possible.

Mathématiquement parlant, je me demande ce que devient la suite An, je ne parle pas au niveau d'une approximation, en physique ce serait différent, mais en maths c'est pas la même chose de savoir si elle devient égale par exemple à 224,4737847 ou 224,4737849, **c'est pas la même chose**. Et moi je voudrais savoir ce qu'elle devient aussi précisément que possible.

(Les élèves calculent, se montrent leur machine, Laurence, Sylvia et Julie se concertent, Sandra a l'air perplexe, Laurent, Davy et Olivier échangent leurs résultats)

060 E : elle est stabilisée.

061 P : oui... faites des tests un peu plus loin que 27 ou 28 ; ça donne quoi comme valeur

approchée ? sur la Casio... fais voir... (P. écrit au tableau)
062 Sébastien : avec la HP j'arrive à 32... non 33. C'est 224, 4737846
063 Davy : A_{33} ne peut pas être plus petit que A_{32}
064 P : oui, Davy a raison, la suite est croissante ; ah mais c'est pas la même machine ; elle ne fait pas les mêmes approximations. Bon alors on reprend avec le calcul de An.
(Discussion confuse ; les élèves sont déconcertés ; à rapprocher de la remarque de Flora : "mais non c'est pas arrondi" : sous-entendu c'est écrit sur l'écran donc c'est le bon résultat.)
065 P. : bon, alors, le mieux qu'on a obtenu, c'est avec la HP de Sébastien, après ça change plus, ça veut dire que la machine, elle voit plus la différence.
066 Sébastien : 224,47378461
067 P : d'accord. Le résultat se stabilise, l'affichage se stabilise, ça veut dire qu'on a dépassé la capacité de la calculatrice, mais cette fois dans les petits nombres : ça veut dire qu'entre $1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{33}$ et $1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{34}$ la machine ne voit plus la différence : à 10^{-9} elle ne voit plus la différence.
068 Frédéric : moi je vais jusqu'à 36
069 P : ça change encore ? donne nous ça!
070 Frédéric : 224,4737846091
071 Es : (discutent et trouvent ce résultat contradictoire avec 224,47378461, ce qui prouve que certains n'ont pas compris ce qu'était un arrondi malgré la phase précédente.)

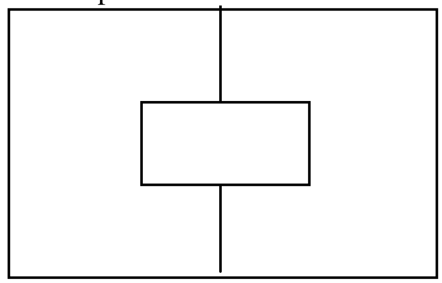
PHASE V
072 P : de toutes façons, à 2 ou 3 entiers près, à 27 ou 33 ou 36, on bute sur la capacité de la machine. Alors maintenant ce qu'il va falloir faire, c'est se faire une idée sur ce que deviennent ce périmètre et cette aire quand n augmente indéfiniment, et se mettre d'accord sur les moyens de le prouver. En maths on ne se contente pas d'un résultat approché. En ce moment on est en train d'essayer de voir comment on pourrait contrôler ce que devient un processus qui est un processus infini, puisqu'on fait croître n indéfiniment ; et si on ne sait pas contrôler ce processus infini on ne va pas décréter que c'est la machine qui le décide, ça en maths c'est pas acceptable. Bon alors, sur la suite (An) on se met tous d'accord sur ce qu'on sait de An.
073 Boubker : plus n augmente et plus An augmente moins vite.
074 E : la suite est croissante. Elle augmente par des morceaux de plus en plus petits.
075 P : oui, c'est logique. On a rajouté des petits triangles mais ils deviennent de plus en plus petits, à l'étape 5 ou 6 on ne les voit pratiquement plus. Qu'est-ce que vous pensez que devient la suite An ?
076 Frédéric : elle tend vers quelque chose... vers un nombre ou... qui n'est pas infini.
077 P : ça c'est une hypothèse, pour l'instant, c'est une question. Et la suite Pn, elle fait aussi ça ?
078 Es : non
079 P : si vous dites non, il va falloir le prouver. (les élèves écrivent)
080 Es : la suite Pn ne s'arrête pas d'augmenter.
081 P : vous pourriez exprimer ça ? avec un terme mathématique ?
082 E : elle est strictement croissante ; elle croît mais de façon moins rapide... (un élève fait un signe de dénégation)
083 Flora : elle tend vers l'infini
084 Es (discutent) les bouts qu'on ajoute sont de plus en plus petits... c'est multiplié à chaque étape par un nombre plus grand que 1...
085 P : oui, c'est vrai ; est-ce que Pn est bornée ou pas ?
086 Es : oui ... non...

087 E : elle a un maximum de toutes façons.
088 Es, Ludivine : non, c'est l'infini son maximum.
089 P : Ludivine, tu dis : son maximum c'est l'infini, eh bien ça il va falloir le prouver, il y a des élèves qui pensent que non, alors la question qu'on pourrait formuler, c'est : * la suite Pn a un maximum, ou : * Pn n'a pas de maximum, son maximum est infini.
(la classe est silencieuse : les élèves ne sont pas sur un terrain familier)
090 E : si c'est infini
091 E : si on l'arrête c'est pas infini
092 P : ... autrement dit elle n'est pas bornée et dans ce cas, son "maximum" est "infini". Je mets tout entre guillemets, hein, parce qu'un maximum infini, on n'a pas encore vraiment rencontré ça. Ludivine pense que ce maximum est infini, Frédéric pense que ça va s'arrêter à un moment donné. Et pour la suite An ?
093 Frédéric : elle est bornée.
094 Sébastien : je pense que c'est pareil, elle est bornée : 224,48 ; on a vu que ça ne l'atteignait jamais.
095 Anne-Laure : logiquement non.
096 P : est-ce qu'il y aurait un nombre dont elle se rapprocherait autant qu'on veut, c'était ce que disait Frédéric ?
097 Frédéric : oui!
098 P : les autres ? qu'en pensez-vous ?
099 Boubker : ben non, il y a toujours des chiffres après la virgule...
100 P : oui mais ils représentent des 10^{-8} , puis des 10^{-9} , ils sont de plus en plus petits. Bon, je garde la question de Frédéric quand même.
An est-elle bornée ; éventuellement il va falloir le prouver qu'elle est bornée. Et est-ce qu'il y a un nombre dont elle se rapproche ? voilà les deux questions que vous avez émises pour An.
(Interclasse)
101 P : Alors... je fais le point des suppositions et des questions auxquelles on est arrivé ; sur la suite An tout le monde a l'air d'accord sur le fait qu'elle est croissante et bornée ; elle pourrait tendre vers un nombre qui n'est pas infini, mais là tout le monde n'est pas d'accord. Et il y a un nombre dont elle se rapproche autant qu'on veut, ça c'est une question qui n'a pas de réponse.
Par contre pour la suite Pn, elle a un maximum pour certains, et pour d'autres elle n'a pas de maximum, elle n'est pas bornée, donc son maximum est infini.

PHASE VI

Alors maintenant on va faire 5 minutes de débat, c'est Mickaël qui va... *(applaudissements)* sur ces questions, je les écris sur le tableau de droite. Si tu veux Mickaël on parle de Pn pour commencer ; allez Davy veut parler de Pn.
102 Davy : non mais... je pense qu'elle est bornée, parce que chaque fois on rajoute des mesures de plus en plus petites.
103 Flora : mais ça s'ajoute quand même, donc ça augmente. Toujours!
104 Mickaël : à part ça y a pas d'autre avis ? si y en a qui sont contre l'avis de Davy, faut le dire! (rires) y en a plein qui se taisent là-bas (rires) ; c'est bien beau d'écouter, mais... bon j'vais désigner, si ça continue ; Caroline, là, t'as pas d'avis ?
105 Caroline : NON!
106 P : ça c'est une façon sympathique d'inciter les gens à parler! (rires). Bon mais, je voudrais bien qu'on revienne sur l'argumentation, Davy a dit : ça augmente tout le temps, mais ça augmente avec des quantités de plus en plus petites, comme ça quoi (fait un geste).
107 Es : comment ?

108 P : ça pourrait s'arrêter presque d'augmenter.
109 E : mais si ça augmente! (débat confus) Au fur à mesure ça grandit ça grandit...
110 P : mais An aussi elle augmente. An aussi on ajoute toujours quelque chose!
111 Frédéric : Si on prend la figure du fractal, on peut le mettre dans un hexagone. D'après moi, le fractal ne dépassera jamais l'hexagone, donc son aire, elle dépassera jamais celle de l'hexagone : on peut donner une limite ; en fait c'est borné.
112 Es : pourquoi ça dépassera pas ? (exclamations) sur ta figure ça dépassera pas, mais pourquoi ça a une limite ? voilà! donne nous tes hypothèses! quelle est l'origine de ton fondement ? (rires)
113 Flora : il a raison, ça dépasse jamais l'hexagone, mais on rajoute tout le temps des triangles.
(Remarque : dans les discussions sur les limites, il est très difficile de s'affranchir des marqueurs du temps).
(Discussion animée et générale ; l'hexagone est tracé sur plusieurs dessins)
114 Mickaël : Moins de bruit SVP! Je suis pas, là! Laurent ?
115 Laurent : Moi je suis d'accord avec Frédéric : pour l'aire ça n'augmente pas, tandis que pour le périmètre ça va augmenter.
116 Frédéric : l'aire ça reste borné.
117 Mickaël : je croyais qu'on parlait que du périmètre.
118 Jérôme : si le périmètre augmente, l'aire aussi. (signes de dénégation dans la classe)
(Discussion animée sur ce point : "non c'est pas..." ;"Ah oui"..."ça dépend"...)
119 P : autrement dit si le périmètre devient infini, à ton avis l'aire aussi. *(Ton très neutre : c'est une reformulation).*
120 E : c'est logique : la logique mathématique! (discussion animée)
121 Yaëlle : l'aire elle va toujours augmenter, jusqu'à l'infini elle prendra des valeurs, mais qui n'arriveront jamais à l'aire de l'hexagone, voilà.
122 Sandra : oui voilà!
123 Yaëlle : ça rajoutera des décimales ; ça tendra vers l'aire de l'hexagone mais ça l'atteindra jamais.
124 P : c'est intéressant ce qu'elle dit Yaëlle, parce que tu as dit : l'aire elle va toujours continuer d'augmenter, elle aura toujours une valeur, à l'infini, mais cette valeur sera inférieure à l'aire de l'hexagone. Donc ce qu'elle est en train de dire, c'est qu'il faut distinguer, n devient infini, ça c'est une chose, mais An ne devient pas forcément infini. Vous comprenez ce que je veux dire : elle dit, l'aire, à l'infini, elle aura toujours une valeur, même à l'infini, on rajoute des décimales, mais cette valeur sera pas infinie.
C'est très intéressant, ça veut dire qu'on fait la distinction entre ce qui se passe pour n et ce qui se passe pour les valeurs de la suite.Et peut-être il se passe pas la même chose pour Pn et pour An.
Parce que tout ce que j'entends, ça laisserait penser que le périmètre et l'aire ils augmentent forcément en même temps. Alors je voudrais faire un petit dessin : dans ce dessin trouvez des figures de même périmètre et d'aires différentes.



(Discussion ; plusieurs élèves au tableau proposent leur solution ; la classe se met d'accord).

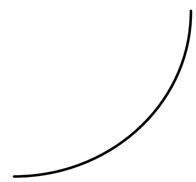
125 P : Autrement dit l'aire et le périmètre ne sont pas forcément liés : l'aire et le périmètre ne sont pas obligés de varier de la même façon. Regardez aussi, Flavie avait tracé l'antiflocon : cette fois ci on prend les triangles à l'intérieur ; le périmètre est le même. Et l'aire devient de plus en plus petite à chaque transformation ; ma figure est fausse mais c'est pas grave. Si on veut calculer l'aire de l'antiflocon il faut prendre la même formule mais cette fois on prend :

$$A_0 - 3\,\frac{A_0}{9} - 12\,\frac{A_0}{9^2} \dots$$

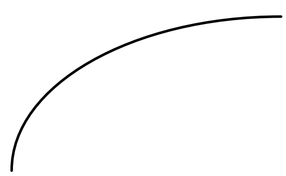
à chaque étape vous enlevez un petit bout d'aire. Par contre la suite des périmètres elle continue à être croissante : Pn croît et An décroît.

PHASE VII

126 P : Bon, alors ce qu'on va faire maintenant, c'est, puisque tout le monde a dit ce qu'il avait à dire, comment on pourrait faire pour prouver ça : avec quels moyens on peut prouver. Juste une remarque : quelqu'un avait proposé de tracer la courbe Pn en fonction de n, on trouve quoi ? oui, quelqu'un me la donne ? *(P dessine la courbe au tableau)*



ce qui veut dire que c'est cohérent avec ce qu'on a dit ; et pour An, à partir de Ao, on trouve ça :



là aussi c'est c'est cohérent avec ce qu'on a dit, mais la courbe, elle permet pas de dire plus, là aussi la capacité de la calculatrice est dépassée.

On va expliquer maintenant comment on peut prouver ce genre d'affirmations, ce que vous avez dit sur An et Pn. La théorie qui le permet, l'analyse, elle a été inventée à partir du XVIIème siècle, ça a commencé avec Newton, Pascal aussi ; c'est une théorie qui a pour but de donner des méthodes de preuve sur des choses non calculables, comme les infiniment grands et les infiniment petits. Je l'écris. *(les élèves écrivent)*. Et pas seulement en maths, hein, vous avez vu à l'exposition *(exposition : Aux frontières des mathématiques, ordre et chaos dans la nature ; Pau, janvier 1996)* qu'en physique aussi, on rencontre extrêmement souvent des phénomènes qui ne sont pas calculables, vous avez vu l'exemple de la météo, des pendules couplés, pendules à deux branches, pendules magnétiques... le non calculable, la physique c'en est plein.

On vous a dit, en général, on commence par établir des équations différentielles ; on ne sait pas les résoudre, <u>mais</u>, on a des moyens de dire des choses dessus, d'avancer des preuves sur les solutions, et ces moyens, c'est l'analyse qui nous les donne.

Ce qui n'est pas calculable, en particulier, les processus infinis : ce qu'on aimerait savoir, c'est comment on peut déterminer le comportement de Pn et An grâce à des méthodes de contrôle qui ne sont PAS les méthodes de contrôle algébriques. Autrement, vous avez vu avec la discussion qu'on a eue, on pourrait continuer comme ça pendant une heure ou deux, on serait pas plus avancés. Il faut qu'on se donne des moyens de contrôle de ce qu'on dit à l'infini. Ces moyens, vous ne pouvez pas les inventer, alors je vais vous les donner ; et de toutes façons, des théories de l'analyse, il y en a plusieurs, moi j'en connais deux : celle qu'on enseigne en classe, qui est la théorie de l'analyse classique, et une autre qui s'appelle l'analyse non standard.

127 P : alors pour ça, commençons par Pn, pour savoir si justement, elle s'arrête de grandir ou pas, on va tester ça : le but c'est de tester ce qu'en maths on appelle une conjecture , en biologie c'est une hypothèse :

Pn est bornée, ou pas ?

Alors on va se donner un nombre, et trouver n tel que Pn dépasse ce nombre.On va le faire une fois ensemble, ensuite c'est vous qui le ferez. Un élève donne un nombre, l'autre essaye de trouver n pour que Pn dépasse ce nombre. Tout le monde a compris ? (P. écrit au tableau, et souligne dépasse)

128 E : non.

129 P : on en fait un, vous allez voir. Alors donnez moi un nombre.

130 E : 100

131 Es : c'est plus petit que 8,6. 10^{99}! (valeur calculée à la machine pour n = 786).

132 P : bon alors un grand nombre

133 Jérôme : 5000

134 P : même remarque, 5000 c'est pas la peine pourquoi ?

135 Es : c'est plus petit que 8,6. 10^{99}!

136 Jérôme : 5,92. 10^{128}

137 P : d'accord, allez on le fait. Pn c'était Po. $(4 / 3)^n$, alors on essaye si Po. $(4 / 3)^n > 5,92 . 10^{128}$

138 Mickaël : c'est quoi ce nombre ?

139 P : c'est Jérôme qui me l'a donné. On veut voir si la suite est bornée ; pour ça on se donne un nombre, aussi grand qu'on veut, et on veut voir si Pn le dépasse. Allez-y. (discussion sur la machine : certains veulent l'essayer) C'est pas la peine d'essayer avec votre machine directement, hein. Quels outils on a à notre disposition ?

140 Es : les log. on l'a vu hier.

141 Davy : ça enlève les puissances.

(Des élèves ont déjà fait le calcul, d'autres butent : les logarithmes ne sont pas au programme de la classe de Première)

142 P : On peut simplifier un peu la recherche : si je prends 10^{129} , ça vous gêne ? parce que là il y un produit...(les élèves cherchent) Il faut commencer par lâcher sa machine, il faut les deux mains pour écrire avec les log! (rires) .

143 Es : oui, d'accord. Et Po ?

144 E : Po ? c'est 54.

145 Sylvain : ln et log c'est la même chose ?

146 P : c'est pas tout à fait la même chose, mais ici ça va donner le même résultat parce qu'elles sont proportionnelles ; comme on fait des quotients après, ça va donner la même chose on prend ln ou log, comme vous préférez. (Les élèves choisissent log ; étant donné qu'ils ne savent pas que log $10^n = n$, le logarithme décimal ne part pas avec un avantage décisif) Les log, on a dit que ça transforme les produits en sommes.

Alors log Po + n log 4/3 > 129 ; on trouve n ?

147 E : n > 1018,63

148 Davy : on prend n = 1019.

149 P : ça marche! donc on a trouvé, si n = 1019, Pn dépasse 10^{129} . On continue, je voudrais savoir si Pn peut encore dépasser d'autres nombres, aussi grands que je veux. Alors vous m'en annoncez un autre ?

150 E : 10^{3637}

151 P : allez, d'accord. On veut savoir si Pn peut dépasser 10^{3637}
152 E : et en général ? une règle générale ?
153 P : oui, on pourra faire une règle générale. Faites le avec celui-là, et vous direz si vous êtes convaincus, si ça a fait avancer notre question ou pas. Bon (un élève donne la réponse) à partir de 29097, et puis la suite est croissante... Pn > 10^{3637}. Je vous rappelle que la question que j'avais écrite, c'était : est-ce que Pn est bornée ou pas ?
154 Frédéric, Laurent, autres : non.
155 P : pourquoi c'est pas borné ?
156 E : 10^p ... 10 puissance quelque chose...
157 P : oui, si je recommence avec 10^p , n'importe quel entier p, je peux toujours trouver n tel que Pn dépassera. (Les élèves font le calcul avec p).
158 P : si p = 1 000 000
159 E : n = 8 003 90,91... 8 0003 909.
160 P : Est-ce que tout le monde a compris ce qu'on fait, là ? Qui est-ce qui veut qu'on refasse le point ? La question qu'on se posait : est-ce que Pn a un maximum ou pas, la réponse : NON, puisque j'arrive à lui faire dépasser n'importe quel nombre, même aussi grand que je veux, 10 puissance un million si je veux. Est-ce qu'elle est bornée ?
161 Es : non.
162 P : ça, en analyse - vous notez, c'est important - ça prouve que la suite Pn n'est pas bornée, puisqu'on arrive à lui faire dépasser n'importe quel nombre même très grand, il suffit de prendre n suffisamment grand ; et là on dira qu'elle tend vers plus l'infini quand n tend vers plus l'infini. C'est ça la définition, c'est la preuve qu'on peut donner qu'une suite tend vers plus l'infini, c'est qu'on arrive à lui faire dépasser n'importe quel nombre, aussi grand qu'on veut. Et on écrit
lim Pn = + •
n Æ +•
On l'écrit comme ça. Bon, ben, le flocon a un périmètre "infini". Souvenez-vous de la cassette sur la côte de Bretagne qu'on avait vue à l'exposition sur les fractales : si on commençait à mesurer les tout petits morceaux! (pause)
Bon, et An ?
(Sonnerie)

TROISIEME SEQUENCE : TRAVAIL EN GROUPES (Le 23/ 02 /96)

PHASE VIII

001 P : Alors samedi, je vous rappelle ce qu'on avait trouvé pour Pn : on était arrivé à prouver que Pn dépasse 10^p , on avait fait ça avec des logarithmes, ça devait faire : n > $\dfrac{p - \log 54}{\log \frac{4}{3}}$; (P. écrit au tableau : <u>Pn non borné</u> ; 10^p p aussi grand qu'on veut : "arbitrairement grand" ; Pn dépasse 10^p à condition que n soit assez grand).
Maintenant on va reprendre les questions pour l'aire.

On était arrivé à : $A_n = A_o + 3\ A_o \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{9}{5}\left[1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right]$

La première chose, c'est qu'on va développer ça, pour transformer l'expression de An. (les élèves calculent).
002 Laurent : Ao + 3/5 Ao...
003 Julie : ça fait 8/5 Ao - 3/5 Ao multiplié par... (les élèves calculent durant 2-3 mn)

004 P : Voilà. On trouve An = $\frac{8}{5}A_0 - \frac{3}{5}A_0 \cdot (\frac{4}{9})^n$. Alors les questions qu'on s'était posées : est-ce que An est bornée ; est-ce que An "tend vers un nombre", on va essayer d'y répondre. Ce qu'on va regarder quand même, c'est si ce qu'on a fait pour le périmètre nous aide à progresser dans la réponse à cette question. En comparant avec la méthode qu'on a utilisée pour le périmètre, on va voir si on pourrait donner une réponse pour An. Pour Pn on a dit qu'il avait une limite infinie.

A quoi est-ce qu'on verrait que An est bornée ; que An tend vers un nombre - étant donné qu'on a su le faire pour Pn qui tendait vers l'infini. A quoi ça se verrait ? Là vous cherchez, mais par écrit ; ça peut être anonyme, ça m'est égal, mais par écrit, chaque groupe met sur un papier : voilà ce qu'on pense et voilà comment on ferait pour le prouver. Ensuite on en discutera. Il va falloir prouver ce qu'on dira.

(Les élèves se déplacent, et cherchent ; 10 mn de discussion, recherche ; c'est très calme)

005 Caroline : c'est quoi la différence entre An est bornée et An tend vers un nombre ?

006 P : ah, voilà, justement, c'est bien ce qu'on est en train d'essayer de se poser comme question, c'est une très bonne question Caroline. Bornée, ça veut tout simplement dire encadrée par des nombres fixes. Ici on sait qu'une aire c'est positif, donc bornée ça veut dire plus petit qu'un nombre fixe. Peut-être ce nombre on va pouvoir le trouver directement.

007 Karine : 224,48 ?

008 Yaëlle : l'hexagone, ça se rapproche de l'aire de l'hexagone.

009 P : il ne faudrait pas faire une fixation sur l'hexagone, regardez plutôt la formule.

010 Yaëlle : non non non, mais quand même, au fur et à mesure qu'on... ça se rapprochera de plus en plus. (elle fait le tour de son dessin avec le crayon pour illustrer son propos)

011 Boubker : la formule dit que ce n'est pas borné!

012 P : c'est ce que tu affirmes, tu peux le prouver ? borné ça veut dire quoi ?

013 Boubker : trouver un majorant ... et un minorant.

014 P. : l'aire c'est positif alors le minorant...

015 Karine : $u_n = (\frac{4}{9})^n$

016 P : l'autre chose, c'est tendre vers un nombre, alors là on peut se demander ; pour le périmètre on avait $(\frac{4}{3})^n$, c'était pas borné ; ça devient aussi grand qu'on veut, et ici on a $(\frac{4}{9})^n$

Karine tu as écrit $u_n = (\frac{4}{9})^n$, tu as écrit décroissante, là on a une suite décroissante effectivement ; on peut se poser la question, pourquoi la capacité de la machine est dépassée, puisque c'est pas du côté des grands nombres cette fois ci.

017 Frédéric (à Sébastien) : $(\frac{4}{9})^n$ est plus petit que 4/9 ; donc ça se rapproche de zéro, donc : $1 - (\frac{4}{9})^n$ se rapproche de 1, donc An se rapproche de 8/5... (gestes du crayon pour appuyer)

018 Ludivine : là j'ai fait 4 divisé par 9, j'ai fait le résultat, puissance 5

019 Laure : et pourquoi tu mets pas les parenthèses ?

020 Ludivine : c'est pareil! bon on essaye euh... 100 ?

021 Laure : c'est un petit peu beaucoup...

022 Les autres : mais non c'est pas beaucoup!

023 Ludivine : bon alors pour 100 ça fait 6,04 fois 10 puissance -36

024 P : et alors, Laure, elle dit :

025 Laure : c'est petit, hein, 6,04 fois 10 puissance moins 36! (silence) ça tend vers zéro...

026 Sandra : An s'arrête pas de grandir ; mais ça deviendra tellement petit que...

027 Florence : il faut regarder pour $(\frac{4}{9})^n$.

028 Flavie : la calculatrice elle a pas assez de chiffres.

029 Sandra : les accroissements sont tellement petits que la calculatrice peut plus…

(le groupe de Karine discute et demande l'avis du professeur, qui conseille à Karine d'aller au tableau pour que la discussion se passe avec l'ensemble de la classe)

030 Karine (passe au tableau) : si $(\frac{4}{9})^n$ tendait vers zéro, si on pouvait considérer que ça tendait vers zéro...

031 P : qu'est-ce qui vous amène à vous poser cette question ?

032 Karine (montre la formule de An) : 8/5 Ao, ça reste toujours… $\frac{3}{5} A_0 . (\frac{4}{9})^n$ c'est la seule chose qui varie, quand n varie.

033 P : très bonne remarque ; alors il n'y a que $(\frac{4}{9})^n$ qui varie quand n varie ; dans An, il y a une partie fixe, qui est 8/5 Ao, et apparemment, le morceau $\frac{3}{5} A_0 . (\frac{4}{9})^n$, qui varie, mais très très peu quand n devient grand ; et varier très peu, tu dis ça devient de plus en plus petit, et tu dis ça tend vers zéro. Peut-être que pour répondre à cette question là, on pourra utiliser les mêmes moyens que pour le périmètre. Sauf que c'est le contraire, vous allez me dire... (pause) Est-ce que An est bornée ?

034 Es : à mon avis oui

035 P. : bon mais alors est-ce que An est plus petit que quelque chose ?

036 Flavie, Sébastien : oui, que 8/5 Ao.

037 P : pourquoi ?

038 Sébastien : et bien on enlève... moins tout ce qu'il y a après!

039 P : oui, d'accord, on enlève ce morceau, là, $\frac{3}{5} A_0 . (\frac{4}{9})^n$; il devient très petit certes, mais il est toujours positif, donc quand je mets un signe moins devant, An est plus petit que ce qu'il y a devant, 8/5Ao.

Alors est-ce que ça c'est la surface de l'hexagone comme vous le disiez, ça je crois pas tout à fait : il faudrait la calculer, mais de toutes façons An est bornée.

Alors maintenant, la question que Karine a posée, c'est est-ce que $(\frac{4}{9})^n$ tend vers zéro. Qu'est-ce que ça veut dire ? tendre vers l'infini, on a dit, c'est devenir plus grand que 10^p , quel que soit p, alors tendre vers zéro, ça voudrait dire quoi ? mettez vos propositions par écrit.

(les élèves cherchent dans les groupes ; ils discutent durant 10 minutes environ)

040 Sandra (va au tableau) : par exemple $(\frac{4}{9})^n < 10^{-99}$

041 P Pourquoi ? alors voilà, on a dit qu'on essayait de montrer que $(\frac{4}{9})^n$ avait pour limite zéro, on va le rendre plus petit qu'un nombre très petit, par exemple que 10^{-99}.

042 Sandra : et on a trouvé n, et n > 282.

043 P : à ton avis Sandra, est-ce que ça ressemble à une des conditions qu'on avait trouvée pour le périmètre ?

044 Sandra : oui, n augmente.

045 P : oui, quand n augmente, on réussit à rendre la suite plus petite qu'un nombre très petit. Alors est-ce qu'on pourrait systématiser ça ?

046 Groupe 1 : on avait trouvé la même chose que Sandra ; avec : 10^{-100}, on trouvait n > 284.
Sylvain : c'est ça

047 Karine : nous on a fait avec 10^{-p}

048 P : ah oui, très bien. Le groupe de Karine, elles ont mis : $(\frac{4}{9})^n < 10^{-p}$ où p est un entier positif bien sûr.

049 Laurent : ça fait $n > \dfrac{-p}{\log \frac{4}{9}}$

050 Sylvain : je comprends pas pourquoi on change le signe (< devient >).

051 Caroline : mais log 4/9 est négatif!

052 P : oui, Caroline, très bien, log 4/9 < 0 , voilà pourquoi ça change le sens de l'inégalité quand on va diviser par log 4/9. Et tout le monde voit bien, que ce nombre, là, $\dfrac{-p}{\log \frac{4}{9}}$, c'est positif : p est négatif, log 4/9 est négatif, le quotient de deux négatifs bien sûr c'est positif ; ça va ? Autrement dit est-ce qu'on est arrivé à une condition du même type que celle du périmètre ?

On est arrivé à prouver qu'on peut rendre $(\frac{4}{9})^n$ aussi petit qu'on veut, plus petit que n'importe quel nombre de la forme 10^{-p} ; ça veut dire quoi, là ?

053 Laurent : ça veut dire que ça se rapproche de zéro.

054 P : voilà ; alors attendez, je vais effacer ça, je note tout ce que vous avez dit, là... alors 4/9 exposant n est plus petit que 10^{-p}, ceci quel que soit $p \in \mathbb{N}$, et ...

055 Laurent : ...se rapproche de zéro.

056 P : oui ; alors ce que je vais rajouter, parce que c'est très important, c'est : "autant qu'on veut". Parce que par exemple, si vous prenez 1/1000 ou même 1/10000000, on peut dire d'une certaine façon que c'est proche de zéro, seulement le problème, c'est que ça restera là et ça ne se rapprochera pas plus. Alors ... $(4/9)^n$ se rapproche ***autant qu'on veut*** de zéro. Et comme $(4/9)^n$, on veut prouver que ça tend vers zéro, on prouve que ça devient PLUS PETIT que 10^{-p}.

Et bien, on dira que la suite définie par $u_n = (4/9)^n$ a pour limite zéro et on écrit que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (4/9)^n = 0$; par exemple, on le refait avec $< 10^{-1000}$.

057 E : -1000, je sais pas si... on peut toujours le faire...

058 Es : oui, ça fait 2839 virgule...

059 P : D'accord, à partir de n = 2840, 4/9 exposant n est plus petit que 10^{-1000}. Pas étonnant que la calculatrice, elle y arrive plus. Alors il nous reste un petit moment, juste pour finir de répondre à nos questions ; parce que pour l'instant, on a répondu à nos questions pour $(4/9)^n$, mais on n'a pas répondu pour An. Je réécris An.

$An = \frac{8}{5}A_0 - \frac{3}{5}A_0 \cdot (\frac{4}{9})^n \cdot$ Question, qu'est-ce qu'on pourrait dire sur An ?

060 E : il tend vers un nombre.

061 P : oui... lequel ?

062 Mickaël (voix forte et très assurée) : il se rapproche de 8/5 Ao sans jamais l'atteindre

063 P : bon, si c'est vrai, ça devrait se voir sur leur différence ; oui Pauline ? tu comprends ce qu'on veut dire ?

064 Pauline : je comprends pas ... ah oui (calcule)

065 Laurent : ça se rapproche de zéro.

066 P (au tableau) : parce que c'est... la suite de tout à l'heure, qu'on avait appelée u_n, $(4/9)^n$... multipliée par 3/5 Ao, et 3/5 Ao, c'est une constante. Ao, je vous rappelle, c'était... $18^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$; y en a qui l'ont calculé, Ao ?

067 Sébastien : 140,3

068 P : par excès ?

069 E : 140,296....

070 P : alors oui, par excès : 140,3 unités d'aire. Ce qui va se passer, si on regarde ce que devient $140{,}3.(4/9)^n$... et $(4/9)^n$ devient aussi petit qu'on veut, est-ce que $140{,}3.(4/9)^n$ devient aussi petit qu'on veut ?

071 Laure : ben oui E : non... E : oui....

072 P : je multiplie par 140,3 fois 3/5

073 E : 84,2

074 E : ça change rien.

075 P. : d'accord 84,2 fois $(4/9)^n < 10^{-p}$, alors je prends les log, je vous rappelle que les log, ça... allez, 2 mn de sérieux (une élève rit) ;
On le fait, je prends les log : log 84,2 + n log 4/9 < - p
donc (écrit en parlant) n log 4/9 < -p - log 84,2
donc n plus grand que : - p - log 84,2 sur log 4/9 sachant que log 4/9 est négatif
bon, ben on va y arriver quand même, hein, il va falloir prendre n un petit peu plus grand que tout à l'heure, pour que ce soit plus petit que 10^{-p};
et alors... on a aussi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{5}A_0 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}$ An = 8/5 Ao